

# L'ÉLECTROSTATIQUE

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Loi fondamentale de l'électrostatique : la loi de Coulomb</b> . . . . .	<b>3</b>
I.1	Expression de la force de Coulomb . . . . .	3
I.2	Ordre de grandeurs . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Champ électrostatique engendré par des distributions discrètes de charges</b> . .	<b>4</b>
II.1	Définition et expression pour une charge ponctuelle . . . . .	4
II.2	Principe de superposition : cas d'une distribution de charges ponctuelles . . . . .	4
<b>III</b>	<b>Notion sur les champs électrostatiques engendrés par des distributions continues de charges (hors programme)</b> . . . . .	<b>5</b>
III.1	Les 3 modèles de distributions de charge - échelle mésoscopique . . . . .	5
III.2	Equivalence des modèles (sur un exemple) . . . . .	6
III.3	Expressions élémentaires des champs . . . . .	6
<b>IV</b>	<b>Symétries et invariances des distributions de charges - Conséquences sur le champ</b> . . . . .	<b>7</b>
IV.1	Éléments de symétrie des distributions de charges . . . . .	7
IV.2	Invariances des distributions de charges . . . . .	9
IV.3	Quelques exemples d'exploitation . . . . .	11
IV.4	Liens de symétrie entre charges et champ : le principe de Curie . . . . .	11
<b>V</b>	<b>Le potentiel électrostatique</b> . . . . .	<b>12</b>
V.1	Circulation du champ d'une charge ponctuelle - circulation conservative . . . . .	12
V.2	Première approche du potentiel - indétermination . . . . .	13
V.3	Notions énergétiques . . . . .	17
<b>VI</b>	<b>Le théorème de Gauss</b> . . . . .	<b>19</b>
VI.1	Flux du champ électrique - Énoncé . . . . .	19
VI.2	Exemples d'application (à connaître!!!) . . . . .	23
<b>VII</b>	<b>Notions élémentaires sur les condensateurs</b> . . . . .	<b>24</b>
VII.1	Définition . . . . .	24

VII.2	Capacité d'un condensateur . . . . .	25
VII.3	Cas du condensateur plan (à connaître parfaitement) . . . . .	26
VII.4	Energétique des condensateurs . . . . .	27
<b>VIII</b>	<b>Analyse topographique du champ et du potentiel . . . . .</b>	<b>29</b>
VIII.1	Lignes de champ . . . . .	29
VIII.2	Tubes de champ . . . . .	31
VIII.3	Isopotentielles . . . . .	31
VIII.4	Positions relatives des lignes de champs : resserrement ou évasement . . . . .	33
VIII.5	Quelques cartes de champs et d'isopotentielles . . . . .	34

---

# I Loi fondamentale de l'électrostatique : la loi de Coulomb

## I.1 Expression de la force de Coulomb

A RETENIR :

### **DÉFINITION - (I.1) - 1:**

La force exercée entre deux charges ponctuelles, par exemple  $q_1$  et  $q_2$  ou force de Coulomb s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^2} \vec{u}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^3} \overrightarrow{M_1 M_2} & \text{pour la force exercée par } q_1 \text{ sur } q_2 \\ \vec{F}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^2} \vec{u}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^3} \overrightarrow{M_2 M_1} & \text{pour la force exercée par } q_2 \text{ sur } q_1 \end{cases}$$

avec  $\epsilon_0 = 8,854.10^{-12} F.m^{-1}$  (USI) permittivité diélectrique du vide.

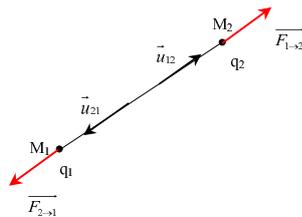


FIGURE IX.1 – Définition de la loi de Coulomb (1785)

## I.2 Ordre de grandeurs

- Force électrostatique entre l'électron et le proton d'un atome  $H$  (Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène) :

$$F_{p/e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\underbrace{a_0^2}_{\text{rayon de Bohr}}} \simeq 8.10^{-8} N$$

- Force d'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton d'un atome  $H$  :  $F_{grav} = G \frac{m_e m_p}{a_0^2} \simeq 35.10^{-48} N$

- Poids de chacune des particules :  $P_e = m_e g \simeq 9.10^{-30} N$  et  $P_p = m_p g \simeq 16,7.10^{-27} N$

A RETENIR :

$$F_{grav} \ll P_{e/p} \ll F_{Coulomb}$$

## II Champ électrostatique engendré par des distributions discrètes de charges

### II.1 Définition et expression pour une charge ponctuelle

**DÉFINITION - (II.1) - 2:**

On appelle champ électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q_i$  en un point  $M$ , la force ressentie par une charge d'essai  $q$  placée en  $M$ , divisée par la valeur de cette charge  $q$  ;

Si  $\begin{cases} q_i \text{ est en } P_i \\ q \text{ est une charge d'essai en } M \end{cases}$  alors le champ électrostatique créé par  $q_i$  en  $M$  est la force ressentie par unité de charge soit :

$$\vec{E}_{q_i}(M) = \frac{\vec{F}_{P_i \rightarrow M}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M^2} \vec{u}_{P_i M}$$

On retiendra également l'expression de la force de Coulomb :

$$\vec{F}_{P_i \rightarrow M} = q \vec{E}(M)$$

### II.2 Principe de superposition : cas d'une distribution de charges ponctuelles

#### a - Calcul du champ

On pose la situation suivante :

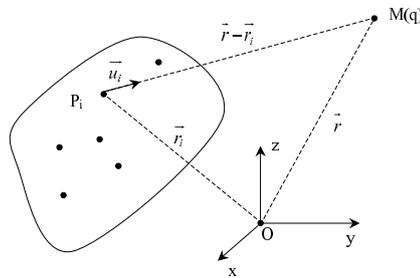


FIGURE IX.2 – Distribution ponctuelle de charges

- ▶  $n$  charges  $q_i$  ( $i = 1..n$ ) sont placées en des points  $P_i$ .
- ▶ Une charge d'essai  $q$  est placé en  $M$ .
- ▶ On note  $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M}$

alors la charge d'essai en  $M$  va subir la force électrostatique résultante suivante :

$$\vec{F}_{el}[M(q)] = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q}{P_i M^2} \cdot \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i q \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i q \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

soit d'après la définition, un champ électrostatique en  $M$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{q} \vec{F}_{el}[(q)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M^2} \cdot \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

**b - Exemples simples**

**Exercice de cours:** (II.2) - n° 1 *Champ produit par une distribution élémentaire*

Déterminer le champ produit par 3 charges  $(2q, q, q)$ , chacune placée à un sommet d'un triangle équilatéral de côté  $a$  en son barycentre  $G$ .

Une charge  $3e$  est placée sur l'origine d'un axe  $[Ox)$ . Une seconde charge  $-e$  est placée en un point  $A$  d'abscisse  $x(A) = a > 0$ . Déterminer le champ électrique en tout point  $M(x)$  de cet axe. On déplace une charge  $q$  sur cet axe. Existe-t-il une ou des positions d'équilibre; commenter par analyse mécanique la stabilité de ces positions.

**III Notion sur les champs électrostatiques engendrés par des distributions continues de charges (hors programme)**

**III.1 Les 3 modèles de distributions de charge - échelle mésoscopique**

Au sein de la matière neutre, à l'échelle d'un atome de numéro atomique  $Z$ , les charges sont réparties en :

$$\begin{cases} Q_+ = Ze & \text{la charge nucléaire} \\ Q_- = -Ze & \text{la charge électronique} \end{cases}$$

Lors d'une expérience d'électrisation, par exemple en frottant vigoureusement une règle en plastique, on retire ou on communique des charges élémentaires  $-e$  à celle-ci.

QUESTION : peut-on dénombrer ces charges et utiliser un modèle discret ?

ELÉMENTS DE RÉPONSE : On porte une sphère métallique en cuivre ( $Z_{Cu} = 29$ ) de rayon  $R = 1\text{cm}$  à un potentiel  $V_1 = 100\text{V}$  afin de l'électriser. On montre que sa charge est alors :

$$Q = 4\pi R\epsilon_0 \cdot V_1$$

► Le nombre de charges négatives en défaut, et donc le nombre de charges positives en excès est :

$$N_{exc} = \frac{Q}{e} = \frac{4\pi R\epsilon_0 \cdot V_1}{e} \simeq 7.10^8$$

► Le nombre total de charges mobiles (électrons) dans la sphère neutre étaient :

$$N_{tot} = Z_{Cu} \cdot \frac{m_{sph}}{m_{1at}} = Z_{Cu} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho(Cu) \frac{N_a}{M_{Cu}} \simeq 10^{25}$$

On constate finalement que :

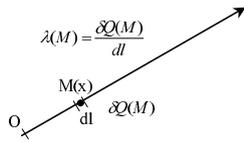
$$1 \ll N_{ex} \ll N_{tot}$$

A RETENIR :

**PROPRIÉTÉ - (III.1) - 1:**

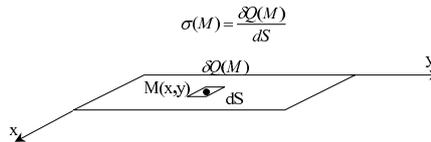
Bien que faible par rapport à  $N_{tot}$ , le nombre de charges en excès ou défaut  $N_{ex}$  est très élevé par rapport à l'unité  $\Rightarrow$  On caractérise la charge dans la matière électrisée par une grandeur nivelée mésoscopique appelée densité de charge, abandonnant ainsi une description discrète.

