

DISPOSITIF INTERFÉRENTIEL PAR DIVISION D'AMPLITUDE : EXEMPLE DE L'INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

Sommaire

I	Généralités	2
I.1	Présentation globale de l'appareil	2
I.2	La séparation d'onde : lame séparatrice et lame compensatrice	3
I.3	Première approche : Michelson éclairé par un point source S_0	5
	a - Marche des rayons dans l'appareil	5
	b - Lame d'air ou "pseudo-lame d'air" équivalente	6
II	Interféromètre de Michelson en lame d'air éclairé par une source étendue . . .	7
II.1	Le problème de la localisation des franges	7
	a - Approche graphique	7
	b - Approche par le calcul (hors programme)	8
II.2	Différence de marche -intensité - franges d'Haidinger ou d'"égale inclinaison" (à retenir!!!)	9
II.3	Ordre d'interférences - défilement des anneaux - rayons des anneaux brillants	11
II.4	Applications	12
	a - Détermination de la largeur spectrale d'une raie	12
	b - Résolution du doublet du sodium	13
	c - La spectroscopie par transformée de Fourier (utile pour le TP consacré à l'interféromètre de Michelson)	14
III	Interféromètre de Michelson en coin d'air éclairé par une source étendue . . .	16
III.1	Retour sur le montage équivalent - Localisation des franges (admis)	16
III.2	Différence de marche et ordre d'interférences - franges de Fizeau ou d'"égale épaisseur"	17
III.3	Interfrange	19
III.4	Interférences en lumière blanche - teintes de Newton - blanc d'ordre supérieur	19

III.5 Applications	20
a - Visualisation d'un écoulement gazeux (objet de phase)	20
b - Mesure de distance : épaisseur d'une lame de verre	20
c - Spectre cannelé (à faire en TP)	21

I Généralités

I.1 Présentation globale de l'appareil

L'interféromètre de Michelson est un dispositif interférentiel à division d'amplitude \implies il exploite une lame séparatrice qui divise un faisceau entrant dans l'appareil en deux faisceaux de même intensité.

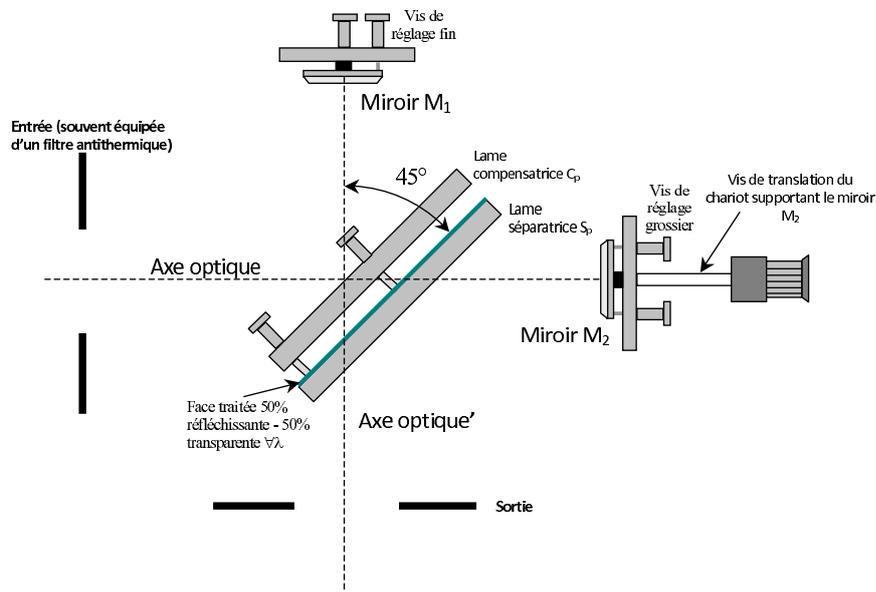


FIGURE VIII.1 – Les différents organes d'un interféromètre de Michelson

À RETENIR :

- ▶ M_1 miroir fixe (réglage fin uniquement).
- ▶ M_2 miroir orientable (réglage grossier) et translatable (précision à $10\mu m$), fixé sur un chariot mobile dont la position est repérée par un vernier. Précision : $\frac{1}{100^{eme}} mm = 10\mu m$.
- ▶ Précision d'usinage de la surface des miroirs $\sim \frac{\lambda}{20}$ maxi pour une précision d' $\frac{1}{10}$ de frange. (cf plus bas pour explication)
- ▶ Ensemble séparatrice/compensatrice incliné à 45^0 par rapport à l'axe optique : il s'agit de deux lames de matériau transparent (verre en général) mais la lame séparatrice comporte une face semi-métallisée permettant une réflexion et une transmission équitable de l'intensité lumineuse

SCHEMA SIMPLIFIE :

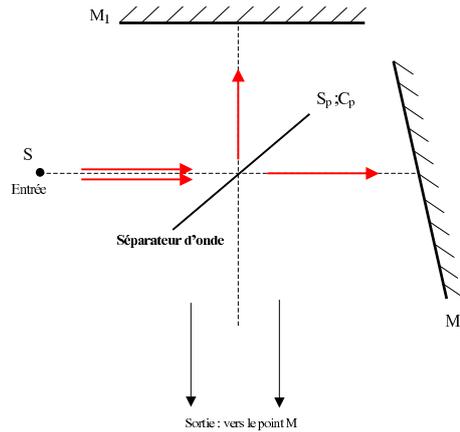


FIGURE VIII.2 – Schéma interféromètre de Michelson simplifié

I.2 La séparation d'onde : lame séparatrice et lame compensatrice

La division d'onde est ici réalisée par la lame séparatrice dont la face en regard de la compensatrice est métallisée pour assurer une séparation d'intensité 50% – 50% entre les faisceaux transmis et réfléchis. Le trajet des rayons dans le séparateur d'onde est le suivant :

$$\begin{cases} \text{rayon 1 : } I_0 \xrightarrow{\text{séparatr.}} \frac{I_0}{2} \xrightarrow{\text{réflex. } M_1} \frac{I_0}{2} \xrightarrow{\text{séparatr.}} \frac{I_0}{4} \\ \text{rayon 2 : } I_0 \xrightarrow{\text{séparatr.}} \frac{I_0}{2} \xrightarrow{\text{réflex. } M_2} \frac{I_0}{2} \xrightarrow{\text{séparatr.}} \frac{I_0}{4} \end{cases}$$

Les rayons émergents sont donc d'intensité identique $\frac{I_0}{4}$, remplissant ainsi l'une des conditions de bon contraste si on les fait interférer¹.

