Corrigé du Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques I
Session 2021 - Filière MP

m.laamoum@gmail.com

Exercice

Soit n un entier naturel, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n \mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. On a $x^{n+2}\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ donc $\boxed{f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

2. f_n est continue sur $[0, +\infty[$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente.

3. **a)** On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{+\infty}$ et $\boxed{I_1 = \frac{1}{2}}$.

b) Soit $a > 0$, par intégration par parties,on a

$$\begin{aligned} \int_0^a x^{n+2}\mathrm{e}^{-x^2}dx &= \frac{-1}{2}\int_0^a x^{n+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)' dx \\ &= \frac{-1}{2}\left[x^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^a + \frac{n+1}{2}\int_0^a x^n\mathrm{e}^{-x^2}dx \end{aligned}$$

On fait tendre a vers $+\infty$, on obtient $\boxed{I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}I_n}$

c) Soit k un entier naturel, on a $I_{2k+1} = k.I_{2k-1}$, donc $I_{2k+1} = k \times (k-1) \times ... \times 1 \times I_1$, ainsi $\boxed{I_{2k+1} = \dfrac{k!}{2}}$

d) On a $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soit k un entier naturel, on a $I_{2k} = \dfrac{2k-1}{2}I_{2k-2}$, donc

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{2} \times \frac{2k-3}{2} \times ... \times \frac{1}{2} \times I_0 \\ &= \frac{2k \times (2k-1) \times (2k-2) \times (2k-3) \times ... \times 2 \times 1}{2^2(2k \times 2(k-1) \times ... \times 2)} I_0 \\ &= \frac{(2k)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Après simplification on obtient $\boxed{I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}}$

Problème
Partie 1
Développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$

1. **a)** On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1) \\ &= \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

De plus

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

et

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

Par suite $u_n-u_{n+1}=\dfrac{1}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$ et $\boxed{(u_n-u_{n+1})\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^2}}$.

b) Comme $(u_n-u_{n+1})\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^2}$ alors (u_n-u_{n+1}) est positive à partir d'un certain rang , la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge , par comparaison la série $\sum\limits_{n\geq 1}(u_n-u_{n+1})$ converge .

c) Soit S_n la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geq 1}(u_n-u_{n+1})$. On a

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k+1})=u_1-u_{n+1}$$

donc $u_n=u_1-S_{n-1}$. La convergence de $\sum\limits_{n\geq 1}(u_n-u_{n+1})$ entraine la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$et de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

d) Soit $n\geq 2$,et $1\leq k\ \leq n-1$. Pour $t\in[k,k+1]$ on a $\dfrac{1}{k+1}\leq\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{k}$ ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leq\frac{1}{k}}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq\int_1^n\frac{dt}{t}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

ainsi

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq\ln n\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$$

e) D'après d) $H_n-1\leq\ln n\leq H_n-\frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{n}\leq H_n-\ln(n)\leq 1$, par passage à la limite on obtient $\boxed{0\leq\gamma\leq 1}$.

2. **a)** D'après c) on a $u_n=u_1-S_{n-1}$ et $u_1=1$ de plus $u_n-u_{n+1}=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)-\dfrac{1}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned}u_n &= 1-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{k})-\frac{1}{k+1}\\ &= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln(\frac{k}{k-1})\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient $\boxed{\gamma=1+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)\right)}$.

b) $v_n=u_n-\gamma=\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln(\frac{k}{k-1})-\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}-\ln(\frac{k}{k-1})$, donc $\boxed{v_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right)-\dfrac{1}{k}\right)}$ c'est le reste de la série $\sum\limits_{k\geq 2}\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$.

c) On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k} &= -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2})\end{aligned}$$

donc $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2k^2}$, les deux séries $\sum\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}$ et $\sum\frac{1}{2k^2}$ convergents donc les restes sont équivalents , ce qui donne $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2k^2}$, ainsi

$$v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$$

car si $\alpha>1$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

On a $v_n=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$ donc $\boxed{H_n=\ln(n)+\gamma+v_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n ; $w_n=u_n-\gamma-\frac{1}{2n}$.