3 CAS DE FIGURE :



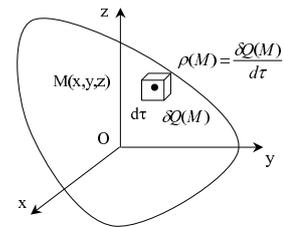
**FIGURE IX.3 – Distribution 1D**  
Lorsqu'un corps chargé possède **une dimension  $l$  dominant les deux autres**, par exemple un fil dont les **dimensions de section sont très petites face à la longueur**, on peut définir la charge linéique de ce corps, c'est à dire la charge par unité de distance :

$$\lambda(M) = \frac{\delta Q(M)}{dl}$$



**FIGURE IX.4 – Distribution 2D**  
La distribution bidimensionnelle est retenue lorsque **deux dimensions du corps chargé** dominant la troisième, ou que les charges du corps sont exclusivement réparties en surface (cas des conducteur en équilibre électrostatique par exemple). On peut définir la charge surfacique :

$$\sigma(M) = \frac{\delta Q(M)}{dS}$$



**FIGURE IX.5 – Distribution 3D**  
Dans le cas le plus général d'un corps chargé en volume, on peut définir la densité volumique

$$\rho(M) = \frac{\delta Q(M)}{d\tau}$$

**III.2 Equivalence des modèles (sur un exemple)**

Prenons le cas d'un fil rectiligne de rayon  $r$ , chargé, et isolons un élément de longueur  $dl$ .

A RETENIR :

La charge locale  $\delta Q(M)$  peut s'écrire de manière équivalente selon 2 modèles de répartition continue.

- La charge est répartie en surface du fil  $\Rightarrow$  équivalence  $1D \leftrightarrow 2D$

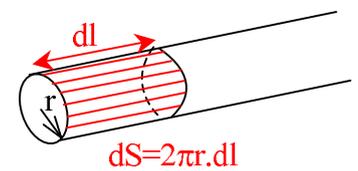
$$\delta Q(M) = \sigma(M)2\pi r \cdot dl = \lambda(M) \cdot dl$$

donc :  $\lambda(M) = 2\pi r\sigma(M)$

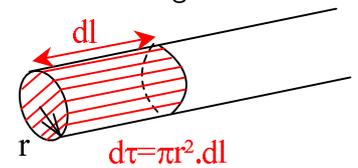
- La charge est répartie en volume dans le fil  $\Rightarrow$  équivalence  $1D \leftrightarrow 3D$

$$\delta Q(M) = \rho(M)d\tau = \rho(M) \cdot \pi r^2 \cdot dl = \lambda(M) \cdot dl$$

donc :  $\lambda(M) = \pi r^2\rho(M)$



**FIGURE IX.6 – Equivalence de modèles de charge  $1D \leftrightarrow 2D$**



**FIGURE IX.7 – Equivalence de modèles de charge  $1D \leftrightarrow 3D$**

**III.3 Expressions élémentaires des champs**

NB : on obtient le champ total par intégration sur le domaine de charge (hors programme).

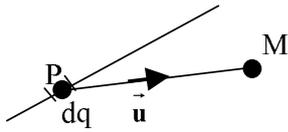


FIGURE IX.8 – Champ élémentaire d'une distribution 1D

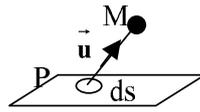


FIGURE IX.9 – Champ élémentaire d'une distribution 2D

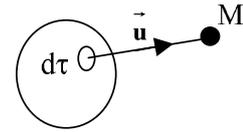


FIGURE IX.10 – Champ élémentaire d'une distribution 3D

$$d\vec{E}(M)_{\delta Q(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overbrace{\lambda(M) \cdot dl}^{=\delta Q(M)}}{PM^2} \cdot \vec{u}$$

$$d\vec{E}(M)_{\delta Q(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overbrace{\sigma(M) \cdot dS}^{=\delta Q(M)}}{PM^2} \cdot \vec{u}$$

$$d\vec{E}(M)_{\delta Q(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overbrace{\rho(M) \cdot d\tau}^{=\delta Q(M)}}{PM^2} \cdot \vec{u}$$

## IV Symétries et invariances des distributions de charges - Conséquences sur le champ

### IV.1 Eléments de symétrie des distributions de charges

#### a - Plan de symétrie - conséquences sur le champ

#### ! DÉFINITION - (IV.1) - 3:

Une distribution de charge possède un plan de symétrie  $\Pi^+$  lorsque les charges élémentaires placées en deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi^+$  sont égales.

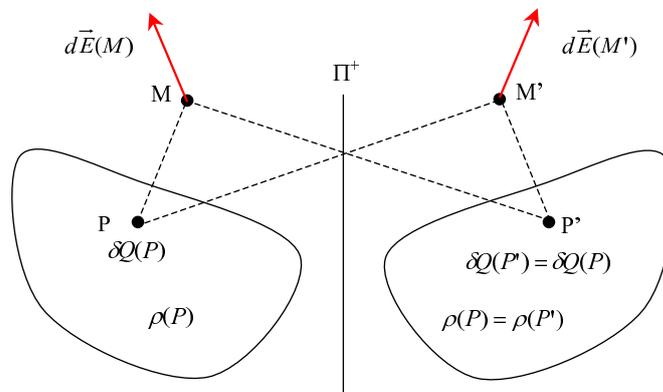


FIGURE IX.11 – Plan de symétrie d'une distribution de charge

Evaluons le champ élémentaire produit en  $M$  et en  $M' = sym_{\Pi^+}(M)$  par les charges des points  $P$  et  $P' = sym_{\Pi^+}(P)$  :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\delta Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{PM}}{PM^3} + \frac{\vec{P'M}}{P'M^3} \right) \quad \text{et} \quad d\vec{E}(M') = \frac{\delta Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{P'M'}}{P'M'^3} + \frac{\vec{PM'}}{PM'^3} \right)$$

puisque  $\begin{cases} PM = P'M' & \text{et} & P'M = PM' \\ \overrightarrow{P'M'} = \text{sym}_{\Pi^+}(\overrightarrow{PM}) & \text{et} & \overrightarrow{PM'} = \text{sym}_{\Pi^+}(\overrightarrow{P'M}) \end{cases}$   
 on a donc :

$$d\vec{E}(M') = \text{sym}_{\Pi^+} [d\vec{E}(M)]$$

ce qui conduit à la relation très générale du caractère symétrique du champ électrique :

À RETENIR :

$$\boxed{\vec{E}(M') = \text{sym}_{\Pi^+} [\vec{E}(M)]} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{\parallel}(M') = \vec{E}_{\parallel}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M) \end{cases}$$

CONSÉQUENCE IMPORTANTE :

Pour un point  $M = M' \in \Pi^+$ , on a  $\vec{E}_{\perp}(M = M') = -\vec{E}_{\perp}(M = M')$  soit  $\vec{E}_{\perp}(M = M') = \vec{0}$  et donc  $\vec{E}(M = M' \in \Pi^+) = \vec{E}_{\parallel}(M = M' \in \Pi^+)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\forall M \in \Pi^+) \in \Pi^+}$$

**b - Plan d'antisymétrie - conséquences sur le champ**

**DÉFINITION - (IV.1) - 4:**  
 Une distribution de charge possède un plan d'antisymétrie  $\Pi^-$  lorsque les charges élémentaires placées en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à  $\Pi^-$  sont opposées.

