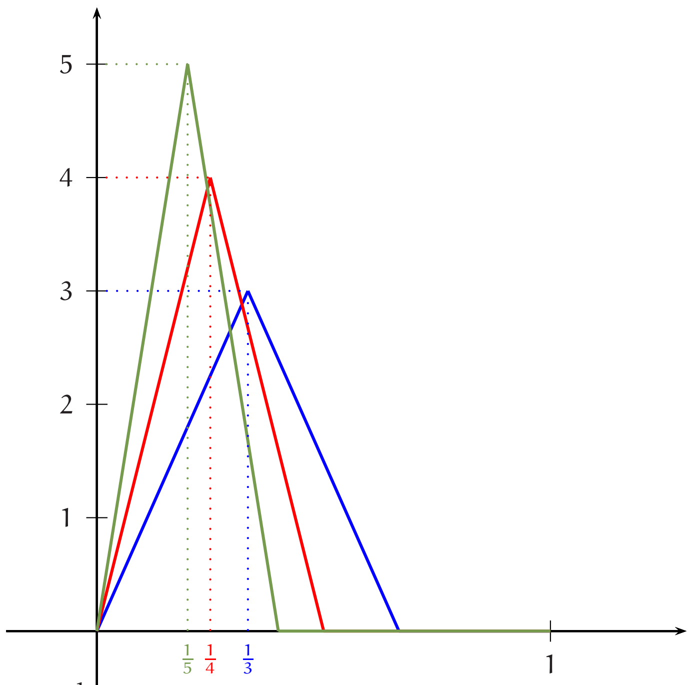
Suites et séries d'intégrales

Plan du chapitre

Nous allons fournir dans ce chapitre un certain nombre de théorèmes dont la conclusion est à chaque fois

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\ dx\right) = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx.$$

Commençons par rappeler que cette égalité n'a rien d'automatique et peut être fausse. Le contre-exemple usuel de cours est le suivant : pour $n \geqslant 2$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} n^2x \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ -n^2\left(x - \dfrac{2}{n}\right) \text{ si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left[\dfrac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$.



Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$ est l'aire d'un triangle de base $\dfrac{2}{n}$ et de hauteur n. Donc, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx = 1$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Mais, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ car pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0$ puis $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ et si $x_0 \in]0,1]$, pour $n \geqslant \dfrac{2}{x_0}$, $f_n(x_0) = 0$ et de nouveau $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx = 0$.
Ainsi, ici, nous sommes dans la situation où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\ dx\right) \neq \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx.$$

I - Suites d'intégrales

Commençons par rappeler un théorème énoncé et démontré dans le chapitre « Suites et séries de fonctions ».

Théorème 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un **segment** $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f.

Alors,
- la fonction f est continue sur $[a,b]$;
- la suite numérique $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right)=\int_a^b f(x)\ dx$ ou encore, plus explicitement

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx.$$

Commentaire. On rappelle aussi que ce théorème s'avère être de portée assez réduite car des exemples comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\ dx=0$ ou $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx=0$ échappent à ce théorème.

• Pour $x\in[0,1]$, posons $f_n(x)=x^n$. Pour $x\in[0,1]$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } x=1\\ 0 \text{ si } x\in[0,1[\end{array}\right.=f(x)$ et puisque la fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$ alors que chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, l'est, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f mais ne converge pas uniformément vers la fonction f sur ce segment. On ne peut donc pas appliquer le théorème 1. Par contre, la limite de la suite d'intégrales se calcule directement.

$$\int_0^1 x^n\ dx=\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

• Pour $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(x)=\sin^n x$. Pour $x\in[0,1]$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } x=\pi/2\\ 0 \text{ si } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.=f(x)$. De nouveau, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f mais ne converge pas uniformément vers la fonction f sur ce segment. On ne peut toujours pas appliquer le théorème 1. Montrer directement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx=0$ est un peu plus délicat :

Soit $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx=\int_0^{\pi/2-a}\sin^n x\ dx+\int_{\pi/2-a}^{\pi/2}\sin^n x\ dx\leqslant\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+a\times 1\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+a.$$