a) On a

$$w_{n+1}-w_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}$$

et

$$u_n-u_{n+1}=\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}$$

donc

$$w_{n+1}-w_n=-\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}.$$

Comme

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}&=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n&=\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)+o(\frac{1}{n^3})\\&=\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

et $\boxed{w_{n+1}-w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{6n^3}}$.

b) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}&=\frac{1}{n^2}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left(1-\left(1-\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})\right)\right)\\&=\frac{2}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n^3}$$

les deux séries $\sum\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2},\sum\frac{2}{n^3}$ convergent donc les restes sont équivalents , de plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\\&=\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}}$$

c) On a pour tout entier naturel non nul n,

$$w_n=u_n-\gamma-\frac{1}{2n}\text{ et }w_{n+1}-w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{6n^3}$$

donc la série $\sum(w_{n+1}-w_n)$ converge.

Remarquons que la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)=w_n-w_1$ et $w_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k)=-w_1$$

et le reste

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k)=\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2}).$$

Des relations

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k)&=-w_1\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)+\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k)\\&=w_n-w_1+\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2}).\end{aligned}$$

on a

$$w_n=\frac{-1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2}).$$

Comme $H_n=w_n+\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}$ alors

$$\boxed{H_n=\ln(n)+\gamma+\tfrac{1}{2n}-\tfrac{1}{12n^2}+o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)}$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $m_n=\min\{k\in\mathbb{N}^*\mid H_k\geq n\}$ et on pose $\varepsilon_n=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Comme la suite $(H_k)_{k\geq1}$ est croissante et tend vers l'infini, alors l'ensemble $\{k\in\mathbb{N}^*\mid H_k\geq n\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$ et admet donc un plus petit élément.

b) Par définition de m_n on a $H_{m_n}\geq n$ et $H_{m_n-1}<n$. De la question 1)d) on a $n\leq H_{m_n}\leq\ln m_n+1$ donc $\mathrm{e}^{n-1}\leq m_n$ et $m_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$.
De la question 2) c) on a $H_n=\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n$ donc

$$\ln(m_n)+\gamma+\varepsilon_{m_n}\geq n\text{ et }\ln(m_n-1)+\gamma+\varepsilon_{m_n-1}<n$$

Ainsi $\boxed{\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n}\right)\leq m_n<1+\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n-1}\right)}$

c) La relation précédente donne

$$\exp\left(-\varepsilon_{m_n}\right) \leq \frac{m_n}{\exp(n-\gamma)} < \exp(-n+\gamma) + \exp\left(-\varepsilon_{m_n-1}\right)$$

Comme $\varepsilon_{m_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\dfrac{m_n}{\exp(n-\gamma)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $\boxed{m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(n-\gamma)}$.

d) La question b) donne

$$\frac{\exp\left(n+1-\gamma-\varepsilon_{m_{n+1}}\right)}{1+\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n-1}\right)} < \frac{m_{n+1}}{m_n} < \frac{1+\exp\left(n+1-\gamma-\varepsilon_{m_{n+1}-1}\right)}{\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n}\right)}$$

après simplification

$$\frac{\exp\left(1-\varepsilon_{m_{n+1}}\right)}{\exp(-n+\gamma)+\exp\left(-\varepsilon_{m_n-1}\right)} < \frac{m_{n+1}}{m_n} < \frac{\exp(-n+\gamma)+\exp\left(1-\varepsilon_{m_{n+1}-1}\right)}{\exp\left(-\varepsilon_{m_n}\right)}$$

Le théorème d'encadrement donne $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m_{n+1}}{m_n} = \mathrm{e}}$.

Partie 2

Étude de deux exemples de séries de fonctions

1. a) Soit $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$,donc pour t dans $[n, n+1]$ on a

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

et

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$$

ainsi $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \geq 0$ et $\dfrac{1}{(n+1)^x} - \dfrac{1}{n^x} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt - \frac{1}{n^x} \leq 0$.