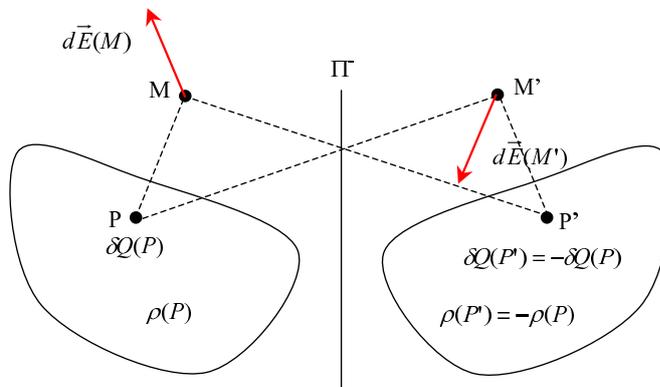


FIGURE IX.12 – Plan d'antisymétrie d'une distribution de charge

Evaluons le champ élémentaire produit en  $M$  et en  $M' = \text{sym}_{\Pi}(M)$  par les charges des points  $P$  et  $P' = \text{sym}_{\Pi}(P)$  :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\delta Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} - \frac{\overrightarrow{P'M}}{P'M^3} \right) \quad \text{et} \quad d\vec{E}(M') = \frac{\delta Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3} - \frac{\overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3} \right)$$

puisque  $\begin{cases} PM = P'M' & \text{et} & P'M = PM' \\ \overrightarrow{P'M'} = \text{sym}_{\Pi^-}(\overrightarrow{PM}) & \text{et} & \overrightarrow{PM'} = \text{sym}_{\Pi^-}(\overrightarrow{P'M}) \end{cases}$   
 on a donc :

$$d\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi^-} [d\vec{E}(M)]$$

ce qui conduit là-encore à une relation très générale du caractère symétrique du champ électrique :

A RETENIR :

$$\boxed{\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi^-} [\vec{E}(M)]} \implies \begin{cases} \vec{E}_{\parallel}(M') = -\vec{E}_{\parallel}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = +\vec{E}_{\perp}(M) \end{cases}$$

CONSÉQUENCE IMPORTANTE :

Pour un point  $M = M' \in \Pi^-$ , on a  $\vec{E}_{\parallel}(M = M') = -\vec{E}_{\parallel}(M = M')$  soit  $\vec{E}_{\parallel}(M = M') = \vec{0}$  et donc  $\vec{E}(M = M' \in \Pi^-) = \vec{E}_{\perp}(M = M' \in \Pi^-)$

$$\implies \boxed{\vec{E}(\forall M \in \Pi^-) \perp \Pi^-}$$

## IV.2 Invariances des distributions de charges

PRÉLIMINAIRE : Transformations isométriques du champ.

**NB :** on indiquera dans la suite toutes les images par rapport à une transformation quelconque par l'ajout de l'exposant  $\langle\langle' \rangle\rangle$ .

HYPOTHÈSE : supposons la transformation  $\mathcal{T}$  telle que :  $\begin{cases} P(q) \xrightarrow{\mathcal{T}} P'(q) \\ M \xrightarrow{\mathcal{T}} M' \end{cases}$

Si la transformation  $\mathcal{T}$  est isométrique alors  $PM = P'M'$

On a alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM^3} \overrightarrow{PM} \implies \vec{E}'(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{P'M'^3} \overrightarrow{P'M'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM^3} \overrightarrow{PM}$$

CONCLUSION : pour une transformation isométrique le champ électrique  $\vec{E}$  se transforme comme le vecteur  $\overrightarrow{PM}$ .

### a - Cas de la translation - conséquences sur le champ

On suppose une distribution de charge telle qu'une translation, par exemple  $\vec{T} = a \cdot \vec{e}_z (\forall a)$ , laisse cette dernière invariante soit :  $\rho(\forall M) = \rho'(\forall M)$

On parle alors d'**invariance par translation** (recouvrement).

**NB :** une telle distribution de charge n'existe pas dans la mesure où l'extension spatiale de la distribution est nécessairement finie.

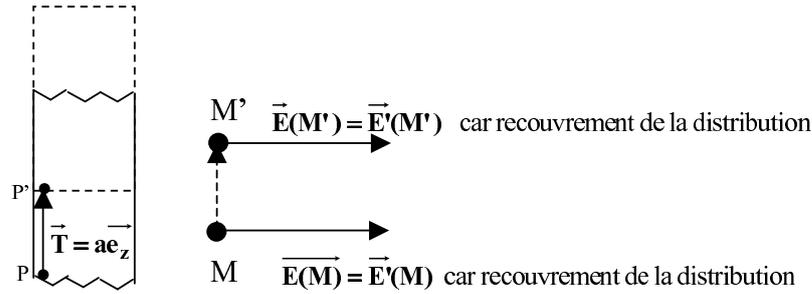


FIGURE IX.13 – Invariance par translation

Du fait du recouvrement, on a :

$$\begin{cases} \vec{E}'(M) = \vec{E}(M) & (1) \\ \vec{E}'(M') = \vec{E}(M') & (2) \end{cases} .$$

Nous savons par ailleurs que le champ électrique se transforme comme  $\overrightarrow{PM}$ , et dans le cas d'une translation on a :  $\overrightarrow{P'M'} = \overrightarrow{PM} \implies \vec{E}'(M') = \vec{E}(M)$  (3)

Ainsi :

$$(2) \text{ et } (3) \implies \vec{E}(M') = \vec{E}(M)$$

CONSÉQUENCES : dans notre cas de la translation  $\vec{T} = a \cdot \vec{e}_z$  selon  $\vec{e}_z$ , cette égalité devient :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y, z') = \vec{E}(x, y, \forall z) = \vec{E}(x, y) \neq f(z)$$

**PROPRIÉTÉ - (IV.2) - 2:**

*Si on a invariance par translation d'une distribution de charge alors le champ électrique engendré ne dépend pas de la variable spatiale attachée à l'axe de cette translation.*

**b - Cas de la rotation - conséquences sur le champ**

On suppose maintenant une distribution de charge telle qu'une rotation, par exemple  $\mathcal{R}_\theta$  selon l'axe  $\vec{e}_z$ , laisse cette dernière invariante, soit formellement :  $\rho(\forall M) = \rho'(\forall M)$ . On parle alors d'**invariance par rotation** (recouvrement).

Du fait du recouvrement, on a :

$$\begin{cases} \vec{E}'(M) = \vec{E}(M) & (1) \\ \vec{E}'(M') = \vec{E}(M') & (2) \end{cases} .$$

Nous savons par ailleurs que le champ électrique se transforme comme  $\overrightarrow{PM}$ , et dans le cas d'une rotation on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P'M'} \neq \overrightarrow{PM} \\ P'M' = PM \end{cases}$$

$$\implies |\vec{E}'(M')| = |\vec{E}(M)| \quad (3)$$

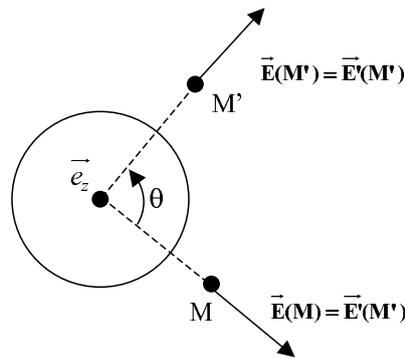


FIGURE IX.14 – Invariance par rotation

Ainsi :

$$(2) \text{ et } (3) \implies |\vec{E}(M')| = |\vec{E}(M)|$$

Dans notre cas de la rotation  $\mathcal{R}_\theta$  d'axe  $\vec{e}_z$ , cette égalité devient :

$$|\vec{E}(\rho, \theta(M), z)| = |\vec{E}(\rho, \theta(M) + \theta_0, z)| \stackrel{\forall \theta_0}{=} |\vec{E}(\rho, \forall \theta, z)| = |\vec{E}(\rho, z)| \neq f(\theta)$$

**PROPRIÉTÉ - (IV.2) - 3:**

*Si on a invariance par rotation d'une distribution de charge alors la norme du champ électrique ne dépend pas de la variable angulaire attachée à cette rotation.*

### IV.3 Quelques exemples d'exploitation

**Exercice de cours: (IV.3) - n° 2** Dégager les éléments de symétrie et les invariances des distributions de charges suivantes. Conclusion pour le champ électrique. :

- ❶ Le "triangle équilatéral de charges" évoqué au II.2.b. Propriété du champ au point  $G$  barycentre du triangle.
- ❷ Carré de charges identiques. Champ au point  $G$  barycentre du carré.
- ❸ Plan infini de charge surfacique  $\sigma$  homogène et placé en  $z = 0$
- ❹ Cylindre infini chargé en volume de manière homogène

### IV.4 Liens de symétrie entre charges et champ : le principe de Curie

Nous avons pu constater dans les démonstrations réalisées plus haut que les éléments de symétrie des causes, soit les distributions de charges, se retrouvaient dans les éléments de symétrie des conséquences, c'est à dire le champ électrostatique  $\vec{E}$ . Ce résultat est en fait une conséquence d'un principe mathématique très général appelé de **Principe de Curie** :

**PROPRIÉTÉ - (IV.4) - 4:**

*Principe de Curie : des conséquences possèdent au moins les éléments de symétrie de leurs causes.*

Exercice de cours: (IV.4) - n° 3 Retrouver à l'aide du principe de Curie les éléments de symétrie dans les exemples

## V Le potentiel électrostatique

### V.1 Circulation du champ d'une charge ponctuelle - circulation conservative

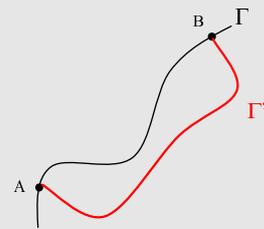
On considère une charge ponctuelle  $q$  placée au point  $O$  origine du repère. Le champ créé en un point  $M(r, \theta, \varphi)$  (coordonnées sphériques) est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

