Chapitre

Rappels élémentaires de cinématique

Sommaire

I Référentiel : définition

Le repérage d'un "événement" en mécanique (passage d'un mobile par ex), par exemple E_1 ou E_2 sur le schéma ci-dessous, nécessite une localisation spatiale ainsi qu'une localisation temporelle, soit 2 «espaces de mesures» nécessitant pour chacun :

- une origine
- une métrique

Exemple : le point matériel M passe aux coordonnées $\underbrace{(x_1(t), y(t), z(t))}_{\text{localisation spatiale}}$ à la date $\underbrace{t}_{\text{localisation temporelle}}$

La localisation spatiale est réalisée à l'aide d'un **repère spatial** caractéristant l'espace $3D$ défini par un ensemble de points dont les distances relatives sont invariables au cours du temps. On le dote d'une origine, généralement O, et d'une base orthonormée, par exemple la base cartésienne $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ permettant la localisation des 3 coordonnées spatiales d'un point $M(x, y, z)$ (mesurées dans une unité choisie généralement le mètre).

La localisation temporelle est réalisée par un **repère temporel** caractéristant cet espace des temps $1D$ défini par un ensemble d'horloges **toutes synchronisées entre-elles**. Comme le repère spatial, le repère temporel est doté d'une origine, et d'une norme de mesure (assortie de son unité, généralement la seconde.)

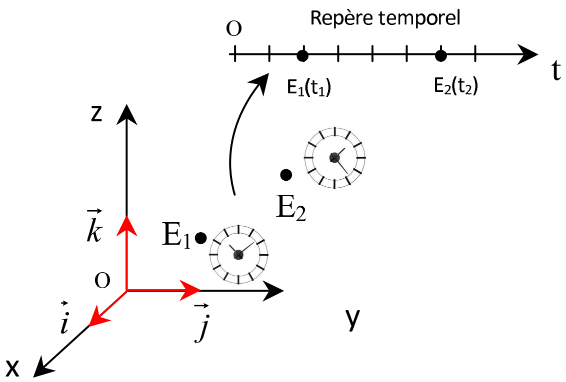

FIGURE 1 – Référentiel en physique

A RETENIR :

$$\boxed{\text{repère d'espace+repère temporel} \quad \equiv \quad \text{REFERENTIEL}}$$

REMARQUE - (I.0) - 1:

- Dans les problèmes de mécanique, on attache très souvent rigidement le repère spatial à un solide, qui de fait est appelé **solide de référence**. Ainsi, un référentiel peut être défini par un solide.
- En mécanique non relativiste, soit $\forall v << c = 3.10^8 m.s^{-1}$, le temps est considéré comme indépendant du choix de référentiel $\Longrightarrow$ **le temps non relativiste s'écoule de la même façon dans tous les référentiels.** Le paragraphe sur les lois cinématiques de changement de référentiel seront l'occasion de revenir sur cette question.

II Les systèmes de coordonnées et la cinématique du point

II.1 Position d'un point

Soit un point M de l'espace ; sa position peut être indiquée dans l'un des trois systèmes de coordonnées courants par l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

▶ COORDONNÉES CARTÉSIENNES $[O, x, y, z]$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\Rightarrow$ utile si aucune symétrie particulière

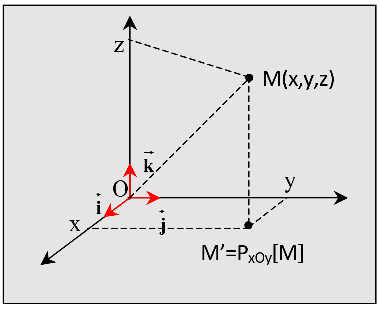

FIGURE 2 – Position d'un point M en coordonnées cartésiennes

▶ COORDONNÉES CYLINDRIQUES $[O, \rho, \theta, z]$: $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{k}$ $\Rightarrow$ utile si axe de symétrie/privilégié

▶ COORDONNÉES SPHÉRIQUES $[O, r, \theta, \varphi]$: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$ $\Rightarrow$ utile si symétrie centrale (pb ne dépendant que de $r = ||\overrightarrow{OM}||$)

▶ ABSCISSE CURVILIGNE ET BASE DE FRENET **(complément hors programme)** :