Ce qui donne $\boxed{0 \leq \varphi_n(x) \leq \psi_n(x)}$.

b) Soit $x \in]0,+\infty[$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) = 1 - \frac{1}{(n+1)^x}$$

donc la série $\sum\limits_{k\geq 1} \psi_k(x)$ converge . Comme $0 \leq \varphi_n(x) \leq \psi_n(x)$, alors $\sum\limits_{k\geq 1} \varphi_k(x)$ converge aussi.

Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

c) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue sur sur $[n, n+1]$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt$ est continue sur $]0,+\infty[$ par suite φ_n est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $a > 0$ montrons la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n$ sur $[a,+\infty[$:

Pour $x \in [a,+\infty[$ on a

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \psi_k(x) = \frac{1}{(n+1)^x}$$

ce qui donne

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

$\dfrac{1}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonction on a φ est continue sur $[a,+\infty[$, ceci étant valable pour tout $a > 0$ donc φ est continue sur $]0,+\infty[$.

d) **i)** Soit $x \in]1,+\infty[$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ convergent donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \\ &= \zeta(x) + \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{K(x) = \varphi(x)}$.

ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$ et

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \varphi_n(x) = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$$

le théorème d'interversion des limites assure que φ admet une limite L en 1 à droite , avec

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \right)$$

iii) Comme $\zeta(x) + \frac{1}{1-x} \underset{\substack{x\to 1 \\ >}}{\to} L$ alors $(x-1)\zeta(x) \underset{\substack{x\to 1 \\ >}}{\to} 1$ et $\boxed{\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1} \text{ au voisinage de 1 à droite}}$.

2. **a)** Soit $x \in]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ vérifie le CSSA (critère spécial des séries alternées) donc converge . Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

b) On a $f_n(x) \underset{\substack{x\to 0 \\ >}}{\to} (-1)^n$, si la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, le théorème d'interversion des limites entraine la convergence de la série $\sum (-1)^n$ ce qui est absurde , donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

c) Soit $a > 0$ et $x \in [a,+\infty[$

$$f_n'(x) = (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^x}$$

Posons $g_x : t \to \frac{\ln t}{t^x}$, x est un paramètre strictement positif, g_x est définie sur $[1,+\infty[$.
On a $g_x'(t) = \frac{(1 - x\ln t)}{t^{x+1}}$, g_x est décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, +\infty\right[$, a fortiori sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}, +\infty\right[$, et $g_x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.
Ainsi il existe un rang $n_0$tel que la série $\sum_{n\geq n_0} f_n'(x)$ vérifie le CSSA , ce qui donne la majoration du reste sur $[a,+\infty[$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

d'où la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $[a,+\infty[$

d) Soit $a > 0$, on a : f_n de classe $\mathcal{C}^1$sur $[a,+\infty[$, $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ et $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[a,+\infty[$. Le théorème de dérivabilité des séries de fonctions montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$sur $[a,+\infty[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n^x}$. Ceci est valable pour tout $a > 0$,donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{sur }]0,+\infty[\text{ et } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n^x}}$$

3. **a)** Soit $n \geq 1$et $x \in]1,+\infty[$, on partage la somme suivant les indices pairs et impairs

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^x} &= \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x}\\ &= \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x}\end{aligned}$$

b) Soit $n \geq 1$ et $x \in]1,+\infty[$, de la même manière que la question a) on obtient

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x} = \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x}$$

c) Soit $n \geq 1$ et $x \in]1,+\infty[$, de la question a) on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^x}-\frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}$$

on replace dans la relation de la question b) on obtient

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x} = \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^x}$$

Le passage à la limite donne $\boxed{f(x)=\left(2^{1-x}-1\right)\zeta(x)}$

4. **a)** On a

$$\boxed{2^{1-x}-1=e^{(1-x)\ln 2}-1=-\ln(2)\,(x-1)+\frac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2+o((1-x)^2)}$$

b) D'après 1)d)ii) on a $\zeta(x)+\frac{1}{1-x}\underset{\substack{x\to1\\>}}{\to} L\in\mathbb{R}$ donc $\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+L+o(1)$, avec

$$L=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\right).$$

Précisons cette limite :

$$\begin{aligned}L &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)\end{aligned}$$