#### DÉFINITION - (V.1) - 5:

On appelle *circulation élémentaire* du champ  $\vec{E}$  associée au déplacement  $\vec{dr} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix}$  ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ) la quantité scalaire :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{dr}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right)$$



La circulation du point A au point B s'obtient par intégration sur un trajet  $\Gamma$  (ne passant pas par le point  $O$  pour éviter

toute divergence du champ  $\vec{E}$  !), soit :  $\mathcal{C}_\Gamma(AB) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \neq f(\Gamma)$

PROPRIÉTÉ - (V.1) - 5:

- La Circulation du champ électrique créé par une charge ponctuelle entre deux points  $A$  et  $B$  de l'espace est indépendante du chemin suivi ; soit deux chemins  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  distincts alors :

$$C_{\Gamma}(AB) = C_{\Gamma'}(AB) = C_{\forall\Gamma}(AB) \neq f(\Gamma)$$

⇒ La circulation du champ créé par une charge ponctuelle est dite conservative

- La circulation du champ électrique engendré par une charge ponctuelle sur un trajet  $\Gamma$  quelconque dépend des points de départ et d'arrivée de ce trajet.
- La circulation du champ électrique engendré par une charge ponctuelle sur un trajet  $\Gamma$  fermé est nulle (point de départ  $\equiv$  point d'arrivée) :

$$C_{\Gamma \text{ ferm}} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

## V.2 Première approche du potentiel - indétermination

### a - Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Reprenons la circulation élémentaire du champ créé par une charge ponctuelle placée en  $O$  (choix pratique et non restrictif). On a :

$$dC = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{OM}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right) = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cste\right)$$

Soit  $dC = -dV(\vec{r})$  en posant  $V(r)$  appelé **potentiel électrostatique de la charge ponctuelle  $q$  en  $M$**  :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cste$$

REMARQUE - (V.2) - 1:

Le potentiel électrostatique est indéterminé car défini à une constante près! → on doit choisir une convention d'origine (CL).

CONVENTION :  $V(r \rightarrow \infty) = 0 \implies cste = 0$

A RETENIR : potentiel d'une charge ponctuelle centrée en  $O(r = 0)$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

**b - Principe de superposition : potentiel des distributions de charges**

Considérons une distribution de charges ponctuelles  $\mathcal{D} = (q_1, q_2 \dots q_n)$ , ces charges étant respectivement placées aux points  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ . Le champ engendré par cette distribution de charges en un point  $M$  quelconque est :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M^2} \cdot \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i \quad \text{en posant } r_i = P_i M$$

La circulation élémentaire du champ électrique sur un déplacement  $\vec{dr}$  du point  $M$  est donc :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot \vec{dr} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i \cdot \vec{dr}$$

Par ailleurs, on a :  $\vec{u}_i \cdot \vec{dr} = \vec{u}_i \cdot d\vec{OM} = \vec{u}_i \cdot \left( \underbrace{d\vec{OP}_i}_{=\vec{0}} + \underbrace{d\vec{P}_i M}_{=d\vec{r}_i} \right) = dr_i$

on obtient :

$$d\mathcal{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot dr_i = - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r_i}\right) = -d \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i}\right)}_{=V} + \underbrace{cte_i}_{=0 \text{ par convention}} \right)$$

À RETENIR :

Ainsi :

$$d\mathcal{C} = -dV$$

avec  $V(M)$  le potentiel électrostatique en  $M$  de la distribution de charges :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i}\right)$$

**c - Evaluation de la différence de potentiel entre deux points**

Intégrons la circulation élémentaire du champ électrostatique entre deux points  $A$  et  $B$  sur un trajet  $\Gamma$  quelconque, pour une distribution de charges quelconque. Il vient naturellement :

À RETENIR :

$$\mathcal{C}_{\Gamma}(AB) \stackrel{\forall \Gamma}{=} \mathcal{C}(AB) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

REMARQUE - (V.2) - 2:

- ▶ La circulation du champ électrostatique engendré par une distribution quelconque est conservative (indépendante du trajet  $\Gamma$ ).
- ▶ La circulation du champ électrostatique engendré par une distribution quelconque est nulle sur un contour fermé :

$$C_{\Gamma \text{ fermé}} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr} = - \oint_{\Gamma} dV = 0$$

**d - Lien champ-potentiel : l'opérateur gradient**

Supposons une distribution de charge  $\mathcal{D}$  engendrant un champ  $\vec{E}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace. Prenons la base orthonormée directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Les coordonnées du champ en  $M$  dans cette base sont :

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_x(M) \\ E_y(M) \\ E_z(M) \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

La circulation élémentaire sur le trajet  $\vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$  peut s'écrire :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot \vec{dr} = E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz$$

de plus, la variation élémentaire du potentiel s'écrit :

$$dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \quad \text{différentielle d'une fonction à plusieurs variables)}$$

or par ailleurs on a  $d\mathcal{C} = -dV$  donc

$$\vec{E} \cdot \vec{dr} = E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz = - \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \right] = - \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dr}$$

en posant un nouveau vecteur appelé **gradient du potentiel** et noté  $\overrightarrow{\text{grad}V}$  tel que :

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et par identification } \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}V}(M)$$

Ainsi, le champ électrostatique en un point  $M$  et le potentiel électrostatique en ce même point sont liés par la relation suivante (on dit que le champ dérive du potentiel) :

À RETENIR :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \quad \text{et} \quad dV = \overrightarrow{\text{grad}}V(M) \cdot d\vec{r}$$

On exploite généralement ce vecteur dans les systèmes de coordonnées classiques :

► **Coordonnées cartésiennes :** (expression à connaître)

► **Coordonnées cylindriques :** (expression donnée en énoncé si nécessaire)

► **Coordonnées sphériques :** (expression donnée en énoncé si nécessaire)

$$\overrightarrow{\text{grad}}V(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}V(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}V(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

REMARQUE - (V.2) - 3:

On définit parfois l'opérateur gradient à l'aide de l'opérateur «nabla», valable **uniquement en**

**coordonnées cartésiennes** comme suit :  $\overrightarrow{\text{grad}}[V(x, y, z)] = \vec{\nabla}V$  avec :  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

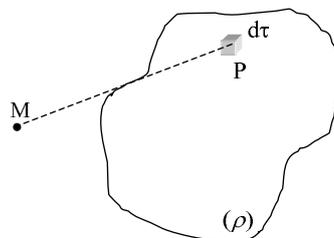
**e - Extension au cas d'une distribution continue de charge (notions hors programme)**

L'extension de l'expression précédente du potentiel au cas des distributions de charge continues caractérisées par une densité mésoscopique  $\lambda(1D)$ ,  $\sigma(2D)$ , et  $\rho(3D)$  est immédiate en transformant la sommation discrète en intégrales :

► Cas d'une distribution volumique

Si la distribution est caractérisée par une densité volumique  $\rho(M)$  alors le potentiel s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{charges}} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$



► Cas d'une distribution surfacique

Dans le cas d'une répartition bidimensionnelle des charges de densité surfacique  $\sigma(P)$  le potentiel devient :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{charges} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

► Cas d'une d'istribution linéique

Enfin dans le cas d'une répartition unidimensionnelle (filiforme) de densité linéique  $\lambda(P)$ , le potentiel prend la forme suivante

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{charges} \frac{\lambda(P)}{PM} dl$$

### V.3 Notions énergétiques

#### a - Travail de la force de Coulomb - lien avec le potentiel

Considérons une charge  $q$  dans une région où règne un champ électrostatique  $\vec{E}$ . Lors d'un déplacement élémentaire  $\vec{dr}$  de cette charge, le travail de la force de Coulomb exercée sur celle-ci s'écrit :

$$\delta W_{Coul} = \vec{F}_q \cdot \vec{dr} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{dr} = -q \cdot \overrightarrow{gradV} \cdot \vec{dr} = -q \cdot dV$$

soit (À RETENIR :) :

$$\delta W_{Coul} = -q \cdot dV$$

Le travail dépensé par cette force sur le trajet  $AB$  est obtenu par intégration avec :

$$W_{Coul_{AB}} = -q \int_A^B dV = q [V(A) - V(B)]$$

#### b - Energie électrostatique d'interaction d'une charge placée dans un champ extérieur

Considérons un opérateur amenant une charge ponctuelle  $q$  depuis l'infini (absence de sources) où règne un potentiel nul, jusqu'à une position finale  $M$  de potentiel  $V(M)$  et de champ  $\vec{E}(M)$ .

