CNC Maths .mp.2020 Corrigé Ait lhouari

Exercice 1

Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. Pour tout x réel ,la fonction :$t \to e^{tx-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et on a :$t \to e^{tx-t^2} = O_\infty(\frac{1}{t^2})$ de plus $t \to \frac{1}{t^2}$ est intégrable aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ donc $x \to e^{tx-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. pour tout x réel on a :
   $t \to e^{tx-t^2}$ est continue et intégrable.
   * Pour tout t réel :$x \to e^{tx-t^2}$ est de classe $\mathbb{C}^{+\infty}$.
   *Pour tout p entier , a réel strictement positif et $x \in [-a, a]$on a :
   $|\frac{\partial^p e^{tx-t^2}}{\partial x^p}| = t^p e^{tx-t^2} \leq t^p e^{|t|a-t^2}$ de plus :
   $t \to t^p e^{|t|a-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$
   Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral on a f est de classe $\mathbb{C}^{+\infty}$et on peut dériver sous l'intégral ie :
   $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$:$f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p e^{tx-t^2} dt$.
3. D'après 2 on a : $f'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = [\frac{-t}{2} e^{-t^2}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$
4. On a :$xf(x) - 2f"(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xte^{tx-t^t} dt - 2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{tx-t^t} dt$
   $= \int_{-\infty}^{+\infty} t(x-2t)e^{tx-t^t} dt$.
   $=[te^{tx-2t^2}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^t} dt = -f(x)$ (intégration par parties,).
   Donc pour tout réel x : $f(x) + xf'(x) = 2f"(x)$.
5. D'après 4. on a :$(xf(x)' = 2f"(x)$ donc : $x(fx) = 2f'(x) + \lambda$ constante d'intégration. or f'(0) =0 donc $\lambda = 0$ donc pour tout réel x : $xf(x) - 2f""(x) = 0$.
6. D'après 5. f est solution de l'équation différentielle $xy - 2y' = 0$ dont les solutions sont les fonctions $y : x \to \alpha e^{\frac{x^2}{4}}$. Or $f(0) = \sqrt{\pi}$.
   donc pour tout réel x on a :$f(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}$.

Exercice 2

Etude d'une série de fonction et calcul de sa somme

1. Pour tut x positif la série de terme général :
   $\frac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge simplement sur $[0, +\infty[$ et son reste d'ordre n vérifie pour tout $x \geq 0$:
   $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
   donc :$sup_{x\geq 0} |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$.
   donc la convergence est uniforme sur $[0, +\infty]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ est continue sur $[0, +\infty]$ et la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0, +\infty]$ donc sa somme g est continue sur $[0, +\infty]$.
3. * Pour tout $n \in \mathbb{N}$,u_n est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[0, +\infty]$.
   * la série de terme général u'_n converge uniformément sur $[0, +\infty]$ donc simplement .
   *Pour tout a > 0 et tout $x \in [a, +\infty[$:
   $|u'_n(x)| = e^{-nx} \leq e^{-an}$ et la série de terme général e^{-na} converge .
   Donc la série de terme général u'_n converge normalement donc localement uniformément sur $]0, +\infty[$. Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe somme g est de classe $\mathbb{C}^1$ et on a :
   $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-e^{-x})^n = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
4. D'après 3 en intégrant on aura : pour tout x>0 :$g(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \lambda$ or g est continue en zéro et g(0)=0 donc : Pour tout $x \geq 0$: $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Problème

Recherche d'hyperplans stable pas produit matriciel

1 1

1^{ier} Partie

1.1

un isomorphisme canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans son dual.

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :
$T_A(M + \lambda N) = Tr(A(M + \lambda N)) = Tr(AM) + \lambda Tr(AN)$.
$=T_A(M) + \lambda T_A(N)$ donc T_A est linéaire donc T_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car Tr est linéaire).

1.2

1.2.1

Soient A ,B et M $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:
$\phi(A + \lambda B)(M) = Tr((A + \lambda B)M)$
$= Tr(AM) + \lambda Tr(BM)$.
$= T_A + \lambda T_B(M) \qquad = (\phi(A) + \lambda\phi(B)(M)$.

Donc :ϕ est linéaire.

1.2.2

Soient A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$A \in Ker(\phi) \implies T_A = 0 \implies$ pour tout M $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) Tr(AM) = 0$
Alors $Tr({}^tAA) = 0$ donc A =O.
($||A|| = \sqrt{Tr({}^tAA)}$ est une norme sur $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Donc ϕ est injective.

1.2.3

L'application ϕ est linéaire et injective entre deux espaces de même dimension finie donc c'est un isomorphisme. Donc toute forme linéaire ψ sur $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet un antécédant A par ϕ .ie il existe A unique dans $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\psi = T_A$.

1.3

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
donc il existe ψ non nulle forme linéaire sur $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
$Ker(\psi) = \mathcal{H}$ et d'après 1.2.3 elle existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\mathcal{H} = Ker(T_A)$.