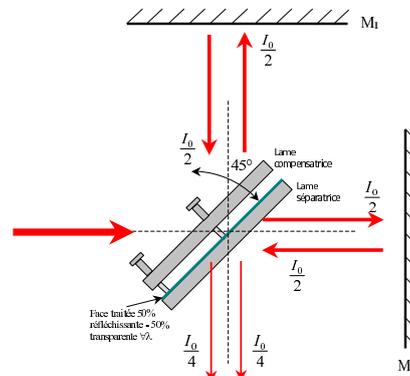


FIGURE VIII.3 – Evolution de l'intensité des rayons séparés

NÉCESSITÉ D'UNE LAME COMPENSATRICE :

Examinons le chemin optique des rayons traversant la lame et subissant la "séparation" :

► AVEC LA LAME SÉPARATRICE SEULE : (n, e)

$$\text{rayon1 : } \delta''$$

$$\text{rayon2 : } \delta' + \delta'' + \delta''$$

On constate que la séparation d'onde par la séparatrice engendre une différence de chemin optique :

$$\Delta_{2/1}\delta = \delta' + \delta''$$

1. cf chapitre **Superposition ondes lumineuses**

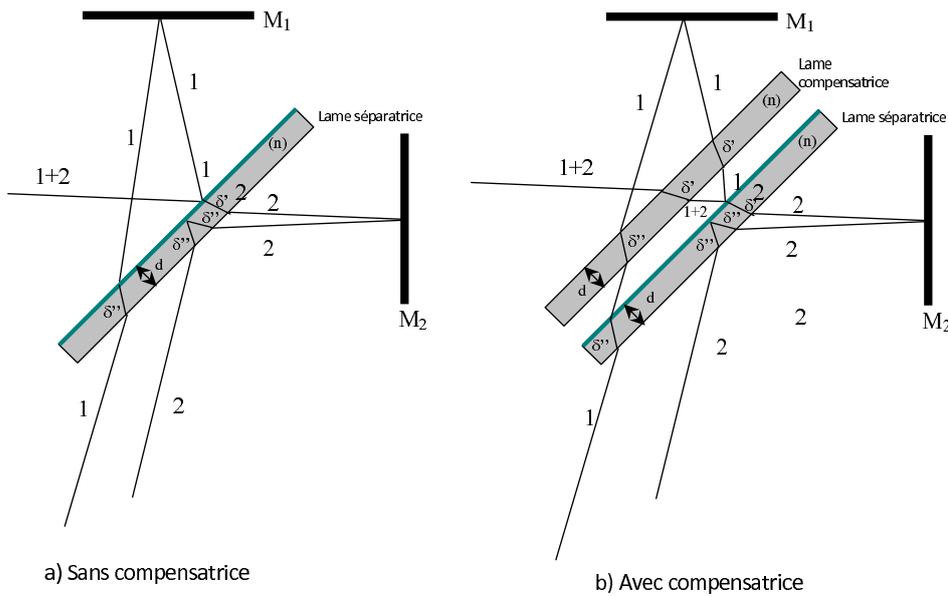


FIGURE VIII.4 – Trajet des rayons 1 et 2 sans et avec compensatrice

entre les rayons 1 et 2. Par ailleurs, le chemin optique dans la lame est dépendant de l'inclinaison des rayons (à montrer brièvement).

► AVEC UNE LAME DITE COMPENSATRICE : (n, e)

Idée : on ajoute une lame **compensatrice** (n, e) parallèle à la lame séparatrice ; les chemins optiques des deux rayons à travers les lames deviennent :

$$\text{rayon}_1 : \delta' + \delta' + \delta'' + \delta''$$

$$\text{rayon}_2 : \delta' + \delta' + \delta'' + \delta''$$

soit une différence de chemins optiques :

$$\Delta_{2/1}\delta = 0$$

A RETENIR : la compensatrice permet d'éviter une modification de la différence de chemin optique entre les rayons 1 et 2 lors de la séparation d'onde quelque soit l'angle d'incidence sur le séparateur d'onde.

REMARQUE - (I.2) - 1:

La compensatrice est efficace : $\left[\begin{array}{l} \forall \text{ inclinaison des rayons incidents} \\ \forall \lambda \end{array} \right.$

I.3 Première approche : Michelson éclairé par un point source S_0

a - Marche des rayons dans l'appareil

Supposons une source S_0 émettant de manière isotrope, et examinons la marche de deux rayons lumineux issus de cette source et se croisant en M provoquant une éventuelle interférence en M :

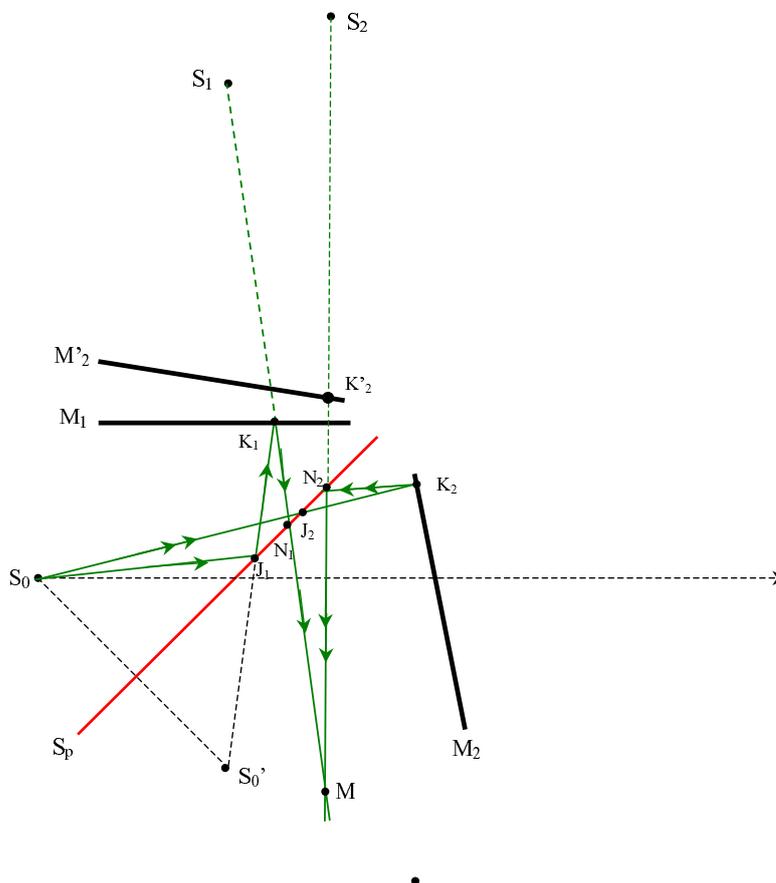


FIGURE VIII.5 – Marche de deux rayons lumineux dans l'interféromètre et interférant en M