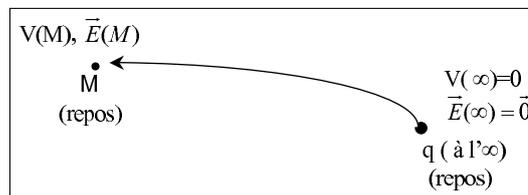


FIGURE IX.15 – Travail d'un opérateur

Les forces travaillant lors de cette opération sont :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{La force de Coulomb} \\ \text{La force exercée par l'opérateur} \end{array} \right.$

L'application du théorème de l'énergie cinétique entre les positions infini et  $M$  conduit à :

$$\Delta E_c = W_{Coul} + W_{op}$$

En outre, la charge ayant une vitesse nulle en positions initiale et finale, on a  $\Delta E_c = 0$  ce qui conduit à :  
**À RETENIR :**

$$W_{op} = -W_{coul} = -q [V(\infty) - V(M)] = qV(M) = U_I \quad \text{énergie d'interaction}$$

**Définition :** L'énergie électrostatique d'une charge plongée dans un potentiel correspond par définition au travail d'un opérateur amenant cette charge en position finale depuis l'infini où règne un potentiel nul.

**c - Prolongement hors programme : énergie potentielle d'interaction d'une distribution de charges (utile pour exercice du cristal 1D cf TD)**

Selon le même principe, un opérateur construit une distribution de  $n$  charges en amenant ces dernières une par une dans un espace initialement vide. Le travail total dépensé correspondra donc à l'énergie totale d'interaction de cette distribution.

Une première charge est amenée en position 1, puis une seconde en position 2 ; le travail nécessaire s'écrit au fur et à mesure de cette construction :

$$W_1 = 0 \quad \text{absence de champ lorsque l'on amène la première charge}$$

On amène la seconde charge dans le champ de la première :

$$W_{1,2} = q_2 V_1(2)$$

puis une troisième :

$$W_{1,2,3} = q_2 V_1(2) + q_3 V_{12}(3) = q_2 V_1(2) + q_3 [V_1(3) + V_2(3)]$$

Soit pour  $n$  charges apportées :

$$W_{1,2,3,\dots,n} = q_2 V_1(2) + q_3 [V_1(3) + V_2(3)] + \dots + q_i [V_1(i) + \dots + V_{i-1}(i)] + \dots + q_n \sum_{j < n} V_j(n)$$

soit finalement :

$$U_I = W_{1,2,3,\dots,n} = \sum_{i=2}^n q_i \sum_{j < i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n q_i \underbrace{\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}}_{=V(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n q_i V(M_i)$$

Si la distribution de charge est continue, le calcul de l'énergie d'interaction se déduit du résultat précédent ainsi :

- ▶ la seconde sommation correspond au potentiel courant au point  $M_i$  portant la charge  $q_i$
- ▶ la première sommation est remplacée par une intégrale sur l'ensemble de la distribution.

Ainsi, l'énergie d'interaction s'écrit suivant la dimensionnalité de la distribution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Distribution 3D : } U_I = \frac{1}{2} \iiint \rho(M)V(M) \cdot d\tau \\ \text{Distribution 2D : } U_I = \frac{1}{2} \iint \sigma(M)V(M) \cdot dS \\ \text{Distribution 1D : } U_I = \frac{1}{2} \int \lambda(M)V(M) \cdot dl \end{array} \right.$$

## VI Le théorème de Gauss

### VI.1 Flux du champ électrique - Énoncé

#### a - Définition - surface orientée et flux

On considère une surface à laquelle on associe une orientation. 2 cas de figure peuvent se présenter :

- ▶ Si la surface  $\mathcal{S}$  est ouverte, elle est orientée par un vecteur unitaire local (en  $P$ )  $\vec{n}(P)$  avec :
- ▶ Si la surface  $\mathcal{S}$  est fermée, elle est orientée par un vecteur unitaire local (en  $P$ )  $\vec{n}(P)$  avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{direction de } \vec{n} : \perp \mathcal{S} \\ \text{sens de } \vec{n} : \text{selon la règle d'Ampère} \end{array} \right.$$

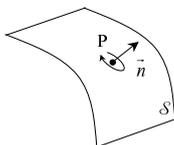


FIGURE IX.16 – Orientation d'une surface ouverte

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{direction de } \vec{n} : \perp \mathcal{S} \\ \text{sens de } \vec{n} : \text{vers l'extérieur de la surface.} \end{array} \right.$$

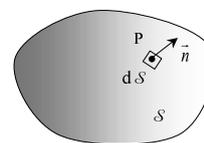
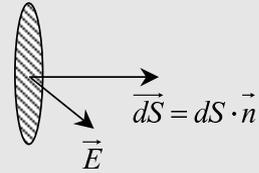


FIGURE IX.17 – Orientation d'une surface fermée

**DÉFINITION - (VI.1) - 6:**

On appelle flux élémentaire d'un champ de vecteurs  $\vec{E}$  à travers la surface élémentaire  $d\vec{S}$  la quantité :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$



Le flux total du champ de vecteurs  $\vec{E}$  à travers la surface  $S$  s'obtient par intégration :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \text{si la surface } S \text{ est ouverte}$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \text{si la surface } S \text{ est fermée}$$

**b - Flux élémentaire du champ électrique créé par une charge ponctuelle**

On considère une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  et  $d\vec{S}$  une surface élémentaire orientée et placée en un point  $M$  à la distance  $r$  du point  $O$ . Le champ créé par la charge  $q$  en  $M$  est :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \quad \text{avec } \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{OM}$$

Le flux élémentaire du champ électrique à travers  $d\vec{S}$  est par définition :

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

**Notion d'angle solide élémentaire  $d\Omega$  (notion hors programme mais très simple dans notre cas particulier) :**

$$\text{On appelle angle solide la quantité } d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma}{r^2}$$

En outre  $d\Sigma$  (projection de la surface  $dS$  sur le plan perpendiculaire à  $OM$ ) est une surface élémentaire sphérique qui vaut :

$$d\Sigma = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (\text{mesuré en stéradians ("st")})$$

L'angle solide se résume donc à :  $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta d\phi$   
et le flux élémentaire du champ électrostatique de la charge  $q$  :

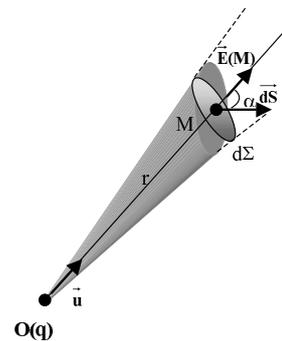


FIGURE IX.18 – Flux élémentaire du champ produit par une charge ponctuelle

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega \neq f(\underbrace{O}_{\text{pt origine}})$$

**NB :** l'angle solide total vaut donc :  $\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 4\pi$

**c - Flux du champ électrique d'une charge ponctuelle à travers une surface fermée**

On envisage maintenant d'intégrer le flux élémentaire du champ électrique engendré par la charge ponctuelle  $q$  sur une surface fermée quelconque. Deux situations peuvent alors se présenter :

► **Si la charge est à l'intérieur de la surface fermée :**

Le flux total vaut donc pour une charge intérieure à la surface fermée :

$$\Phi(int) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

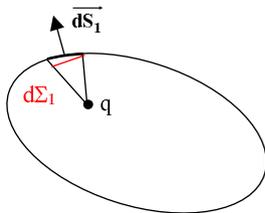


FIGURE IX.19 – La charge est à l'intérieur de la surface fermée

► **Si la charge est à l'extérieur de la surface fermée :**

Il apparaît ici une "subtilité" liée à la convention d'orientation des surfaces fermées. Calculons le flux élémentaire du champ électrostatique créé par la charge  $q$  dans l'angle solide  $d\Omega$  :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 = -\vec{E} \cdot \vec{dS}'_1 + \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{d\Sigma_1}{r_1^2} + \frac{d\Sigma_2}{r_2^2} \right)$$

or :  $d\Omega = \frac{d\Sigma_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2}{r_2^2}$

Le flux total est donc nul pour une charge extérieure :

$$\Phi(ext) = 0$$

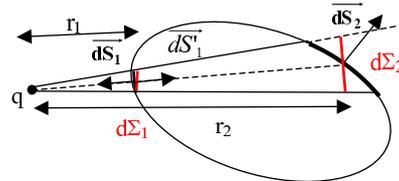


FIGURE IX.20 – La charge est à l'extérieur de la surface fermée

**d - Généralisation : énoncé du théorème de Gauss**

Imaginons une distribution discrète de charges  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{S}$  une surface quelconque fermée de l'espace.