1.4

Soient A , B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,; A \neq O$
-Si B =O alors $\lambda = 0$ convient.
-Si $B \neq 0$ alors $Ker(T_A) et Ker(T_B)$ sont deux hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc de même dimension alors ils sont égaux. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,; T_A(C) \neq 0$ alors $T_B(C) \neq 0$ (Car si non $Ker(T_B) = Ker(T_A) + \mathbb{C}C = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ absurde.
Soit alors $\lambda\,; T_B(C) = \lambda T_A(C)$. Soit alors M dans $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,;$ il existe $H \in Ker(T_A) et \alpha \in \mathbb{C}\ M = H + \alpha C$ on a :
$T_(M) = T_B(H + \alpha C)$
$= T_b(H) + \alpha T_B(C)$.
$= \alpha\lambda T_A(C)$.
$= \lambda T_A(M)$
$= T_{\lambda A}(M)$.
Donc d'après 1.2.2 on a : $B = \lambda A$

1.5

Soients $M = (m_{i,j}) et N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a : $Tr(MN) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,i}$
$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n n_{k,i} m_{i,k} = Tr(NM)$.

1.6

Soit A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit P $\in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$; $A = PBP^{-1}$. Soit L={ PMP^{-1} : $M \in \mathcal{H}_B$ } .
*Si A= O alors B = O et le résultat est vrai.
*Si $A \neq O alors B \neq O$ donc $M \in \mathcal{H}_A$ et $M \in \mathcal{H}_B$ sont deux hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc de même dimension.
Or L et $\mathcal{H}_B$ ont même dimension (car $M \to PMP^{-1}$ est linéaire injective).
Soit $M \in \mathcal{H}_B$ alors $T_B(M) = 0$ donc $Tr(BM) = 0$ donc $Tr(P^{-1}APM) = 0$
donc $Tr(A(PMP^{-1}) = 0$ donc $PMP^{-1} \in Ker(T_A)$
donc $L \subset \mathcal{H}_A$ donc$L = \mathcal{H}$.

2

2^{ier} Partie

Etude du noyau $Ker(T_A)$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}$ de trace nulle.

2.1

Soit $A \neq O$ alors T_A est une forme linéaire non nulle ;donc $Ker(T_A)$ est est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc de dimension 3.

2.2

2.2.1

Ona : Tr(A) =Tr(R) d'après 1.5 (deux matrices semblables ont meme trace) . donc $0 = Tr(A) = Tr(R) = \lambda + \mu$. Donc $\mu = -\lambda \neq 0$.

2.2.2

Soit M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ R=$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$
$M \in Ker(T_R) \iff Tr(RM) = 0 \iff \mu(a-d) = 0 \iff a = d$ donc
$\mathcal{H}_R = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 .\}$.

2.2.3

Soient B=$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et C=$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

On a : B et C sont dans $\mathcal{H}_R$ mais BC=$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{H}_R$.
Donc $\mathcal{H}_R$ n'est pas stable pour le produit matriciel.

2.2.4

Soient B et C comme dans 2.2.3 et $B' = PBP^{-1}$ et $C' = PCP^{-1}$ Alors B' et C' sont dans $\mathcal{H}_A$ et B'C' n'est pas dans $\mathcal{H}_A$ (calcul comme dans 2.2.3)

2.3

2.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_2\mathbb{C}$ alors A est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ donc semblable à une matrice triangulaire R de la forme : $\begin{pmatrix}\lambda & \alpha\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$.
ou $\lambda et \mu$ sont les valeurs propres de A Or A n 'est pas diagonalisable donc $\lambda = \mu$
Or la trace de A est nulle donc $\lambda + \mu = 2\lambda = 0$ donc Aest semblable à :
R =$\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
Donc il existe $P \in \mathbb{GL}_2\mathbb{C}$ telle que :
$A = PRP^{-1}$.

2.3.2

Soit M =$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$
alors M est un élément de $\mathcal{H}_R$ si est seulement si : $Tr(RM) = 0$ si et seulement si : $\alpha c = 0$ si et seulement si : c=0 car $\alpha \neq 0$.
Donc :$\mathcal{H}_R$ =$\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$: $(a, b, d) \in \mathbb{C}^3\}$.

2.3.3

L'ensemble des matrices triangulaires supérieur est stable pour la multiplication des matrices donc $\mathcal{H}_R$ l'est aussi donc $\mathcal{H}_A$ est stable pour la multiplication des matrices. d'après 1.6.

3

3^{ier} Partie

Etude des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par le produit matriciel.

3.1

3.1.1

$I_n \notin \mathcal{H}$ donc $I_n \notin Ker(\psi)$;donc $\psi(I_n) \neq 0$.