On a $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$ (série télescopique) et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)=\gamma-1$ (Partie1 question 2) a)), donc $\boxed{L=\gamma}$.
Calculons le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$, en 1 à droite :

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(2^{1-x}-1\right)\zeta(x)\\ &= \left(-\ln(2)\,(x-1)+\frac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2+o((1-x)^2)\right)\left(\frac{1}{x-1}+\gamma+o(1)\right)\\ &= \left(-\ln(2)+\frac{\ln^2(2)}{2}(x-1)+o(x-1)\right)(1+\gamma(x-1)+o(x-1))\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\boxed{f(x)\underset{\substack{x\to1\\>}}{=}-\ln(2)+\left(\frac{\ln^2(2)}{2}-\ln(2)\,\gamma\right)(x-1)+o(x-1)}$$

c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, la formule de Taylor -Young en 1 à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+o(x-1)$$

Par unicité du développement limité on a $f(1)=-\ln(2)$ et $f'(1)=\dfrac{\ln^2(2)}{2}-\ln(2)\gamma$, or

$$f(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} \text{ et } f'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(2) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\ln(2)\left(\frac{\ln(2)}{2}-\gamma\right)}$$

.

Partie 3

Calcul d'une intégrale

1. Observons que

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1}du \\ &= \int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1}du+\int_0^n\left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1}du \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I_{n,k}=I_{n,k-1}+\int_0^n\left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1}du}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^n\left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} &= \int_0^n (u\ln(u))\left[\frac{1}{k}\left(1-\frac{u}{n}\right)^k\right]'\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{k}u\ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^k\right]_0^n}_{=0}-\frac{1}{k}\int_0^n(\ln(u)+1)\left(1-\frac{u}{n}\right)^k\ \mathrm{d}u \\ &= -\frac{I_{n,k}}{k}-\frac{1}{k}\int_0^n\left(1-\frac{u}{n}\right)^k\ \mathrm{d}u \\ &= -\frac{I_{n,k}}{k}-\frac{n}{k(k+1)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{k+1}{k}I_{n,k}=I_{n,k-1}-\frac{n}{k(k+1)}}$$

3. **a)** On a $\frac{k+1}{k}I_{n,k}=I_{n,k-1}-\frac{n}{k(k+1)}$ et $J_{n,k}=(k+1)I_{n,k}$ donc $\boxed{J_{n,k}=J_{n,k-1}-\dfrac{n}{k+1}}$

b) On somme la relation précédente pour k entre 1 et n, on obtient :

$$J_{n,n}=J_{n,0}-n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

On a $J_{n,n}=(n+1)I_n$,

$$\begin{aligned} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} &= n\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} \\ &= nH_n-n+\frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_{n,0} &= I_{n,0} \\ &= \int_0^n \ln(u)du \\ &= [u\ln(u) - u\,]_0^n \\ &= n\ln(n) - n \end{aligned}$$

donc $(n+1)I_n = n\ln(n) - n - nH_n + n - \frac{n}{n+1}$, ainsi $\boxed{I_n = -\dfrac{n}{n+1}u_n - \dfrac{n}{(n+1)^2}}$

4. a) Soit $t \in [0,1]$ posons $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$, on a $\varphi'(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t} \geq 0$, φ est croissante sur $[0,1]$ et $\varphi(0) = 0$, donc φ est positive sur $[0,1]$.

Soit u dans $[0,n]$ alors $\frac{u}{n} \in [0,1]$ et $\varphi(\frac{u}{n}) \geq 0$ donc $1 - \frac{u}{n} \leq \mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}$ ce qui donne $\boxed{\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-u}}$.

b) Soit f_n et f définies sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq x \\ -\ln(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 < x \leq n \end{cases}$, $f\ (x) = (-\ln x)\mathrm{e}^{-x}$

On applique le théorème de la convergence dominée :

— f_n est nulle sur $[n,+\infty[$ donc elle est intégrable sur $]0,+\infty[$.