On appelle :  $\begin{cases} q_i \text{ les charges de } \mathcal{D} \text{ intérieures à la surface } S \\ q_j \text{ les charges de } \mathcal{D} \text{ extérieures à la surface } S \end{cases}$

Le champ total en tout point de l'espace est obtenu par théorème de superposition, soit :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i + \sum_j \vec{E}_j$$

Le flux du champ électrique sur la surface fermée  $S$  est alors :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \underbrace{\oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}}_{=\frac{q_i}{\epsilon_0}} + \sum_j \underbrace{\oiint_S \vec{E}_j \cdot d\vec{S}}_{=0} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Soit finalement :

À RETENIR :

**PROPRIÉTÉ - (VI.1) - 6:**

Le flux du champ électrique engendré par une distribution quelconque de charges sur une surface fermée  $S$  quelconque de l'espace vaut :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{cas des distributions discrètes}$$

Ce résultat peut-être immédiatement étendu au cas des distributions continues, par exemple volumique de densité  $\rho$  :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V/S} \rho(M) \cdot d\tau = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{cas des distributions continues}$$

en appelant  $\rho$  la densité de charge dans le volume  $V$  de frontière la surface  $S$ .

PHRASE À RETENIR : le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge totale contenue dans la surface fermée divisée par  $\epsilon_0$ .

e - Stratégie et conditions de mise en oeuvre (à connaître parfaitement !!!)

À RETENIR : le théorème de Gauss est un puissant outil de détermination du champ électrique en tout point de l'espace dans les cas où les distributions de charges sources présentent un haut degré de symétrie et d'invariances (cylindre, sphère, plan infinis etc.)!!!

L'application du théorème de Gauss passe par 3 étapes essentielles :

- ▶ Identification des plans de symétrie et antisymétrie des sources  $\implies$  direction du champ connue en tout point de l'espace.
- ▶ Identification des invariances de la distribution source  $\implies$  variables "vraies" du champ connues.
- ▶ On pose le théorème de Gauss  $\implies$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

et on choisit la surface de Gauss fermée  $S$  éventuellement  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_i \cup \dots \cup S_n$  telle que sur chaque élément de surface  $d\vec{S}_i$  on ait :

- ◇  $\vec{E} \perp d\vec{S}_i$  soit  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_i = 0$  ou bien  $\vec{E} \parallel d\vec{S}_i$  soit  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_i = \pm \|\vec{E}\| \times dS_i$
- ◇  $\|\vec{E}\| = cste \neq 0$  sur les  $m \leq n$  portions de surface de Gauss pour lesquelles  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = \pm \|\vec{E}\| \times dS$

Ainsi le théorème de Gauss devient :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \implies = \pm \iint_{S_1} E \cdot dS \pm \iint_{S_2} E \cdot dS \dots \iint_{S_m} E \cdot dS = E \sum_i^{m \leq n} \pm \iint_{S_i} dS_i = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}{\sum_i^{m \leq n} \pm S_i}$$

Le champ  $\vec{E}$  est alors déterminé.

## VI.2 Exemples d'application (à connaître!!!)

### a - Sphère uniformément chargée en volume - conséquences

On considère une sphère de rayon  $R$  et comportant une charge volumique homogène  $\rho_0$ .

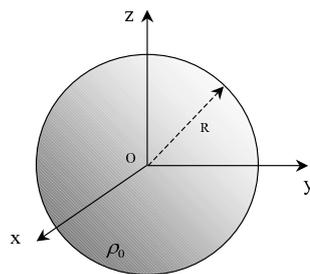


FIGURE IX.21 – sphère chargée uniformément en volume

**Exercice de cours:** (VI.2) - n° 4 Déterminer le champ électrique produit par cette distribution en tout point de l'espace.

b - **Cylindre uniformément chargé en volume.**

On considère un cylindre de section circulaire de rayon  $R$  et de longueur supposée infinie, et de charge volumique  $\rho_0$ .

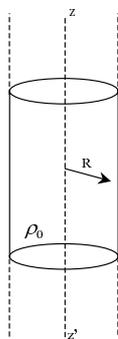


FIGURE IX.22 – Cylindre chargé uniformément en volume

Reprendre l'exercice précédent.

c - **Plan infini uniformément chargé.**

On considère un plan de dimension infinie, chargée uniformément avec la densité surfacique  $\sigma_0$ .

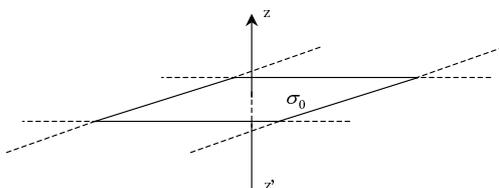


FIGURE IX.23 – Plan infini chargé uniformément

Reprendre là-encore l'exercice précédent.

VII **Notions élémentaires sur les condensateurs**VII.1 **Définition****DÉFINITION - (VII.1) - 7:**

*On appelle condensateur, un ensemble de deux conducteurs en influence totale c'est à dire que si des charges existent sur ces conducteurs, alors toutes les lignes de champ émanant du 1er rencontre le 2nd sur leur passage. Les conducteurs sont appelés armatures du condensateur.*

CONSÉQUENCE : une armature est contenue dans l'autre.

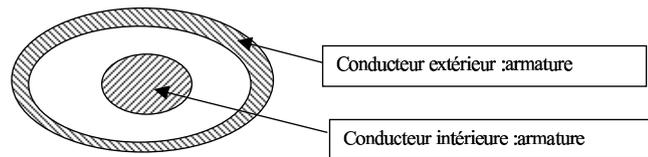


FIGURE IX.24 – Structure d'un condensateur "idéal"

## VII.2 Capacité d'un condensateur

Considérons le condensateur précédent. Imaginons une surface fermée  $S$  dont la frontière est contenue dans l'armature extérieure, et supposons que les armatures portent des charges.

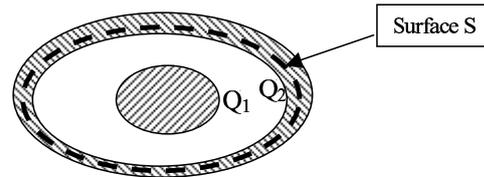


FIGURE IX.25 – Répartition des charges dans un condensateur "idéal"

**NB :** les charges sont au repos dans les conducteurs donc  $\vec{E} = \vec{0}$  dans ceux-ci !

Appliquons le théorème de Gauss sur cette surface fermée  $S$  :

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \iint \underbrace{\vec{E}(M)}_{=\vec{0}} \cdot \vec{dS}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

Si l'on retient les dénominations suivantes pour les charges réparties en surface :

$\left[ \begin{array}{l} Q_1 = \text{charge en surface de l'armature intérieure de potentiel } V_1 \\ Q_{2_i} = \text{charge en surface intérieure de l'armature extérieure de potentiel } V_2 \end{array} \right. \implies Q_{int} = Q_1 + Q_{2_i} = 0$   
 soit finalement :

$$Q_1 = -Q_{2_i}$$

On définit la capacité du condensateur de la manière suivante (définition admise sans démonstration) :

**DÉFINITION - (VII.2) - 8:**

Un condensateur chargé avec la charge  $Q_1$  et présentant une différence de potentiel  $\Delta V$  entre ses deux armatures possède la capacité  $C$  définie par :

$$C = \frac{Q_1}{\Delta V} \tag{IX.1}$$

**Unité :**  $C$  en Farad ( $F$ ) si  $Q$  en Coulomb et  $\Delta V$  en Volt.

VII.3 Cas du condensateur plan (à connaître parfaitement)

On appelle condensateur plan, un ensemble de deux conducteurs plans infinis (épaisseur négligeable) en vis à vis l'un de l'autre. Ce modèle fictif est retenu lorsque l'écartement  $e$  d'armatures planes de dimension finie, est très inférieur aux dimensions du plan de surface  $S$ . On néglige donc les phénomènes intervenant aux extrémités ("effets de bords"). L'influence totale n'est donc pas assurée dans ce type de condensateur, le calcul de la capacité reste néanmoins applicable avec une très bonne approximation.

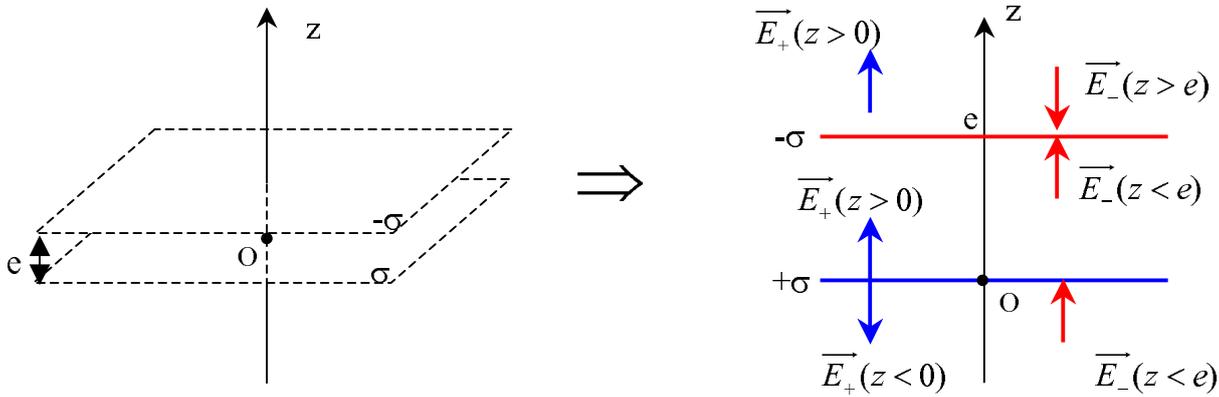


FIGURE IX.26 – Structure du condensateur plan

VALEUR DU CHAMP :