A RETENIR : lors de la réflexion d'une onde lumineuse sur un milieu plus réfringent que son milieu de provenance, l'onde subit un déphasage de π , soit une différence de marche supplémentaire de $\frac{\lambda}{2}$.

$$\text{On appelle : } \begin{cases} M'_2 = \text{sym}(M_1)_{/S_p} \\ S'_0 = \text{sym}(S)_{/S_p} \\ K'_2 = \text{sym}(K_2)_{/S_p} \end{cases}$$

Considérons 2 rayons 1 et 2 issus de la source ponctuelle S_0 , et calculons les chemins optiques respectifs de ces rayons entre la source S_0 et le point M position sur laquelle ils interfèrent :

- ◇ RAYON 1 : $(S_0\widehat{M})_1 = S_0J_1 + J_1K_1 + K_1N_1 + N_1M = S'_0J_1 + J_1K_1 + K_1N_1 + N_1M = S'_0K_1 + K_1 = S_1M$
- ◇ RAYON 2 : $(S_0\widehat{M})_2 = S_0J_2 + J_2K_2 + K_2N_2 + N_2M = S'_0J_2 + J_2K_2 + K_2N_2 + N_2M = S'_0K'_2 + K'_2M = S_2M$

BILAN :

- RAYON 1 : $(\widehat{S_0M})_1$ est identique au chemin de S'_0 à M par réflexion sur M_1 et donc au chemin $(\widehat{S_1M})$
- RAYON 2 : $(\widehat{S_0M})_2$ est identique au chemin de S'_0 à M par réflexion sur M'_2 et donc au chemin $(\widehat{S_2M})$

Les rayons ❶ et ❷, semblent provenir des sources virtuelles S_1 et S_2 images respectives de S' par les miroirs M_1 et $M'_2 \implies$

$$\delta(M) = S_2M - S_1M$$

CONCLUSION : le Michelson éclairé par une source ponctuelle est donc équivalent à un interféromètre d'Young de sources cohérentes S_1 et S_2 .

b - lame d'air ou "pseudo-lame d'air" équivalente

On peut ainsi simplifier le schéma précédent en ne représentant que la source virtuelle S'_0 et l'image M'_2 du miroir $M_2 \implies$ on introduit les sources virtuelles S_1 et S_2 .

A RETENIR :

CONCLUSION : M_1 et M'_2 forment une pseudo lame d'air.

Conséquences : 3 configurations possibles

en agissant sur la position et l'angle du miroir M_2 on peut modifier la position de la source S'_2 , et modifier la géométrie de la pseudo-lame d'air.

On appelle $\alpha = (M_1, M'_2)$ l'angle formé par ces deux miroirs.

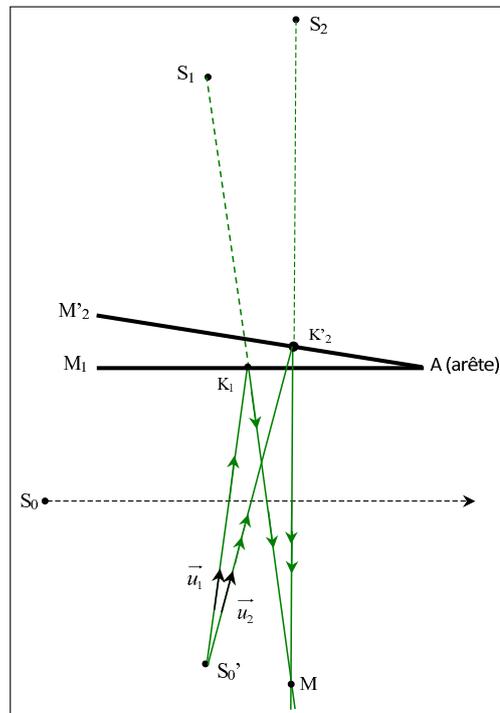


FIGURE VIII.6 – Pseudo-lame d'air équivalente à l'interféromètre de Michelson

- Réglage en coin d'air (pseudo-lame d'air) : $\alpha \neq 0$
- Réglage rigoureusement en lame d'air :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ d_{\perp}(M_1M'_2) = e \neq 0 \end{cases}$$

- Réglage au contact optique : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ d_{\perp}(M_1M'_2) = 0 \end{cases}$

II Interféromètre de Michelson en lame d'air éclairé par une source étendue

II.1 Le problème de la localisation des franges

a - Approche graphique

IDÉE : on étend spatialement la source pour augmenter la luminosité donc le confort d'observation.

On suppose maintenant que la source n'est plus ponctuelle, mais étendue. On gagne ainsi en luminosité mais l'on doit contrôler que l'ordre au point M reste quasi-stationnaire quelque soit le point de la source (rappel : critère semi-quantitatif de bon contraste)²

Prenons par exemple un second point T_0 d'image T'_0 par rapport à la séparatrice S_p , donnant finalement deux sources secondaires T_1 et T_2 .

En prenant un point M quelconque, mais assez proche de l'interféromètre, on constate visuellement que :

$$\delta_S(M) = S_2\widehat{M} - S_1\widehat{M} \neq \delta_T(M) = T_2\widehat{M} - T_1\widehat{M}$$

soit

$$p_S(M) \neq p_T(M)$$

Ainsi, l'ordre n'est pas stationnaire lorsque l'on fait varier le point de la source. **Chaque point source donnant son propre système d'interférence, on doit naturellement s'attendre à un brouillage des franges.**

L'intensité globale en un point M correspond donc à la somme des intensités données par chaque point M avec une différence de marche dépendant du choix du point source, soit :

$$I(M) = \int_{\text{points sources}} 2I_{0S} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(\underbrace{\mathbf{S}}_{\text{lié à la source}}, M) \right) \right] \cdot d\sigma(S)$$

QUESTION : existe-t-il une ou des zones particulières de l'espace pour lesquelles la différence de marche en M et donc l'ordre en M est indépendant(e) du point de la source ?

