

Concours National Commun - Session 2012

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II Filière MP

Résultat les matrices : Pour tout polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et toute matrice $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ dont le polynôme minimal est de degré $n - 1$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que N soit une sous-matrice de M et que le polynôme caractéristique de M soit égal à $(-1)^n P$. (résultat dû à FARHAT et LEDERMAN en 1958).

Corrigé par M.TARQI

PARIE I. UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

1.1.1.1 $\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si et seulement si $Bw = v$ et ${}^t u w + \lambda = b$ ou encore si et seulement si $\begin{cases} w = B^{-1}v \\ \lambda = b - {}^t u B^{-1}v \end{cases}$, car B est inversible.

1.1.2 Il est clair que $\begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix} = \det(B) \times 1 = \det(B)$.

1.1.3 Puisque B est inversible, alors $\det(B) \neq 0$ et donc $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t \tilde{B}$.

1.1.4 D'après la question 1.1.1, on a : $\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = |B| \times \lambda = |B| \left(b - \frac{1}{|B|} {}^t u {}^t \tilde{B} v \right) = b|B| - {}^t u {}^t \tilde{B} v.$$

1.2

1.2.1 Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les différentes valeurs propres complexes non nulles de B et $\varepsilon = \min_{i \in [1, r]} |\lambda_i|$.

Alors pour tout $x \in]0, \varepsilon[$, x n'est pas une valeur propre de B et donc $B - xI_n$ est inversible.

1.2.2 L'application $A \mapsto {}^t A$ est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, donc elle est continue.

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^n . Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on désigne par A_1, A_2, \dots, A_n les vecteurs colonnes de A . L'application $A \mapsto |A|$ est la composée des applications :

- $A \mapsto (A_1, A_2, \dots, A_n)$ qui est linéaire, donc continue,
- et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, qui est n -linéaire, donc continue.

Ainsi l'application $A \mapsto |A|$ est continue.

1.2.3 Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'après la question 1.2.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \varepsilon[$, la matrice $B_x = B - xI_n$ est inversible et d'après la question 1.1.4, on a :

$$(2) \quad \begin{vmatrix} B_x & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b|B_x| - {}^t u {}^t \tilde{B}_x v.$$

et par continuité des applications précédentes et comme $\lim_{x \rightarrow 0} B_x = B$, alors le passage à la limite dans l'égalité (1) donne :

$$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b|B|^{-t} u \tilde{B} v.$$

Ceci montre que la formule (1) est valable pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

PARIE II. RÉUNION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

2.1 Supposons $F_1 \not\subseteq E$ et $F_2 \not\subseteq E$. Donc il existe $x_1 \in E \setminus F_1$ et $x_2 \in E \setminus F_2$, on a $x_1 + x_2 \in E = F_1 \cup F_2$, donc $x_1 + x_2 \in F_1$ ou $x_1 + x_2 \in F_2$. Si $x_1 + x_2 \in F_1$ et comme $x_2 \in F_1$ alors $x_1 + x_2 - x_2 = x_1 \in F_1$ ce qui est absurde. De même la condition $x_1 + x_2 \in F_2$ conduit à une contradiction. En conclusion, si $E = F_1 \cup F_2$, alors nécessairement $E = F_1$ ou bien $E = F_2$.

2.2

2.2.1 On a $x \in E = F \cup F_r$ et $x \notin F$, donc $x \in F_r$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x \in F_r$, alors $y + \lambda x - \lambda x = y \in F_r$ ce qui est absurde, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \notin F_r$.

2.2.2 Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \in E = F \cup F_r$ et $y + \lambda x \notin F_r$, donc $y + \lambda x \in F$. Considérons la droite affine $D = y + \mathbb{K}x$, montrons qu'il existe $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ tel que $D \cap F_k$ contient au moins deux éléments différents, en effet, supposons que, pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, il existe $x_i \in E$ tel que $D \cap F_i \subset \{x_i\}$, donc

$$D = \bigcup_{i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket} (D \cap F_i) \subset \bigcup_{i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket} \{x_i\}.$$

Ceci est absurde, puisque D est un ensemble infini. Ainsi il existe $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ et deux scalaires α et β différents tels que $y + \alpha x \in F_k$ et $y + \beta x \in F_k$.

2.2.3 D'après la question précédente, $(\alpha - \beta)x \in F_k \subset F$ et comme $\alpha - \beta \neq 0$, $x \in F$ ce qui est absurde.

2.3 D'après la question 2.2 $E = F_r$ ou bien $E = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{r-1}$. Si $E = E_r$ la propriété est démontrée sinon $E = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{r-1}$ et le raisonnement de la question 2.2, montre qu'on a nécessairement $E = F_{r-1}$ ou bien $E = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{r-2}$, ce procédé se poursuit, à la dernière étape on aura $E = F_1 \cup F_2$ et la question 2.1 montre que $E = F_1$ ou $E = F_2$. En conclusion, au moins l'un des indices $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ vérifie $E = F_i$.