On rappelle que le champ engendré par un plan infini chargé avec la densité surfacique  $\sigma$  est :  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}_{ex}$

- ▶  $z < 0$  :  $\vec{E}(z < 0) = \vec{E}_+(z < 0) + \vec{E}_-(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0}$
- ▶  $0 < z < e$  :  $\vec{E} = \vec{E}_+(0 < z < e) + \vec{E}_-(0 < z < e) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$
- ▶  $z > e$  :  $\vec{E}(z > e) = \vec{E}_+(z > e) + \vec{E}_-(z > e) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0}$

Ainsi le champ résultant entre les plaques est :  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$

Calculons ensuite la différence de potentiel entre armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 -dV = \int_1^2 -\overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{dOM} = \int_1^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} = E \times e = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times e = \frac{Q_1 \times e}{S \times \epsilon_0}$$

Ce qui permet sans peine de déterminer la capacité de ce condensateur :

$$C_{plan} = \frac{\epsilon_0 \times S}{e}$$

**REMARQUE - (VII.3) - 4:**

→ dans le cas où l'espace d'un condensateur est rempli d'un matériau (isolant), l'expression de sa capacité  $C$  s'obtient simplement en remplaçant la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  par celle du matériau  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  (avec  $\epsilon_r$  permittivité diélectrique relative du matériau).

→ la capacité d'un condensateur ne dépend que de ses caractéristiques propres (dimensions et matériau de remplissage)

**VII.4 Energétique des condensateurs**

**a - Energie électromagnétique stockée dans un condensateur**

On considère un condensateur portant la charge  $Q_1$  sur l'armature 1 et  $Q_2 = -Q_1$  sur l'armature 2, la différence de potentiel régnant entre les deux armatures étant  $\Delta V = V_1 - V_2$ . Imaginons que l'on souhaite augmenter la charge du condensateur en donnant une charge élémentaire  $dQ_1$  sur l'armature 1 de potentiel  $V_1$ , et  $dQ_2 = -dQ_1$  de potentiel  $V_2$  (seconde borne du générateur).

Le travail total à fournir (par l'opérateur) pour réaliser cette opération est donc :

$$\delta W_{op} = V_1 \cdot dQ_1 + V_2 \cdot dQ_2 = [V_1 - V_2] \cdot dQ_1$$

en outre :

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{C}$$

d'où :

$$\delta W_{op} = (V_1 - V_2) \cdot dQ_1 = \frac{Q_1}{C} \cdot dQ_1 = d\left(\frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C}\right)$$

L'énergie fournie par l'opérateur étant accumulée dans le condensateur, on notera cette dernière  $U_{cond}$  avec donc :

$$\delta W_{op} = dU_{cond}$$

qui par intégration donne :

$$U_{cond} = \frac{1}{2} \int_0^{Q_1} d\left(\frac{Q_1^2}{C}\right)$$

$$U_{cond} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C} = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$$

A RETENIR :

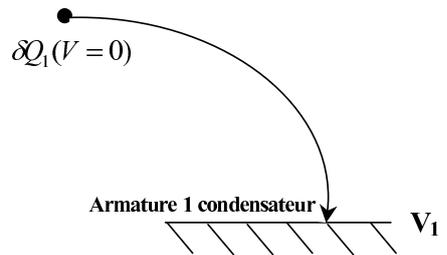


FIGURE IX.27 – Calcul de l'énergie d'un condensateur

**PROPRIÉTÉ - (VII.4) - 7:**

Lorsqu'un condensateur possède une charge  $Q = C\Delta V$  sous la différence de potentiel  $\Delta V$ , il stocke une énergie électrique  $U_{cond}$  d'expression :

$$U_{cond} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

**b - Exemple d'application : densité d'énergie électromagnétique dans un condensateur plan**

Lors de la décharge d'un condensateur, l'énergie stockée pendant la charge est libérée jusqu'à l'annulation du champ électrique entre armatures.

L'amplitude du champ régnant entre les armatures étant proportionnelle à la différence de potentiel, l'énergie électrique stockée est donc une fonction quadratique de l'amplitude du champ.

Par exemple, en reprenant les résultats du condensateur plan, on a :

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_0^e \underbrace{E}_{=\sigma/\epsilon_0=cste} \cdot dz = Ee$$

$$U_{cond} = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} (Ee)^2 = \frac{\epsilon_0 S E^2}{2} e$$

En identifiant le volume total  $\mathcal{V} = Se$  du condensateur plan, on obtient finalement :

$$U_{cond} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{V}$$

Une analyse dimensionnelle immédiate permet de dégager que la grandeur  $u_e = \frac{U_{cond}}{\mathcal{V}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  est homogène à une densité volumique d'énergie.

Ce résultat, dégagé ici dans le cas particulier du condensateur plan, est en fait parfaitement général. L'énergie électrique accumulée dans un condensateur de géométrie quelconque (de volume interarmature  $\mathcal{V}$ ) peut donc être calculée par l'intégrale suivante :

$$U_{cond} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot d\tau$$

**NB :** cette propriété sera démontré dans un cadre totalement général dans le chapitre consacré à l'énergie électromagnétique.

**c - Exercice résolu : détermination de la capacité d'un condensateur par méthode énergétique**

On propose ici de montrer sur l'exemple du condensateur cylindrique, que l'intégration de la densité volumique d'énergie potentielle permet la détermination de la capacité.

On considère un condensateur cylindrique dont l'armature intérieure porte la charge  $Q$  et possède un rayon  $R_1$ , et l'armature extérieure est de rayon  $R_2$ , tandis que  $h$  est la hauteur totale. On appelle  $\mathcal{V}$  le volume entre armatures. En négligeant les effet de bords (longueur infinie), le champ électrique entre armatures (obtenu sans aucun mal à l'aide du théorème de Gauss) s'écrit :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{\vec{e}_r}{r}$$

L'énergie électrique accumulée est :

$$U_{cond} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot d\tau$$

soit :

$$U_{cond} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \right)^2 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} \cdot r \cdot dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$$

En identifiant ce dernier résultat avec l'expression générale de l'énergie électrique stockée :

$$U_{cond} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

on peut dégager l'expression de la capacité du condensateur :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

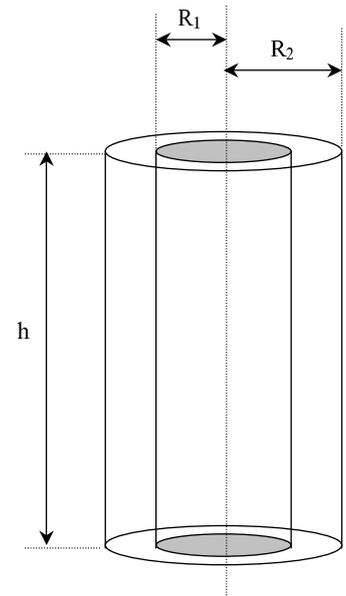


FIGURE IX.28 – Condensateur cylindrique

## VIII Analyse topographique du champ et du potentiel

### VIII.1 Lignes de champ

#### a - Définition

Considérons un champ électrostatique  $\vec{E}$ . On appelle **ligne de champ**, la courbe tangente en tout point au vecteur champ électrique.

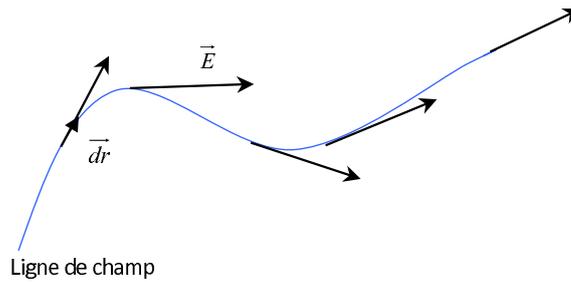


FIGURE IX.29 – Ligne de champ électrostatique

**b - Obtention des équations de lignes de champs**

La traduction formelle de la tangence des lignes de champ avec le champ s'écrit comme la colinéarité d'un élément  $d\vec{OM} = \vec{dr}$  de ligne avec le champ  $\vec{E}$ , soit :

$$\boxed{d\vec{OM} = k \cdot \vec{E}} \quad (1)$$

soit par exemple en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}}$$

AUTRE FORMULATION :

$$\boxed{d\vec{OM} \wedge \vec{E} = \vec{0}} \quad (2)$$

**Exercice de cours: (VIII.1) - n° 5** Déterminer les équation des lignes de champ d'une charge ponctuelle placée à l'origine  $O$  d'un repère quelconque.