On considère un point M en déplacement sur une trajectoire $\mathcal{C}$. On appelle (x, y, z) ses coordonnées à la date t et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ à la date $t + dt$:

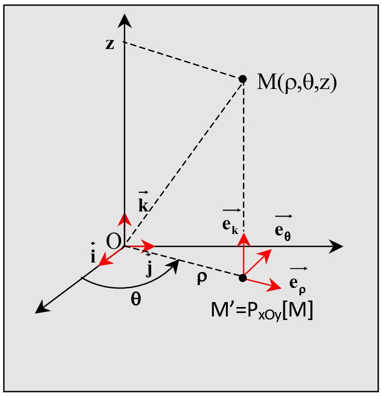

FIGURE 3 – Position d'un point M en coordonnées cylindriques

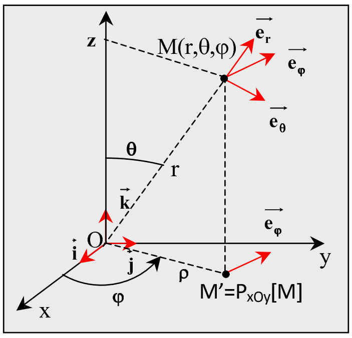

FIGURE 4 – Position d'un point M en coordonnées sphériques

DÉFINITION - (II.1) - 1:

On appelle élément d'abscisse curviligne de la trajectoire $\mathcal{C}$ la quantité ds définie par :

$$ds = |\overrightarrow{MM'}| = |\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}| = |dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Il est parfois intéressant, notamment lorsqu'un mouvement curviligne est plan d'utiliser la base locale de Frenet $(\overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_b})$ définie ainsi :

$$\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{e_t} \text{ : vecteur unitaire tangent à la trajectoire} \\ \\ \overrightarrow{e_n} \text{ : vecteur unitaire perpendiculaire à la trajectoire en M (intérieur à C)} \\ \\ \overrightarrow{e_b} \text{ : vecteur unitaire binormal direct défini par } \overrightarrow{e_b} = \overrightarrow{e_t} \wedge \overrightarrow{e_n} \end{array}\right.$$

On définit le rayon de courbure R d'une trajectoire en un point M de celle-ci par :

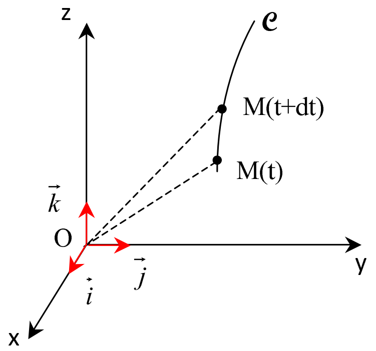

FIGURE 5 – Abscisse curviligne élémentaire

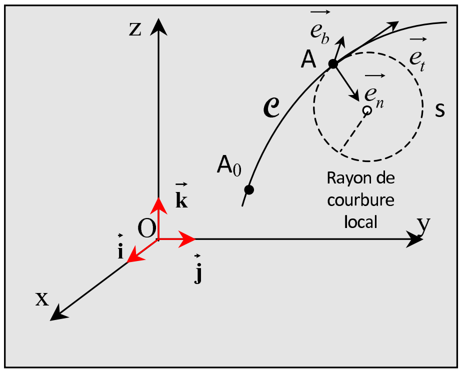

FIGURE 6 – Base locale de Frenet

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{e_t}}{ds}\right|_M = \left.\frac{\vec{e_n}}{R}\right|_M}$$ Formule de Frenet

Démonstration :

$$\vec{e_t}^2 = 1 = \vec{e_t}\cdot\vec{e_t} \quad\Longrightarrow\quad d\left(\vec{e_t}\cdot\vec{e_t}\right) = 0 = 2\vec{e_t}\cdot d\vec{e_t}$$

soit : $\vec{e_t}\cdot\vec{d}\,\vec{e_t}$

donc $d\vec{e_t} = \alpha\vec{e_n} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{d\vec{e_t}}{ds} = \dfrac{\alpha}{ds}\vec{e_n} = \left.\dfrac{\vec{e_n}}{R}\right|_M$ en posant $\dfrac{\alpha}{ds} = \dfrac{1}{R}$

Signification du rayon de courbure R :