PARIE III. A PROPS DU DU POLYNÔME MINIMAL D'UNE MATRICE

3.1 D'après le théorème de Cayly-Hamilton toute matrice A est zéros de son polynôme caractéristique, et comme le polynôme minimal de A divise tout polynôme annulateur de A , π_A divise χ_A , ce dernier est de degré $\leq n$, donc $\deg \pi_A \leq n$.

3.2 Si $\deg \pi_A = n$, alors toute relation de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i = 0$, conduit à $\alpha_i = 0$ pour tout i , sinon on aura un polynôme non nul et de degré $\leq n - 1$, annulateur de A ce qui contredit la définition de π_A .

Si la famille $\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ est libre, alors toute sous-famille de type $\{I_n, A, \dots, A^k\}$ ($k \leq n - 1$) est libre, et donc on peut trouver un polynôme non nul de degré $\leq n - 1$ tel que $P(A) = 0$, autrement dit $\deg \pi_A \geq n$, et en tenant compte de la question 3.1, $\deg \pi_A = n$.

3.3

3.3.1 $I_{A,v}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}[X]$, elle contient par exemple le polynôme minimal de A . Si $P, Q \in I_{A,v}$, $(P - Q)(A)v = P(A)v - Q(A)v = 0$ et donc $P - Q \in I_{A,v}$, de même si $P \in I_{A,v}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, $QP \in I_{A,v}$. Donc $I_{A,v}$ est un idéal non réduit à $\{0\}$, donc il existe un unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ engendrant $I_{A,v}$.

3.3.2 Puisque $\pi_A \in I_{A,v}$ alors $\pi_{A,v}$ divise π_A . L'ensemble de diviseurs de π_A étant fini, et comme pour tout $n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\pi_{A,v}$ divise π_A , alors l'ensemble

$$\{\pi_{A,w} \mid w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$$

est fini. Donc on peut poser :

$$\{\pi_{A,w} \mid w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \{\pi_{A,v_1}, \pi_{A,v_2}, \dots, \pi_{A,v_r}\}.$$

3.3.3 Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $F_k = \ker(\pi_{A,v_k}(A))$, donc F_k est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $v \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\pi_{A,v} = \pi_{A,v_i}$, donc $v \in F_i$, d'où :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_r.$$

3.3.4 D'après la deuxième partie, il existe $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = F_k$. Ainsi pour tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\pi_{A,v_k}(A)(v) = 0$ et donc $\pi_{A,v_k}(A) = 0$ et par conséquent π_A divise π_{A,v_k} , et d'après la question 3.3.2, $\pi_{A,v_k} = \pi_A$.

Le vecteur $w = v_k$ répond à la question.

3.4 Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $e = e_1$. On a $(A^3 - cA^2 - bA - cI_3)(e) = 0$, donc $X^3 - cX^2 - bX - c \in I_{A,e}$, donc π_A divise $X^3 - cX^2 - bX - c$.

Supposons que le polynôme de A est de degré ≤ 2 , donc il existe α, β et γ de \mathbb{R} non tous nuls tels que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0$, en particulier

$$(\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2)(e) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0,$$

ceci entraîne $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ce qui est absurde. Donc $\deg \pi_A = 3$, donc forcément $\pi_A = X^3 - cX^2 - bX - a$. Le vecteur e convient.

3.5

3.5.1 D'après la question 3.3, il existe un vecteur $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\pi_A = \pi_{A,v}$. Montrons que

$(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, en effet, soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k v = 0$,

donc le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ de degré $\leq n - 1$ est dans $I_{A,v}$, donc $\deg \pi_A \leq n - 1$ ce qui est

absurde, donc la famille $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$ est bien libre.

Ceci montre que la matrice B dont les colonnes sont $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ est inversible, est donc pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que ${}^t B u = {}^t x$, égalité qui s'écrit encore sous forme :

$$x = {}^t u B = ({}^t u v, {}^t u A v, \dots, {}^t u A^{n-1} v).$$

3.5.2 D'après la question 3.2, il suffit de montrer que la famille (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre. Soit $x = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0.$$

Pour ce choix de x , il existe $(u, v) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$ tel que $\bar{x} = ({}^t u v, {}^t u A v, \dots, {}^t u A^{n-1} v)$. La relation (3) entraîne, en multipliant à gauche par ${}^t u$ et à droite par v ,

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k {}^t u A^k v = 0$$

la relation (4) s'écrit encore sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2 = 0$, donc tous les α_k sont nuls, ainsi (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est bien libre.

PARIE IV. DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT PROPOSÉE

4.1 Si A répond à la question, l'égalité $A = \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$ entraîne $\text{Tr } A = \text{Tr } B + b$. Or $\text{Tr } A = -c_1$ et $\text{Tr } B = -\alpha_1$, donc $b = \text{Tr } A - \text{Tr } B = \alpha_1 - c_1$.

4.2

4.2.1 On a, pour tout $p \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $\deg U_p = n-2-p$ car $\alpha_0 \neq 0$, donc la famille $(U_0, U_1, \dots, U_{n-2})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ de degrés échelonnés, donc elle forme une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$.