RÉPONSE PAR APPROCHE GRAPHIQUE : En éloignant le point M on constate "visuellement" que :

2. cf. chapitre trous d'Young : $|\Delta p| < \frac{1}{2}$ sur la moitié de l'étendue spatiale de la source

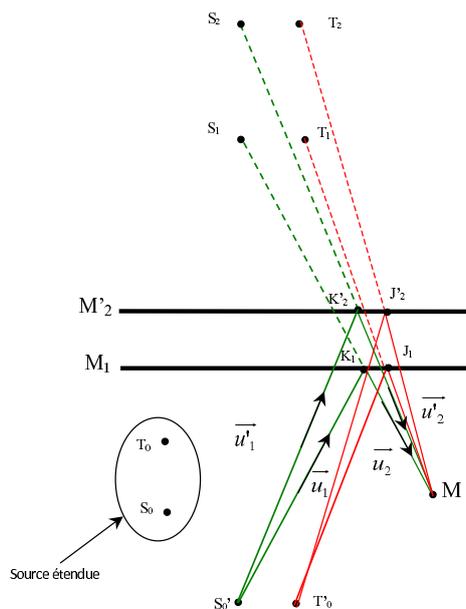


FIGURE VIII.7 – La différence de marche et donc l'ordre en M dépend du point source

$$\delta_S(M) = S_2M - S_1M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \delta_T(M) = T_2M - T_1M$$

Cas idéal : M à l'infini \implies on utilise une lentille convergente et on observe M dans son plan focal image :

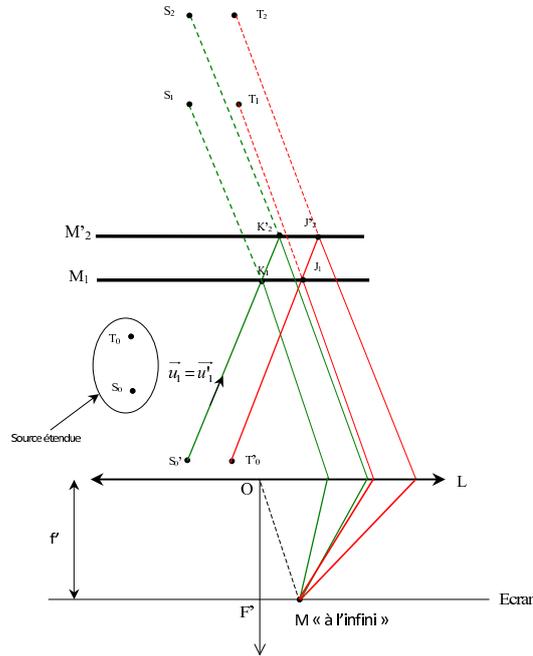


FIGURE VIII.8 – Localisation à l'infini des franges de la lame d'air

CONCLUSION : la différence de marche (et donc l'ordre) en M est indépendante du point source si M est à l'infini.

b - Approche par le calcul (hors programme)

Pour assurer que tous les systèmes d'interférences donnés par tous les points $S'_0, T'_0 \dots$ de la source primaire étendue se superposent "en coïncidence" en M (on évite ainsi les brouillages), il suffit de rendre la différence de marche $\delta(S'_0, M)$ indépendante du point source courant S'_0 .

NB : on reprend la figure n°7 et on pose $n = 1$.

Il faut donc :

$$\delta(S'_0M) = (S'_0M)_{R'} - (S'_0M)_R$$

avec ($n = 1$ pour simplifier) $(S'_0M)_R = S'_0K_1 + K_1M = \overrightarrow{S'_0K_1} \cdot \vec{u}_1 + \overrightarrow{K_1M} \cdot \vec{u}_2$

or le principe de Fermat³ prévoit que pour S'_0 et M donné, la position du point K_1 est telle que $S'_0K_1 + K_1M$ minimum, donc par différenciation par rapport à K_1 :

$$\overrightarrow{dK_1} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 0$$

3. cf cours optique géométrique

Différencions maintenant $(S'_0M)_R$ par rapport à S'_0 , le point K_1 variant comme le prévoit le principe de Fermat pour minimiser le chemin optique :

$$d(S'_0M)_R = -\overrightarrow{dS'_0} \cdot \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{S'_0K_1} \cdot \overrightarrow{du_1} + \underbrace{\overrightarrow{dK_1} \cdot (\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})}_{=0} + \overrightarrow{K_1M} \cdot \overrightarrow{du_2}$$

or $\overrightarrow{u_1}^2 = 1 \implies \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{du_1} = 0$ et comme $\overrightarrow{S'_0K_1} \parallel \overrightarrow{u_1}$, on a $\overrightarrow{S'_0K_1} \cdot \overrightarrow{du_1} = 0$:
De même on a $\overrightarrow{K_1M} \cdot \overrightarrow{du_2} = 0$.

Ainsi, il vient : $d_{S'_0}(S'_0M)_R = -\overrightarrow{dS'_0} \cdot \overrightarrow{u_1}$

De même, on montre que : $d(S'_0M)_{R'} = -\overrightarrow{dS'_0} \cdot \overrightarrow{u_1}$

Finalement :

$$d[(S'_0M)_{R'} - (S'_0M)_R] = d\delta \Leftrightarrow d(\delta(S'_0M)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{dS'_0} \cdot (\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_1}) = 0}$$

Pour annuler cette variation élémentaire de différence de marche (premier ordre), il faut donc assurer :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_1} \implies M \text{ à l'infini}}$$

dans ces conditions tous les points de la source contribuent au même phénomène d'interférences en M puisque la différence de marche en M est invariante par changement de point source ; la luminosité est ainsi accrue et aucun brouillage d'interférences n'est à craindre.

II.2 Différence de marche -intensité - franges d'Haidinger ou d'"égale inclinaison" (à retenir!!!)

Le calcul de la différence de marche entre les rayons ❶ et ❷ est aisé en observant simplement le trajet des rayons dans la lame d'air. La figure 9 permet ce calcul facilement.

QUESTIONS:

- ❶ Ecrire la différence de marche $\delta(M)$ au point M entre les deux rayons ❶ et ❷ en nommant simplement les points mentionnés sur le dessin.
- ❷ En déduire que :

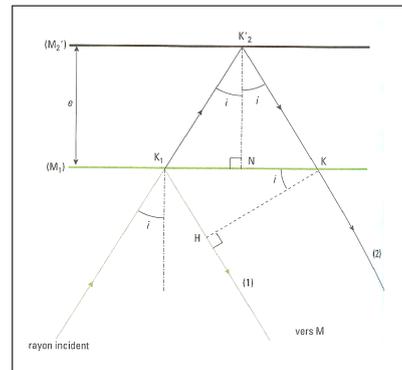


FIGURE VIII.9 – Visualisation de la différence de marche

$$\delta(M) = 2e \cos(i)$$

A RETENIR :

PROPRIÉTÉ - (II.2) - 1:

- En configuration lame d'air d'épaisseur e , la différence de marche en M_∞ entre deux rayons séparés dans le Michelson s'écrit :

$$\delta(M_\infty) = 2e \cos i$$

l'incidence i , ou "inclinaison" identifiant un seul point M à l'infini (cf figure ci-dessous).