Imaginons qu'un mobile ponctuel possède une trajectoire curviligne **plane** et que le cercle tangent en M à la trajectoire ait un rayon R_0 en M :

Un fois sur le cercle, on a a partir du point M : $\begin{cases} x = R_0\sin\theta \\ y = R_0\cos\theta \end{cases}$

L'élément d'abscisse curviligne s'écrit : $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R_0\cdot d\theta$

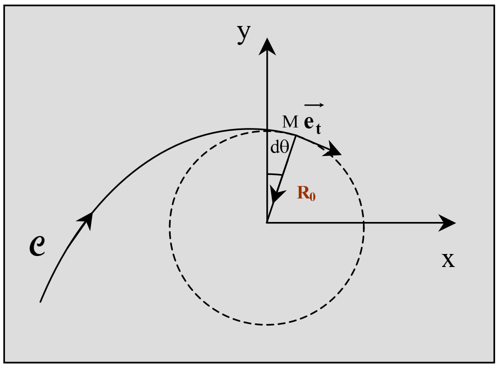

FIGURE 7 – Rayon de courbure d'une trajectoire curviligne

De plus : $d\vec{e_t} = d\left(\cos\theta \cdot \vec{e_x} + \sin\theta \cdot \vec{e_y}\right) = \left(-\sin\theta \cdot \vec{e_x} + \cos\theta \cdot \vec{e_y}\right) \implies ||d\vec{e_t}|| = d\theta$

Finalement : $\dfrac{||d\vec{e_t}||}{ds} = \dfrac{d\theta}{R_0 d\theta} = \dfrac{1}{R_0}$

En comparant ceci avec la relation définissant le rayon de courbure R, on en déduit que R s'identifie à $R_0 \implies$ le rayon de courbure est bien le rayon du cercle tangent intérieurement à la trajectoire.

REMARQUE - (II.1) - 2:

Le doublet de vecteurs locaux $(\vec{e_t}, \vec{e_n})$ définit le **plan osculateur**, plan instantané du mouvement, non nécessairement constant dans le temps.

II.2 Vitesse d'un point dans un référentiel donné

DÉFINITION - (II.2) - 2:

Le vecteur vitesse d'un point M dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ est par définition :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}} \qquad (1)$$

Ainsi, l'expression de la vitesse dans les 3 systèmes de coordonnées usuels donne :

COORDONNÉES CARTÉSIENNES :

$$\boxed{\vec{v}_{cart}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}} (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}}$$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES :

$$\boxed{\vec{v}_{cyl}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}} (\rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}) = \dot{\rho}\ \vec{e_\rho} + \rho\ \dot{\theta}\ \vec{e_\theta} + \dot{z}\ \vec{k} \quad \text{avec} \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \vec{e_\rho} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES :

$$\boxed{\vec{v}_{sph}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}} (r\vec{e_r}) = \dot{r}\ \vec{e_r} + r\ \dot{\theta}\ \vec{e_\theta} + r\cdot sin\theta\ \dot{\varphi}\ \vec{e_\varphi} \quad \text{avec} \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \vec{e_r} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi}$$

COORDONNÉES INTRINSÈQUES (BASE DE FRENET) :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = dt\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \Longrightarrow \quad \text{norme de la vitesse : } v = \frac{ds}{dt}$$

Le vecteur vitesse s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{v}_{Fren.}(M)_{/\mathcal{R}} = v\cdot\vec{e_t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{e_t}}$$

II.3 Accélération d'un point dans un référentiel donné

DÉFINITION - (II.3) - 3:

On rappelle également la définition du vecteur accélération dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{/\mathcal{R}}} \qquad (2)$$

On obtient donc dans les différents systèmes de coordonnées :

COORDONNÉES CARTÉSIENNES :

$$\vec{a}_{cart}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\ \vec{i} + \ddot{y}\ \vec{j} + \ddot{z}\ \vec{k}$$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES :

$$\vec{a}_{cyl}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\ \dot{\theta}^2\right)\vec{e_\rho} + \left(2\ \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ \ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta} + \ddot{z}\ \vec{k}$$

NB : l'établissement de l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques exige un calcul un peu plus long, et surtout une place importante pour écrire le résultat !!!