4.2.2 $(U_0, U_1, \dots, U_{n-2})$ étant une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$, donc pour chaque $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$, il existe $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2} x_k U_k.$$

Mais $x \in \mathbb{K}^{n-1}$ peut s'écrire sous la forme $x = ({}^t y z, {}^t y B z, \dots, {}^t y B^{n-2} z)$ avec $(y, z) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$, donc

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2} {}^t y B^k z U_k.$$

4.3 Expression d'une matrice

4.3.1 Soit $(x, \lambda) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_B(x) - \chi_A(\lambda) &= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k \left(x^{n-1-k} - \lambda^{n-1-k} \right) \\
&= (-1)^{n-1} (x - \lambda) \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k \left(\sum_{p=0}^{n-2-k} x^{n-2-k-p} \lambda^p \right) \\
&= (-1)^{n-1} (x - \lambda) \sum_{p=0}^{n-2} \left(\sum_{k=0}^{n-2-p} \alpha_k x^{n-2-k-p} \right) \lambda^p \\
&= (-1)^{n-1} (x - \lambda) \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x) \lambda^p
\end{aligned}$$

4.3.2 Substituons B à λ dans l'égalité précédente, donc on obtient, grâce au théorème de Cayly-Hamilton :

$$\chi_B(x)I_{n-1} - \chi_B(B) = (-1)^{n-1} (xI_{n-1} - B) \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p,$$

ou encore

$$\chi_B(x)I_{n-1} = (-1)^n (B - xI_{n-1}) \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p.$$

4.3.3 Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $|B - xI_{n-1}|I_{n-1} = (-1)^n (B - xI_{n-1}) \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p$, et par définition

$|B - xI_{n-1}|I_{n-1} = (B - xI_{n-1})^t \widetilde{(B - xI_{n-1})}$ donc

$$(B - xI_{n-1}) \left[{}^t \widetilde{(B - xI_{n-1})} - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p \right] = 0.$$

L'ensemble des valeurs propres de B étant fini, donc pour tout $x \notin \text{Sp}(B)$,

$${}^t \widetilde{(B - xI_{n-1})} = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p.$$

Il est clair que les coefficients de la matrice ${}^t \widetilde{(B - xI_{n-1})}$ sont des polynômes en x , en travaillant coefficient par coefficient, on peut dire que les coefficients de même indice, qui coïncident sur $\mathbb{K} \setminus \text{Sp}(B)$, coïncident sur \mathbb{K} , ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad {}^t \widetilde{(B - xI_{n-1})} = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p.$$

4.4 Résolution du problème

4.4.1 Soit $x \in \mathbb{K}$, on a : $A - xI_n = \begin{pmatrix} B - xI_{n-1} & v \\ {}^t u & b - x \end{pmatrix}$, donc

$$\chi_A(x) = |A - xI_n| = (b - x)\chi_b(x) - {}^t u {}^t \widetilde{(B - xI_{n-1})} v.$$

Mais $\chi_B(x) = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{n-1-k}$ et ${}^t(B - \widetilde{xI_{n-1}}) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x) B^p$, d'où :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= (b-x)\chi_b(x) - {}^t u {}^t(B - \widetilde{xI_{n-1}}) v \\
&= (b-x)(-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{n-1-k} - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x) {}^t u B^p v \\
&= (-1)^n (x-b) (x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k x^{n-1-k}) - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x) {}^t u B^p v \\
&= (-1)^n (x-b) \left(x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k x^{n-1-k} \right) - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x) {}^t u B^p v \\
&= (-1)^n (x^n + (\alpha_1 - b)x^{n-1} + H(x)) - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x) {}^t u B^p v,
\end{aligned}$$

où $H(x) = (x-b) \sum_{k=2}^{n-2} \alpha_k x^{n-1-k}$. On a bien $H \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ et ne depend que b et de χ_B .

4.4.2 Par identification, $\chi_A = (-1)^n P$ si et seulement si $\alpha_1 - b = c_1$ ce qui est vérifié et, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $(-1)^n H(x) - (-1)^n \sum_{p=2}^{n-2} U_p(x) {}^t u B^p v = (-1)^n \sum_{k=2}^{n-2} c_k x^{n-k}$ ou encore si et seulement

$$\text{si } H - \sum_{k=2}^{n-2} c_k X^{n-k} = \sum_{p=2}^{n-2} {}^t u B^p v U_p.$$

4.4.3 Le polynôme $H - \sum_{k=2}^{n-2} c_k X^{n-k}$ de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ permet de définir deux vecteurs u et v tels que

$H - \sum_{k=2}^{n-2} c_k X^{n-k} = \sum_{p=2}^{n-2} {}^t u B^p v U_p$ (la question 4.2.2), pour ces deux vecteurs u et v le polynôme caractéristique $\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$ est bien $(-1)^n P$.

$$(B - \widetilde{xI_{n-1}}) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x) B^p.$$

•••••