- L'intensité lumineuse en M s'écrit donc (à l'aide de la formule de Fresnel) :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e \cos i}{\lambda} \right) \right]$$

Les zones d'interférences lumineuses obtenues sont donc le lieu géométrique pour lequel $i = \text{cste}$, c'est à dire des anneaux d'axe l'axe optique de la lentille de projection, ou franges d'égale inclinaison ou encore anneaux d'Haidinger.

- Pour obtenir de nombreux anneaux, il faudra donc éclairer l'interféromètre sous de multiples incidences i , c'est à dire avec un faisceau de lumière entrant convergent .

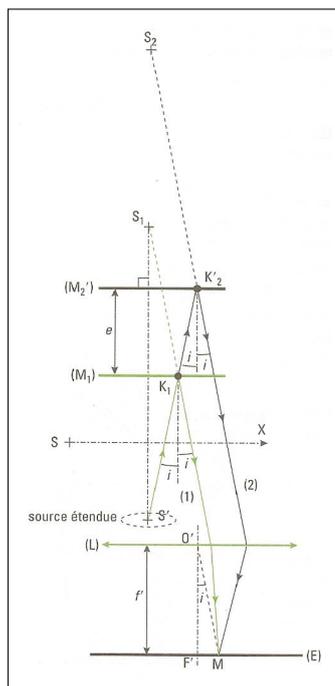


FIGURE VIII.10 – Montage équivalent en lame d'air avec projection à distance finie

IMPORTANT : on retiendra pour les TP qu'en configuration lame d'air du Michelson :

- on éclaire l'appareil avec un faisceau convergent sur les miroirs
- on observe les interférences localisées à l'infini dans le plan focal image d'une lentille convergente.

Le montage que nous adopterons est le suivant :

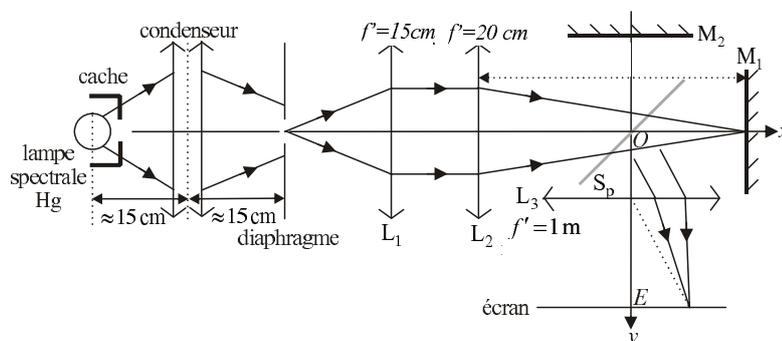


FIGURE VIII.11 – Montage pour l'observation des franges d'égal inclinaison par le Michelson

II.3 Ordre d'interférences - défilement des anneaux - rayons des anneaux brillants

QUESTIONS:

- 1 Donner l'expression de l'ordre d'interférences au point M sur l'écran.
- 2 Si l'on diminue l'épaisseur de la lame d'air e en rapprochant les miroirs, expliquer comment évolue la figure d'interférences pendant cette manipulation.
- 3 De quelle épaisseur faut-il faire varier la lame d'air pour que le centre de la figure ($i=0$) passe d'un ordre lumineux à l'ordre lumineux suivant. Que vous inspire ce constat ?

DÉFILEMENT DES ANNEAUX → CF SIMULATION

ETUDE DU RAYON DES ANNEAUX BRILLANTS : (CF FIGURE 10)

Pour obtenir des figures d'interférences de géométrie convenable, la lentille de projection doit être utilisée dans les conditions de Gauss, autrement dit l'angle i doit rester faible. En général, la lentille utilisée possède une distance focale importante (de l'ordre de 50 cm à 1 m).

L'ordre d'interférences au point M est :

$$p(M) = \frac{2e}{\lambda} \cos i \simeq \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2} \right)$$

En outre, l'ordre au centre de la figure d'interférences pour (soit pour $i = 0$) s'écrit :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} \quad (\text{le + élevé})$$

ce qui permet d'écrire en posant i_p le rayon angulaire de l'anneau d'ordre $p(M) \in \mathbb{N}$

$$p(M) = p_0 - \frac{p_0 i_p^2}{2} \in \mathbb{N}$$

soit :

$$i_p = \sqrt{\frac{2(p_0 - p(M))}{p_0}}$$

En outre, le rayon de l'anneau s'écrivant en approximant l'angle i à sa tangente :

$$r_p = f' i_p$$

on a :

$$r_p = f' \sqrt{\frac{2(p_0 - p(M))}{p_0}}$$

NB : compte tenu de l'évolution non linéaire du rayon des franges brillantes, on ne peut définir d'interfrange.

QUESTIONS:

- 1 En supposant que l'ordre au centre de la figure d'interférences est un entier ou un demi-entier (on précisera à quel état d'interférences correspondent ces deux situations), montrer que l'expression du rayon du $K^{\text{ième}}$ anneau de même état que le centre (brillant ou sombre) est :

$$r_K = f' \sqrt{\frac{K\lambda}{e}} \tag{VIII.1}$$

- 2 EXEMPLE D'APPLICATION :

Sur une figure d'interférences, le rayon du 3^{ième} anneau est mesuré à $r_3 = 4,5 \text{ cm}$. Sachant que la lampe utilisée est une lampe au mercure dont on a isolé la raie verte à $\lambda = 560 \text{ nm}$, déterminer l'ordre au centre ainsi que l'épaisseur de la lame⁴.

II.4 Applications

a - Détermination de la largeur spectrale d'une raie

QUESTION : comment déterminer un ordre de grandeur de la largeur spectrale d'une raie. Par exemple la raie verte $\lambda = 546,1 \text{ nm}$ d'une lampe à vapeur de mercure.

Rappel : pour une raie large de largeur spectrale en longueur d'onde $\Delta\lambda$, nous avons modélisé son profil par une raie rectangulaire et montré dans ce cas⁵ que l'in-

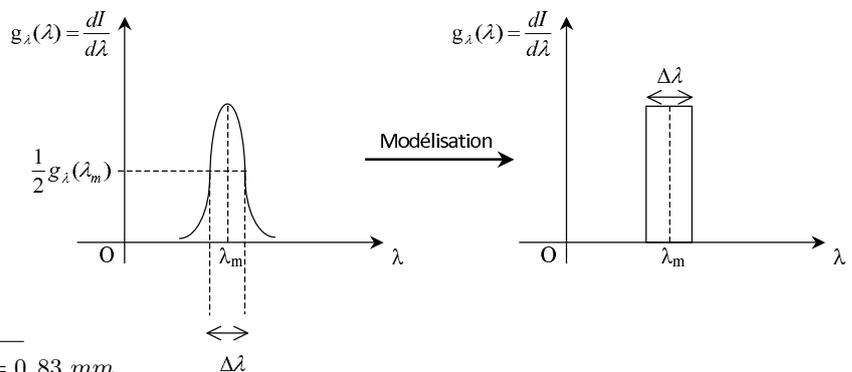


FIGURE VIII.12 – Modélisation d'une raie large

4. Réponse : $p_0 = 2 \frac{K f'^2}{r_K^2} = 2962$ et $e = p_0 \frac{\lambda}{2} = 0,83 \text{ mm}$

5. cf chapitre DFO : Trous d'Young

tensité en un point M s'écrivait :

$$I(\delta) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta \right) \times \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_m} \delta \right) \right]$$