COORDONNÉES INTRINSÈQUES

$$\vec{a}_{Fren.}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d}{dt}\right|_M (v \cdot \vec{e_t}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_M v \cdot \vec{e_t} + v \cdot \underbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_M \vec{e_t}}_{=\frac{d\vec{e_t}}{ds} \times \frac{ds}{dt}} = \left.\frac{d}{dt}\right|_M v \cdot \vec{e_t} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e_n}$$

III Mouvements classiques à connaître

III.1 Mouvement rectiligne accéléré uniformément

Supposons un point M suivant une trajectoire rectiligne dans un référentiel $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne :

$$y(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta$$

- **Position :** $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} = x(t) \cdot \vec{i} + (\alpha \cdot x(t) + \beta)\vec{j}$
- **Vitesse :** $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}(t)\left(\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j}\right)$ et $v(M/\mathcal{R}) = \dot{x}\sqrt{1+\alpha^2}$
- **accélération :** $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}(t)\left(\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j}\right)$ et $a(M/\mathcal{R}) = \ddot{x}\sqrt{1+\alpha^2}$

NB :
- la caractère du mouvement, accéléré ou pas, est directement déterminé par la donnée de la fonction $x(t)$.
- Vitesse et accélération sont toujours colinéaires $\forall$ mouvement rectiligne.

III.2 Mouvement circulaire

Le point M possède cette fois une trajectoire décrivant un cercle $\Longrightarrow$ le mouvement est plan et axe privilégié donc analyse en coordonnées cylindriques réduites aux coordonnées polaires.

- **Position :** $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho_0 \cdot \vec{e_\rho}$
- **Vitesse :** $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\rho_0\dot{\theta}}_{=v} \cdot \vec{e_\theta}$
- **accélération :** $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \rho_0\ddot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} - \rho_0^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\rho}$

NB : si le mouvement est circulaire uniforme $\dot{\theta} = cste$ alors $\ddot{\theta} = 0$ et l'accélération est dite **centripète :**

$$\vec{a}_{circ.unif.}(M)_{/\mathcal{R}} = -\rho_0^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\rho}$$

III.3 Mouvement hélicoïdal

Le mouvement du point M est hélicoïdal d'axe $[Oz)$ si la projection de sa trajectoire dans le plan xOy est un cercle.

Exemple : mouvement hélicoïdal uniforme de pas h et de rayon r_0 et de pulsation ω

- **Position :** $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r_0 \sin(\omega t) \\ r_0(1-\cos(\omega t)) \\ h\omega t \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

  La trajectoire dans le plan de projection xOy est bien un cercle puisque :

$$x^2+y^2 = 2r_0^2 - 2r_0^2\cos(\omega t) = 2r_0^2(1-\cos\omega t) = 2r_0 y \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2-2r_0y = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2+(y-r_0)^2 = r_0^2 \quad \text{cercle de centre } (0, r_0) \text{ et de rayon } r_0$$

- **Vitesse :** $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} r_0\omega\cos(\omega t) \\ r_0\omega\sin(\omega t) \\ h\omega \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

- **accélération :** $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -r_0\omega^2\sin(\omega t) \\ r_0\omega^2\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

Remarque - (III.3) - 3:

Il peut être utile d'analyser ce type de mouvement en coordonnées locales intrinsèques, c'est à dire en base de Frenet. Les norme de la vitesse et de l'accélération sont :

$$v(M)_{/\mathcal{R}} = \omega\sqrt{r_0^2+h^2} \qquad \text{et} \qquad a = r_0\omega^2$$

d'où l'on tire : $\begin{cases} \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \omega\sqrt{(r_0^2+h^2)}\cdot\overrightarrow{e_t} \\ \overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\dfrac{dv}{dt}}_{=0}\overrightarrow{e_t} + r_0\omega^2\overrightarrow{e_n} = r_0\omega^2\overrightarrow{e_n} \\ R = \dfrac{v^2}{a} = \dfrac{\omega^2(r_0^2+h^2)}{r_0\omega^2} = r_0\cdot\left(1+\dfrac{h^2}{r_0^2}\right) \quad \text{(rayon de courbure)} \neq r_0!!! \end{cases}$

<u>**NB :**</u> un exemple très classique de mouvement hélicoïdal est la trajectoire d'une particule chargée en champ magnétique constant [a], sous condition de bonne orientation du vecteur vitesse initiale !

a. cf mécanique du point MPSI