Soit $\varepsilon>0$. On choisit $a=\text{Min}\left\{\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{\pi}{4}\right\}$ de sorte que $\dfrac{\pi}{2}-a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $a\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. On obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $0<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)<1$. Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=0$ et donc, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{\pi}{2}\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a alors $\displaystyle 0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Ainsi, $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\in\mathbb{N}$, $\left(n\geqslant n_0\Rightarrow 0\leqslant\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx\leqslant\varepsilon\right)$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx=0$. ❏

Le théorème 1 utilise la convergence **uniforme** sur un **segment**. Si on n'est plus sur un segment (par exemple, pour $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^n}}\ dt$ où l'intervalle d'intégration est $[0,1[$ ou bien, pour $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt$ où l'intervalle d'intégration est $[0,+\infty[$) ou si on n'a plus la convergence uniforme, le théorème 1 ne sert plus à rien. On dispose alors du théorème suivant, appelé « théorème de convergence dominée », et qui est admis dans le cadre du programme officiel de maths spé.

Théorème 2. (théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leqslant\varphi$ (hypothèse de domination) ;

Alors,
- chaque fonction f_n est intégrable sur I ;
- la suite numérique $\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)=\int_I f(x)\,dx$ ou encore, plus explicitement

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)=\int_I\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right)dx.$$

Commentaire. Le théorème précédent est valable sur un intervalle quelconque, intervalle qui a donc le droit d'être un segment ou pas. Dans ce théorème, on doit d'abord noter que l'hypothèse de convergence uniforme a disparu. Une conséquence est que, bien que les fonctions f_n soient supposées continues sur l'intervalle I, la fonction limite f n'a plus aucune raison d'être continue par morceaux sur I. On doit donc vérifier que f est continue par morceaux sur I ce qui suppose la plupart du temps que l'on connaît explicitement la fonction f.

L'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par une autre hypothèse, l'« hypothèse de domination ». Il s'agit de fournir une fonction φ (continue par morceaux et intégrable sur I) majorant toutes les fonctions f_n. Ceci signifie que l'on doit majorer chaque $|f_n(x)|$ par une expression **dépendante de x et indépendante de n** et qui soit une fonction de x intégrable sur I. ❑

Exemple 1. Revenons aux intégrales de Wallis : $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^x\,dx$. Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(x)=\sin^n x$.
Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$, est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto\left\{\begin{array}{l}0\text{ si }x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 1\text{ si }x=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$ où de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Enfin, pour tout entier naturel n et tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(x)|\leqslant 1=\varphi(x)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx=0.$$

Exemple 2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,+\infty[$, posons $f_n(t)=\frac{1}{(t^2+1)^n}$ de sorte que $I_n=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt$.
Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue sur $[0,+\infty[$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ t\mapsto\left\{\begin{array}{l}0\text{ si }t\in\,]0,+\infty[\\ 1\text{ si }t=0\end{array}\right.$ où de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Enfin, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0,+\infty[$, $|f_n(t)|\leqslant\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car positive et équivalente à $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$. ❑

Exercice 1. (un calcul de l'intégrale de Gauss : $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$)

Dans cet exercice, on suppose acquis un résultat classique sur les intégrales de Wallis : si $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, alors

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

1) Justifier l'existence de I.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n[\\ 0 \text{ si } x \in [n,+\infty[\end{cases}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,+\infty[$, $f_n(x) \leqslant e^{-x}$.

3) En déduire que $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right) dx$.

4) A l'aide du résultat sur les intégrales de Wallis, en déduire la valeur de I.

Solution 1.

1) La fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis que I existe.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $x \in [0,+\infty[$.

- si $x \in [n,+\infty[$, $f_n(x) = 0 \leqslant e^{-x}$.
- si $x \in [0,n[$, alors $\dfrac{x}{n} \in [0,1[$. On sait que pour $t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$ (inégalité de convexité) et donc $\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \leqslant -\dfrac{x}{n}$ puis $n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \leqslant -x$ et enfin, $f_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \leqslant e^{-x}$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) \leqslant e^{-x}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, posons $g_n(x) = f_n\left(x^2\right) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x \in \left[0,\sqrt{n}\right[\\ 0 \text{ si } x \in \left[\sqrt{n},+\infty\right[\end{cases}$.