NB : le séparateur d'onde divisant ici l'intensité par 4, il vient pour l'interféromètre de Michelson en particulier :

$$I(\delta) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \underbrace{\operatorname{sinc} \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta \right)}_{V(\delta)} \times \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_m} \delta \right) \right]$$

Le facteur de visibilité $V(\delta)$ est d'annulation périodique en δ et évanescent \implies on peut déterminer facilement $\Delta\lambda$ en repérant la première annulation de contraste ($C = |V|$) en faisant varier δ .

PRINCIPE DE LA MESURE :

On part du contact optique ($\delta = 0$), et on fait évoluer δ en "chariotant". La première annulation de contraste se produit pour :

$$\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta_{ann} = \pi \implies \Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{\delta_{ann}}$$

En général, on réalise une observation de l'annulation de contraste "au centre" ($i=0$), donc $\delta(M_{centre}) = 2e$; on a donc finalement en posant e_{annu} l'épaisseur de lame d'air pour laquelle on a annulation de contraste :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{2e_{ann}}$$

Expérimentalement : la largeur spectrale en longueur d'onde d'une raie dépend étroitement de la pression du gaz de la lampe. Cette mesure sera réalisée en TP.

b - Résolution du doublet du sodium

On cherche à déterminer l'écart en longueur d'onde $\Delta\lambda$ du doublet jaune d'une lampe au sodium $\begin{cases} \lambda_1 = 589 \text{ nm} \\ \lambda_2 = 589,6 \text{ nm} \end{cases}$.

Rappel : pour une source constitué d'un doublet incohérent (λ_1, λ_2) nous avons montré⁶ que l'intensité s'écrivait :

$$I(\delta(M)) = 4I_0 \left[1 + \underbrace{\cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta(M) \right)}_{V(\delta)} \times \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_m} \delta(M) \right) \right]$$

Le facteur de visibilité $V(\delta)$ est périodique en $\delta \implies$ on peut déterminer $\Delta\lambda$ en repérant par exemple deux annulations successives du contraste ($C = |V|$) en faisant varier δ .

6. cf chapitre DFO : Trous d'Young

PRINCIPE DE LA MESURE :

On part du contact optique ($\delta = 0$) et on fait évoluer la différence de marche $\delta(M)$, et l'on note les valeurs de celle-ci pour lesquelles il y a annulation du contraste ($C=0$) :

$$\delta_{ann.}(M) = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$

entre deux annulations $\Delta\delta(M) = \delta_{ann_{p+1}} - \delta_{ann_p} = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$

soit :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\delta(M)}$$

Là-encore on réalise une observation de l'annulation de contraste "au centre" ($i=0$), donc $\delta(M_{centre}) = 2e$; on a donc finalement en posant $\Delta e = e_{p+1} - e_p$ (e_p et e_{p+1} étant les épaisseurs de lame d'air pour lesquelles on a annulation de contraste.)

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\Delta e}$$

Expérimentalement : $\Delta e \simeq 0.29 \text{ mm} \implies \Delta\lambda \simeq 0.6 \text{ nm}$.

NB : cette mesure, impossible à mener avec l'interféromètre d'Young pour diverses raisons (diffraction, faible nombre de franges visibles) sera effectuée en TP à l'aide de l'interféromètre de Michelson.

c - La spectroscopie par transformée de Fourier (utile pour le TP consacré à l'interféromètre de Michelson)

L'une des applications de l'interférométrie est la spectroscopie interférométrique par transformée de Fourier, dont l'objet est la détermination des profils spectraux de sources à partir d'enregistrement d'interférogrammes. L'interféromètre de Michelson est particulièrement adapté à ce type de mesures, et a notamment permis d'obtenir d'excellents résultats en terme de précision dans le domaine des grandes longueurs d'onde⁷.

Nos exigences en TP étant bien plus modestes que celles habituellement requises dans les travaux de recherche, nous pourrions envisager l'exploitation de cette technique dans le domaine du visible afin d'obtenir **l'allure spectrale d'une source**.

LE PRINCIPE GÉNÉRAL EST LE SUIVANT :

Considérons une source polychromatique de profil spectral $g(\sigma) = \frac{dI_0}{d\sigma}$ éclairant un interféromètre à deux ondes. L'intensité lumineuse au centre du système d'anneaux pour lequel la différence de marche est $\delta = 2e$ s'écrit en sommant les intensités de toutes les bandes spectrales de la source :

$$I(\delta) = \int_{source} 2 \cdot \frac{dI_0}{4} [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\sigma) [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] \cdot d\sigma$$

7. Spectroscopie infrarouge par transformée de Fourier

soit :

$$I(\delta) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(\sigma) \cdot d\sigma}_{=I_0} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma$$

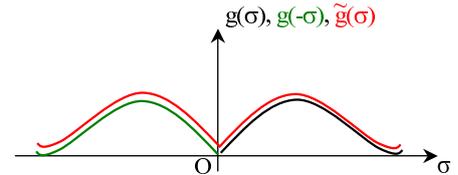
qui devient :

$$I(\delta) - \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma$$

"Astuce" : on introduit la fonction paire $\tilde{g}(\sigma)$ telle que :

$$\tilde{g}(\sigma) = \frac{1}{2} [g(\sigma) + g(-\sigma)] \text{ i.e. on symétrise } g(\sigma)$$

Puisque $g(\sigma) = 0 \forall \sigma < 0$, on peut écrire :



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 g(-\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma = \int_0^{+\infty} g(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma$$

donc finalement :

$$\begin{aligned} I(\delta) - \frac{I_0}{2} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma + \underbrace{j \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \sin(2\pi\sigma\delta) \cdot d\sigma}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{j2\pi\sigma\delta} \cdot d\sigma}_{\sim TF^{-1}[\tilde{g}(\sigma)]} \quad (\text{VIII.2}) \end{aligned}$$

On reconnaît une expression proportionnelle à la transformée de Fourier inverse de la distribution spectrale paire $\tilde{g}(\sigma)$ de la source⁸. Ainsi, l'interféromètre réalise, au terme constant $I_0/2$ près, la TF^{-1} du profil spectral de source.