RÉPONSE :

On rappelle le champ engendré par une charge ponctuelle en un point  $M(r, \theta, \varphi)$  :

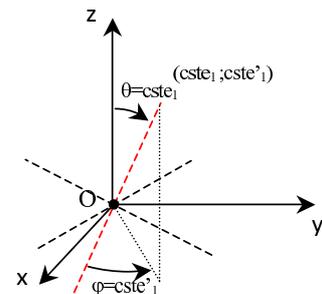
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

L'équation (2) s'écrit :

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{\sin \theta}{r} \cdot d\varphi = 0 \\ 0 \\ \frac{d\theta}{r} \end{cases} \implies \begin{cases} \theta = cste \\ \varphi = cste' \end{cases}$$



Chaque ligne de champ, caractérisée par un couple de valeur  $(cste, cste')$ , est bien une droite passant par  $O$  pour une charge ponctuelle.

**PROPRIÉTÉ - (VIII.1) - 8:**

Si deux lignes du champ électrostatique se coupent en un même point d'espace, alors le champ en ce point est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit nul } \vec{E} = \vec{0} \text{ puisque le champ doit être tangent à deux lignes différentes.} \\ \text{soit non défini } \implies \text{ le point est dit singulier (ex : sur une charge ponctuelle).} \end{array} \right.$$

**VIII.2 Tubes de champ**

On appelle tube de champ un faisceau de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé. Les lignes de champ sont tangentes à la surface d'un tube de champ, et donc perpendiculaires au vecteur de la surface latérale :

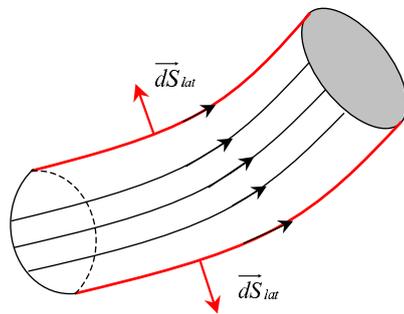


FIGURE IX.30 – Tube de champ électrostatique

**VIII.3 Isopotentielles**

**DÉFINITION - (VIII.3) - 9:**

On appelle **isopotentielle** le lieu géométrique des points  $M$  d'espace pour lesquels le potentiel est constant. Dans un problème général (3D), cette zone d'espace correspond à une surface  $S_{iso}$  d'équation explicite :

$$M \in \text{zone isopotentielle} \Leftrightarrow V [M(x, y, z)] = cste$$

**PROPRIÉTÉ - (VIII.3) - 9:**

Le champ électrostatique est perpendiculaire à toute surface isopotentielle.  
 Plus généralement : Une surface définie par une équation explicite du type  $f(x, y, z) = f(\vec{r}) = cste$  admet  $\vec{\text{grad}}f$  comme vecteur normal.

**Démo :** considérons une surface isopotentielle de valeur  $V_0$  et un déplacement élémentaire  $\vec{dr}$  faisant passer de  $A$  à  $A'$  sur cette surface.

$$\text{On a : } dV = \vec{\text{grad}}V \cdot \vec{dr} = -\vec{E} \cdot \vec{dr} = -\vec{E} \cdot \vec{AA}' = 0 \quad \implies \quad \vec{E} \perp \mathcal{S}_{iso}$$

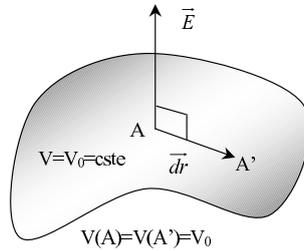


FIGURE IX.31 – Champ sur une surface isopotentielle

**PROPRIÉTÉ - (VIII.3) - 10:**

*Le champ électrostatique est orienté suivant les potentiels décroissants.*

Supposons maintenant une ligne de champ traversant deux surfaces isopotentielles très proches respectivement aux points  $B$  et  $B'$  tels que  $\vec{BB}' = \vec{dr}'$ , et supposons également que le champ soit orienté (décroissant) de  $B$  vers  $B'$ . Il vient :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}' = -\|\vec{E}\| \times BB' < 0$$

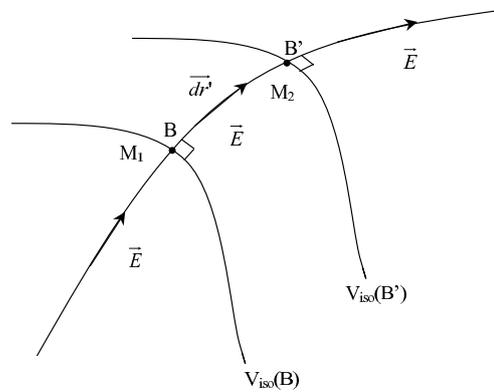


FIGURE IX.32 – Orientation du champ vers les potentiels décroissants

VIII.4 Positions relatives des lignes de champs : resserrement ou évasement

Envisageons un tube de champ dont les lignes de champ se resserrent :

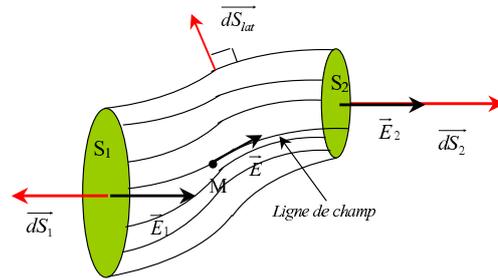


FIGURE IX.33 – Tube de champ ressermé : les lignes de champ se resserrent

Appelons  $\Sigma$  la surface fermée du tube de champ telle que  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$ .  $\Sigma$  étant vide de charge, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1}_{-\iint_{S_1} E_1 \times dS_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2}_{\iint_{S_2} E_2 \times dS_2} + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat}}_{=0}$$

qui donne en supposant le champ constant sur chaque base du tube :

$$E_2 = E_1 \times \frac{S_1}{S_2} \implies \boxed{E_2 > E_1}$$

A RETENIR :

- ▶ Un resserrement des lignes de champ correspond à une augmentation de l'intensité du champ électrostatique.
- ▶ Un évasement des lignes de champ correspond à une diminution de l'intensité du champ électrostatique.

Un exemple élémentaire est celui du champ engendré par une charge ponctuelle : l'intensité du champ électrique augmente à mesure que l'on se rapproche de cette dernière, et l'on constate également un resserrement des lignes de champ qui converge vers la charge ponctuelle :

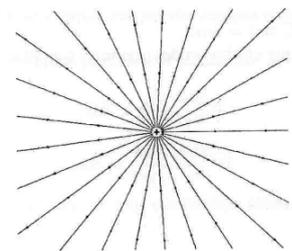


FIGURE IX.34 – Intensité du champ et resserrement/évasement des lignes de champ pour 1 charge ponctuelle

### VIII.5 Quelques cartes de champs et d'isopotentielles

QUELQUES EXEMPLES DE LIGNES DE CHAMP ÉLECTRIQUE (2D) DE DISTRIBUTIONS DE CHARGES À COMMENTER :

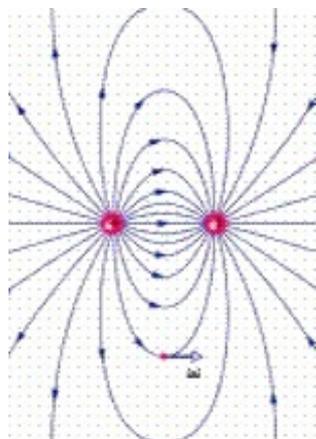


FIGURE IX.35 – Topographie des lignes de champ électrique pour deux charges opposées

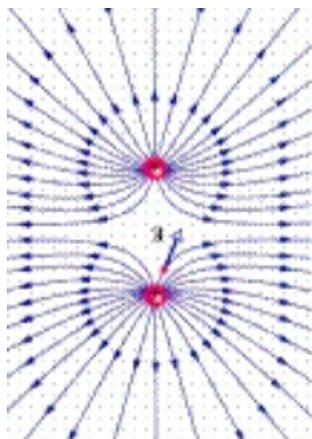


FIGURE IX.36 – Topographie des lignes de champ électrique pour deux charges identiques  $q > 0$

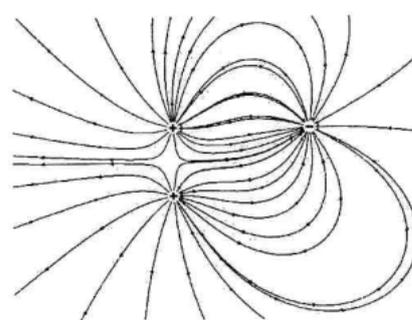


FIGURE IX.37 – Topographie des lignes de champ électrique pour trois charges  $(+q, +q, -q)$

**Exercice de cours:** (VIII.5) - n° 6 *Tracer sur ces trois spectres de lignes de champ quelques courbes isopotentielles.*

EXPLOITATION D'UN LOGICIEL POUR LA REPRÉSENTATION DES LIGNES DE CHAMP : UN PEU DE PYTHON!!!