- chaque fonction g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- soit $x \in [0,+\infty[$. Pour $n > x^2$, $g_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)}$ et donc

$$g_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(-\frac{x^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x^2+o(1)}.$$

Donc, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction g sur $[0,+\infty[$ et de plus, la fonction g est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$, $g_n(x) = f_n\left(x^2\right) \leqslant e^{-x^2} = \varphi(x)$ (d'après la question précédente) où $\varphi = g$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'après 1)).

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$I = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \sqrt{n}\cos t$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\pi/2}^0 \left(1-\cos^2 t\right)^n \left(-\sqrt{n}\sin t\right) dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\,dt = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

Par suite,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

II - Séries d'intégrales

On rappelle aussi le théorème d'intégration terme à terme sur un segment qui n'est qu'une traduction du théorème 1 sur les suites de fonctions en terme de séries.

Théorème 3. (théorème d'intégration terme à terme sur un segment)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un **segment** $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f.

Alors,
- la fonction f est continue sur $[a,b]$;
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx$ converge ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) = \int_a^b f(x)\,dx$ ou encore, plus explicitement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Exercice 2.

1) Soit $x\in]-1,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x\cos t}\,dt$ en posant $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ pour $x\in]-1,1[$.

Solution 2.

1) Soit $x\in]-1,1[$. Pour tout réel $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|x\cos t|\leqslant |x|<1$ et en particulier, $1-x\cos t\neq 0$. La fonction $t\mapsto \dfrac{1}{1-x\cos t}$ est donc continue sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1-x\cos t}$ est donc intégrable sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On pose $u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ de sorte que $\cos t=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $dt=\dfrac{2du}{1+u^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x\cos t}\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{1-x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1\frac{2}{(1+x)u^2+(1-x)}\,du\\
&= \frac{2}{1+x}\int_0^1\frac{2}{u^2+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}\,du = \frac{2}{1+x}\left[\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\right)\right]_0^1\\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).
\end{aligned}$$

2) Soit $x\in]-1,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t)=(x\cos t)^n$. Pour tout réel $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $|x\cos t|\leqslant|x|<1$ et donc la série numérique de terme général $f_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$, converge. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $f\ :\ t\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(x\cos t)^n=\frac{1}{1-x\cos t}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| = |x|^n |\sin t|^n \leqslant |x|^n$ où $|x|^n$ est le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,
- la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- la série numérique de terme général $\int_0^{\pi/2} f_n(t)\, dt = W_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t}\, dt = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).\end{aligned}$$

Comme pour les suites de fonctions, si on n'est plus sur un segment, la convergence uniforme ne sert plus à rien. On dispose alors du théorème suivant, très utilisé dans la pratique. Ce théorème est admis dans le cadre du programme officiel de maths spé.

Théorème 4. (théorème d'intégration terme à terme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)|\, dx < +\infty$;

Alors,
- la fonction f est intégrable sur I ;
- la série numérique de terme général $\int_I f_n(x)\, dx$ converge ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(x)\, dx\right) = \int_I f(x)\, dx$ ou encore, plus explicitement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(x)\, dx\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Exercice 3.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

(Dans cet exercice, on supposera connu le résultat classique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!$).

Solution 3.

- Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$. f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x(1 - e^{-x})} = x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, posons $f_n(x) = x^2 e^{-(n+1)x}$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $t = (n+1)x$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n+1}\right)^2 e^{-t}\,\frac{dt}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(2)}{(n+1)^3} = \frac{2}{(n+1)^3}. \end{aligned}$$

Puisque $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3} > 0$, la série de terme général I_n converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Sinon, on dispose aussi du théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions. Dans la pratique, il est peu utilisé (contrairement au cas des suites de fonctions) et c'est le théorème 4 qui est l'outil principal dans la plupart des cas.

Théorème 5. (théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction f ;
- la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k\right| \leqslant \varphi$

(hypothèse de domination) ;

Alors,
- chaque fonction f_n est intégrable sur I ;
- la série numérique de terme général $\int_I f_n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, converge ;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx$.