On récupère la fonction $\tilde{g}(\sigma)$ en procédant à la transformée de Fourier, avec :

$$\tilde{g}(\sigma) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} (I[\delta] - \frac{I_0}{2}) \cdot e^{-2j\pi\sigma\delta} \cdot d\delta$$

8. La transformée de Fourier, ainsi que son opération inverse comporte chacune le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ qui assure leur "symétrie" cf chap. électrocinétique

NB : les variables σ et δ sont dites conjuguées (analogie en électrocinétique pour les variables t et ν)

MISE EN OEUVRE :

- enregistrement informatique de I_0 (source seule) avec capteur sur l'axe optique.
- enregistrement informatique de $I[\delta]$ en faisant varier $\delta = 2e = 2Vt$, e étant l'épaisseur de la lame et V la vitesse de déplacement du chariot (source éclairant l'interféromètre \Rightarrow interférogramme).
- Calcul numérique et tracé de $\tilde{g}(\sigma) \simeq TF \left[I[\delta(M)] - \frac{I_0}{2} \right]$.

NB : cf polycop pour quelques correspondances classiques spectre \leftrightarrow interférogramme

III Interféromètre de Michelson en coin d'air éclairé par une source étendue

III.1 Retour sur le montage équivalent - Localisation des franges (admis)

HYPOTHÈSE : on éclaire le Michelson sous une seule incidence i .

Le montage équivalent du coin d'air est le suivant :

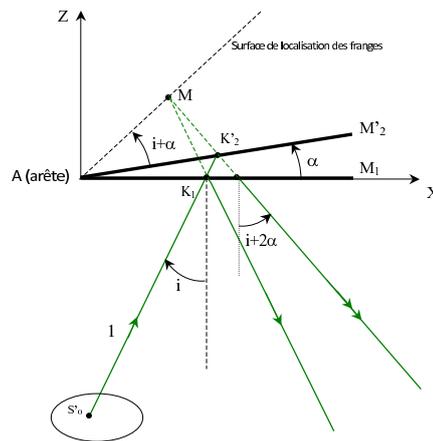


FIGURE VIII.13 – Localisation des franges du coin d'air

Le rayon initial est séparé en 2 rayons, l'un se réfléchissant sur M_1 , l'autre sur M_2' . La réunion de ces deux rayons se fait en M zone d'interférences (virtuelle).

On montre (démonstration hors programme), que la zone de localisation des interférences, i.e. **zone pour laquelle l'ordre d'interférence en un point fixe M est quasi-indépendant du point source**, est le plan d'équation :

$$Z = X \cdot \tan(i + \alpha)$$

si l'on considère des rayons dans le plan de la figure uniquement.

Dans la mesure où les angles sont très faibles : $\begin{cases} \alpha \simeq 0 \text{ (ordre de grandeur : qqes minutes d'angle!)} \\ i \simeq 0 \end{cases}$, on considère que la zone de localisation est le quasi-plan du coin d'air :

$$Z = 0$$

A RETENIR : dans le cas de l'observation des franges du coin d'air :

- On éclaire l'interféromètre avec un faisceau de lumière quasi-parallèle $i \simeq 0$
- Les interférences sont alors localisées sur la surface des miroirs (surface du coin d'air)

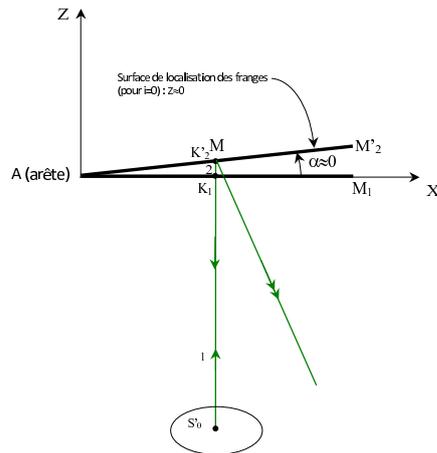
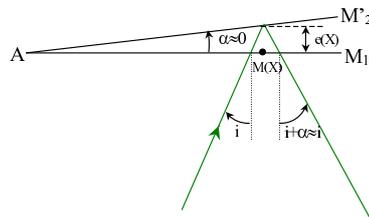


FIGURE VIII.14 – Localisation des franges du coin d'air en incidence normale $i = 0$

III.2 Différence de marche et ordre d'interférences - franges de Fizeau ou d'"égale épaisseur"

IDÉE : dans la mesure où l'angle du coin d'air est très faible, on peut assimiler localement en $M(X)$ ce dernier à une lame d'air d'épaisseur $e(X)$; la différence de marche en ce point est donc :



$$\delta[M(X)] \simeq 2e(X)/\cos(i) \stackrel{i \simeq 0}{\simeq} 2e(X) = 2X \cdot \tan(\alpha) \simeq 2X \cdot \alpha$$

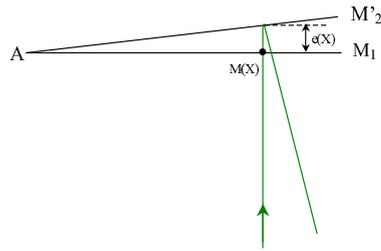


FIGURE VIII.15 – Epaisseur du coin d'air

PROPRIÉTÉ - (III.2) - 2:

- En configuration coin d'air d'angle α , la différence de marche en M_{coin} entre deux rayons séparés par le diviseur d'onde est :

$$\delta[M(X)] \simeq 2X \cdot \alpha$$

- L'intensité lumineuse en $M(X)$ est donc : $I(X) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} \alpha X \right) \right]$
- Les zones d'égale intensité sont donc les droites $X = cste$, c'est à dire des droites parallèles à l'arête du coin d'air.
- Pour obtenir ces franges convenablement contrastées, il faut éclairer l'interféromètre avec un faisceau de lumière quasi-parallèle $i \simeq 0$ et observer la surface du coin.

NB : la frange d'ordre $p = 0$ est sur l'arête du coin d'air.

IMPORTANT : on retiendra pour les TP qu'en configuration coin d'air du Michelson :

- on éclaire l'appareil avec un faisceau quasi-parallèle sur les miroirs
- on observe les interférences localisées sur le coin d'air en projetant ce dernier sur l'écran à l'aide d'une lentille convergente.