3.1.2

Soit M$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $M^2 \in \mathcal{H}$; on pose $\lambda = \frac{\psi(M)}{\psi(I_n)}$
(i) On a : $\psi(M - \lambda I_n) = 0$ (par linéarité de ψ.
Donc $M - \lambda I_n \in \mathcal{H}$.
Donc $(M - \lambda I_n)^2 \in \mathcal{H})$. (car $\mathcal{H}$ est stable par produit des matrices) .
(ii) On a d'après 3.1.2 (i) $M^2 - 2\lambda M + (\lambda)^2 I_n$ est dans $\mathcal{H}$ or M^2 dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Donc $(\lambda)^2 I_n - 2\lambda M \in \mathcal{H}$.
(iii) Si $\lambda \neq 0$ alors $M - 2\lambda I_n \in \mathcal{H}$.
Donc $\psi(2M - \lambda I_n) = 0$ Donc $2\psi(M) - \psi(M) = 0$ (linéarité de ψ et $\lambda = \frac{\psi(M)}{\psi(I_n)}$.
Donc $\psi(M) = 0$ donc $\lambda = 0$ absurde donc $\lambda = 0$.
On a : $M - \lambda I_n \in \mathcal{H}$ et $\lambda = 0$ donc $M \in \mathcal{H}$.

3.1.3

On a : pour $i \neq j$ on a : $E_{i,j}Ei,j = O \in \mathcal{H}$ donc $(E_{i,j})^2 \in \mathcal{H}$;
Donc $E_{i,j} \in \mathcal{H}$ (d'après 3.1.2).

3.1.4

Pour tout i on a : $E_{i,i} = \delta_{j,j} E_{i,i} = E_{i,j} E_{j,i} \in \mathcal{H}$ (stabilité de **H** pour le produit des matrices. donc :$E_{i,i} \in \mathcal{H}$ pour tout $i \in [|1, n|]$.

3.1.5

On a : $I_n = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i}$ donc $I_n \in \mathcal{H}$ stabilité de $\mathcal{H}$ pour l'addition des matrice car sous espace vectoriel).

3.2

Soit $M \in \mathcal{H}$ alors : $B \in \mathcal{H} \implies T_A(B) = 0$ or $MB \in \mathcal{H}$ donc $Tr(A(MB)) = 0$ donc $Tr(AM(B)) = 0$.
Donc $B \in Ker(T_{AM})$.
Donc Ker(T_A)C Ker(T_{AM}).
Donc il existe λ_M complexe tel que $AM = \lambda_M A$ (d'après 1.6 vrai même si A=O).
Donc il existe λ_M complexe tel que :
$A(M - \lambda_M I_n) = 0$.

3.3

Soit$M \in \mathcal{H}$ alors d'après 3.2 il existe λ_M complexe tel que :
$A(M - \lambda_M I_n) = O$;c'est à dire que : $M - \lambda_M I_n \in \mathcal{F}$.
alors $M = M - \lambda_M I_n + \lambda_M I_n$.
Donc $M \in \mathcal{F} + \mathbb{C}I_n$.
Donc $\mathcal{H}$ C $\mathcal{F}$+$\mathbb{C}I_n$

3.4

On a :$\mathcal{F}$ est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ elle contient la matrice nulle O. Pour tout M et N dans $\mathcal{F}$ et α dans $\mathbb{C}$ on a : $A(M + \alpha N) = AM + \alpha AN =$ O Donc $\mathcal{F}$ est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}$. Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}n, 1(\mathbb{C}))$.telle que $\phi(M) = \varphi_M : X \to MX$.
alors ϕ est clairement linéaire et injective.
(Tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini unique élément de $\mathcal{L}(\mathcal{M}n, 1(\mathbb{C})))$;
Or $dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}n, 1(\mathbb{C}))$.
Donc ϕ est surjective et induit un isomorphisme de : $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), Ker(\varphi_A))$; en effet si M est dans $\mathcal{F}$ alorsϕ_M est à valeurs dans $Ker(\varphi_A)$; et pour tout g élément de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), Ker(\varphi))$ elle existe M dans : $\mathcal{L}(\mathcal{M}n, 1(\mathbb{C}))$; $g = \varphi_M$;
et puisque φ_m a ses valeurs dans $Ker(\varphi_A)$ alors M est un élément de $\mathcal{F}$ C.Q.F.D.

3.5 •

On a $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), Ker(\varphi_A))$, sont isomorphes donc ils ont même dimension ; or $dim_C(\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), Ker(\varphi_A))$=$n(n - rg(A)$;
donc : $dim_C(\mathcal{H}) = n(n - rg(A))$.
On a : $dim_C(\mathcal{H} = n^2 - 1$ puisque c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}$ de dimension $n^2)$
Or $\mathcal{H}$ C $\mathcal{F}$+$\mathbb{C}I_n$ d'après 3.3 Donc $dim_C(\mathcal{F}) \geq n^2 - 2$ donc :$nrg(A) \leq 2$.

3.6 •

On a A non nulle donc $rg(A) \geq 1$ donc d'après 3.5 $n \leq 2$.
or $n \geq 2$;
Donc n=2.

3.7 •

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;alors elle existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle et non inversible donc de rang 1 telle que :
$H = Ker(T_A)$;donc d'après 1.6 ; 2.3.1 ; 2.3.2 et 2.3.3 il existe P élément de $\mathbb{GL}_{\not\succeq}(\mathbb{C})$ et R=$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; tels que : $A = PRP^{-1}$ et on aura :
H={P$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$: $(a, b, d) \in \mathbb{C}^3$}.