— Soit $x \in]0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq x$ on a

$$f_n(x) = -\ln(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ et } \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{e}^{-x}$$

donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} -\ln(x)\mathrm{e}^{-x}$ .Par suite la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers f .

— Si $0 < x \leq n$ on a $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x}$ donc $|f_n(x)| \leq |\ln x|\,\mathrm{e}^{-x} = |f(x)|$, inégalité qui est aussi valable sur $[n,+\infty[$.
La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ car : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})$.
Ainsi les f_n sont dominées sur $]0,+\infty[$ par une fonction intégrable.

Le théorème de la convergence dominée donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)du = \int_0^{+\infty} f(u)du$, qui s'écrit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (-\ln u)\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u}du.}$$

c) On a $\displaystyle\int_0^n (-\ln u)\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = -I_n$. D'après 3)b) $I_n = -\frac{n}{n+1}u_n - \frac{n}{(n+1)^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\gamma$.

D'où $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u}du = \gamma}$.

Partie 4

Application a la loi de Gumbel

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \exp(-t - \mathrm{e}^{-t})$.

1. a) Remarquons que g est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $(\exp(-\mathrm{e}^{-t}))' = \mathrm{e}^{-t}\exp(-\mathrm{e}^{-t}) = g(t)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^x g(t)dt = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-1}$$

comme $\lim_{x\to+\infty} \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$ alors g est intégrable sur les intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$ avec $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 1 - \mathrm{e}^{-1}$et $\int_{-\infty}^{0} g(t)dt = \mathrm{e}^{-1}$. Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt \ = 1}$.

b) La fonction g est continue positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} g(t)dt \ = 1$ donc c'est la densité d'une variable aléatoire X .

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, par définition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$

$\int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) - \lim_{x\to-\infty} \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ donc $\boxed{F_X(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)}$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la fonction $t \mapsto tg(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ dans ce cas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on fait le changement $u = e^{-t}$ dans l'intégrale $\int_0^x tg(t)dt$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x tg(t)dt &= \int_1^{e^{-x}} (-\ln u) \exp\left(\ln u - u\right) \frac{-du}{u} \\ &= \int_{e^{-x}}^{1} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u} du\end{aligned}$$

la fonction $u \mapsto (-\ln u)\mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc elle l'est sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$,ce qui donne la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{0} tg(t)dt$ avec

$$\int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^1 (-\ln u)\mathrm{e}^{-u} du \text{ et } \int_{-\infty}^{0} tg(t)dt = \int_1^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u} du \ .$$

Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ converge et X admet donc une espérance et

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} tg(t)dt + \int_{-\infty}^{0} tg(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u} du\end{aligned}$$

D'après la question 4)c)de la Partie 3) on a $\boxed{E(X) = \gamma}$

3. **a)** On a $F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} \theta(t)\ dt$ .Si $x < 0$ alors $F_{X_1}(x) = 0$ et si $x \geq 0$ alors $F_{X_1}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ dt = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

D'où $\boxed{F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x)$, on a

$$M_n \leq x \Leftrightarrow X_i \leq x \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

donc $[M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x]$, l'indépendance des variables $X_1, X_2 \ldots . X_n$ donne

$$P(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x),$$

donc

$$F_{M_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x).$$

Comme les variables $X_1, X_2 \ldots . X_n$ suivent la même loi donc elles ont la même fonction de répartition , par suite

$$\boxed{F_{M_n}(x) = (F_{X_1}(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_{G_n}(x) = P(G_n \leq x) = P(M_n - \ln(n) \leq x)$, donc

$$\boxed{F_{G_n}(x) = F_{M_n}(x + \ln(n)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ (1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n})^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \end{cases}}.$$

4. F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq \mathrm{e}^{-x}$ on a $F_{G_n}(x) = (1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x})^n$, donc $F_{G_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\to} \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.
Ainsi $F_{G_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\to} F_X(x)$ en tout point x de continuité de F_X, donc la suite $(M_n - \ln n)_{n \geq 2}$converge en loi vers X.