Le montage que nous adopterons est le suivant :

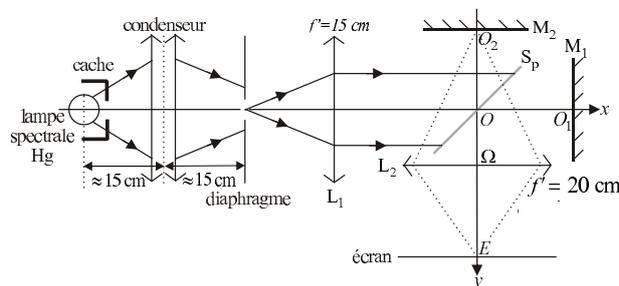


FIGURE VIII.16 – Montage pour l'observation des franges d'égale du coin d'air

III.3 Interfrange

Le calcul de l'interfrange est immédiat ; la condition d'interférence constructives est :

$$\Delta p = 1 \Rightarrow \Delta(\delta_m) = \Delta(2\alpha X) = \lambda \Rightarrow 2\alpha \underbrace{\Delta X}_{=i} = \lambda$$

soit un interfrange de :

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Ainsi, les franges sont équidistantes et sont appelées : **franges d'égale épaisseur ou franges de Fizeau.**

REMARQUE - (III.3) - 2:

Nous verrons en TP que la configuration lame d'air s'obtient après un premier réglage du Michelson en configuration coin d'air. Le passage coin d'air → lame d'air s'opère simplement en agissant sur les vis de réglage grossier dans le sens d'une augmentation de l'interfrange puisqu'alors $\alpha \rightarrow 0$.

III.4 Interférences en lumière blanche - teintes de Newton - blanc d'ordre supérieur

HYPOTHÈSES : Michelson configuré en coin d'air et éclairé en lumière blanche.

OBSERVATION : $i = \frac{\lambda}{2\alpha} = f(\lambda) \Rightarrow$ on observe à proximité de l'arête du coin d'air une frange achromatique commune à toutes les radiations (différence de marche nulle), puis les franges de part et d'autre de l'arête sont irisées, et ensuite rapidement brouillées dès que l'on s'éloigne un peu plus :

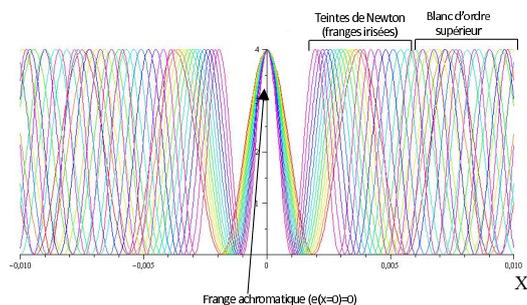


FIGURE VIII.17 – Franges d'égale épaisseur en lumière blanche : teintes de Newton et blanc d'ordre supérieur

III.5 Applications

a - Visualisation d'un écoulement gazeux (objet de phase)

DÉFINITION - (III.5) - 1:

On appelle **objet de phase**, tout corps parfaitement transparent (au moins sur tout le spectre visible) non visible par des techniques classiques. Du fait de son indice $n > 1$, il engendre une variation de chemin optique lorsqu'il est introduit dans un bras du Michelson; on peut ainsi le visualiser par effet chromatique en interférométrie

Exemple : gaz incolore, lame de verre, de plexiglass etc...

L'interféromètre de Michelson peut par exemple être mis à profit pour visualiser l'écoulement d'un jet de gaz de briquet, totalement invisible à l'oeil nu.

A RETENIR : Le principe est le suivant :

- On réalise les franges du coin d'air en lumière blanche. Il est nécessaire de se placer très près de l'arête car on obtient très rapidement le blanc d'ordre supérieur en s'éloignant de la frange achromatique
- On réduit l'angle jusqu'à obtention de la teinte plate : $\begin{cases} \alpha \simeq 0 \\ e \simeq 0 \end{cases}$, typiquement un couleur uniforme dans l'idéal. A ce stade, toute variation de différence de marche, même infime, fait varier la teinte visible sur l'écran.
- On introduit dans l'un des bras du Michelson un jet de gaz \implies on observe des irisations mobiles sur l'image projetée de la nuée de gaz. En effet, supposons un jet de dimension caractéristique de $d \sim 1 \text{ mm}$ et d'indice $n \simeq 1,00044$; la variation de chemin optique est :

$$\Delta\delta = 2(n - 1) \cdot d \simeq 0,88\mu\text{m}$$

ce qui correspond typiquement à l'ordre de grandeur d'une longueur d'onde du visible, donc typiquement autour d'une variation d'une unité de l'ordre, entraînant un effet interférométrique bien visible.

b - Mesure de distance : épaisseur d'une lame de verre

L'interféromètre de Michelson peut également être employé pour déterminer l'épaisseur d'une lame de verre interposée sur le trajet de la lumière dans un des bras du Michelson.

On procède de la façon suivante :

- Réglage du Michelson pour obtenir les franges d'égale épaisseur en lumière blanche. Compte tenu du brouillage rapide en blanc d'ordre supérieur autour de la frange achromatique, on observe forcément celle-ci sur l'écran; toute variation de chemin optique est "très sensible" et provoque la disparition des franges. On note la position du chariot : X_1

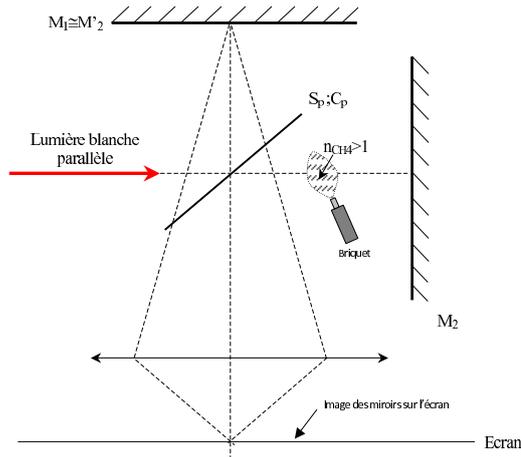


FIGURE VIII.19 – "Image" de la nuée de gaz sur l'écran

FIGURE VIII.18 – Principe de visualisation d'un jet de gaz par interférométrie

- On intercale une lamelle de microscope d'épaisseur d (indice n) dans le bras n°2 \implies ajout d'une différence de marche de $\Delta\delta = 2(n - 1)d$ les franges disparaissent.
- On chariotte dans le sens d'une réduction de la longueur du bras n°2 jusqu'à retrouver les franges que l'on replace dans la même position qu'avant l'ajout de la lame. On note la position du chariot $X_2 < X_1$.

EXPLOITATION : une fois les franges retrouvées, la différence de marche ajoutée par la lame est compensée par le chariotage. On a :

$$\Delta\delta + 2(X_2 - X_1) = 0 \implies 2(n - 1)d + 2(X_2 - X_1) = 0$$

donc :

$$d = \frac{X_1 - X_2}{(n - 1)}$$

c - Spectre cannelé (à faire en TP)