

LE CHAMP MAGNÉTIQUE ET SES SYMÉTRIES - FORMULATION LOCALE ET INTÉGRALE DE LA MAGNÉTOSTATIQUE

Sommaire

I	Le courant source du champ magnétique : modélisations	2
I.1	Distribution volumique	2
I.2	Distribution linéique -équivalence 3D ↔ 1D	4
I.3	Distribution surfacique	4
II	Symétries et invariances des distributions de courant - impact sur le champ magnétique	5
II.1	Stratégie de démonstration - exploitation du principe de Curie	5
II.2	Eléments de symétrie des distributions de courant	6
II.3	Invariances des distributions de courant	8
III	Le flux du champ magnétostatique	10
III.1	Conservation du flux magnétique (propriété fondamentale) - traduction intégrale	10
III.2	Traduction locale : l'équation de Maxwell-Thomson ou Maxwell-"flux"	11
IV	La circulation du champ magnétique : le théorème d'Ampère	11
IV.1	Démonstration élémentaire - Enoncé généralisé	11
IV.2	Stratégie de mise en oeuvre (à connaître!!!)	14
IV.3	Exemples classiques d'application (à connaître!!!)	14
IV.4	Le fil infini	14
IV.5	Traduction locale : Equation de Maxwell-Ampère statique	18
V	Analyse topographique du champ magnétique	19
V.1	Lignes et tubes de champ	19
V.2	Interprétation des positions relatives des lignes de champs - resserrement ou évasement	20
V.3	Quelques cartes de champs magnétiques	21

I Le courant source du champ magnétique : modélisations

I.1 Distribution volumique

Considérons un conducteur parcouru par un courant I . Si l'on appelle n la densité volumique de porteurs de charge¹, q la charge d'un porteur, et \vec{v} le vecteur vitesse moyen de ces porteurs, alors on peut définir le vecteur densité volumique de courant par :

$$\vec{J} = nq \vec{v} \quad (\text{XI.1})$$

DIMENSION : $[\vec{J}] = I.L^{-2}$

Démonstration : (cas particulier $\vec{v} \parallel \vec{n}$)

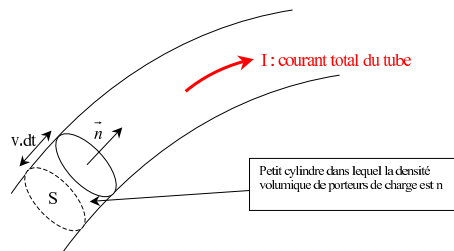


FIGURE XI.1 – Distribution volumique de courant

Isolons par la pensée un tube de courant. Dans ce tube, la charge traversant une section pendant dt est :

$$\delta Q = I \cdot dt$$

or cette charge est également celle contenue dans la portion élémentaire de tube de volume $d\tau = S \langle v \rangle \cdot dt$ en prenant la vitesse moyenne sur la section :

$$\delta Q = \rho \cdot d\tau = nq \cdot S \langle v \rangle \cdot dt$$

En rapprochant ces deux expressions de δQ , on en déduit l'expression du courant :

$$I = nqS \langle v \rangle$$

or le courant circulant par unité de surface est :

$$J = \frac{I}{S} \quad \text{en supposant sa valeur constante sur toute la section}$$

On définit alors le vecteur densité volumique (local) de courant :

1. nombre de porteurs de charge par unité de volume

DÉFINITION - (I.1) - 1:

Définition pratique du vecteur densité volumique de courant :

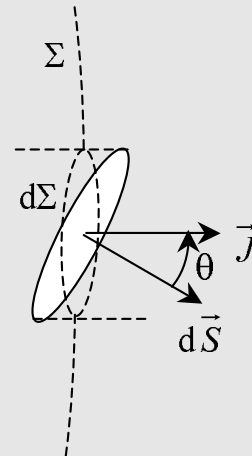
$$\vec{J}(M) = n(M)q \langle v(M) \rangle \times \vec{n} = n(M)q \langle \vec{v}(M) \rangle = \rho(M) \langle \vec{v}(M) \rangle \quad (\text{XI.2})$$

Si les porteurs de charges sont de plusieurs "types" (protons, ions mono- di- trivalents, etc...) alors pour n types, on a :

$$\vec{J}(M) = \sum_{i=1}^n n_i(M)q_i \langle \vec{v}_i(M) \rangle$$

DÉFINITION - (I.1) - 2:

La définition véritable du vecteur densité volumique de courant \vec{J} est en fait donnée à partir du flux du vecteur densité volumique de courant à travers une surface donnée qui correspond au courant traversant cette même surface, soit :

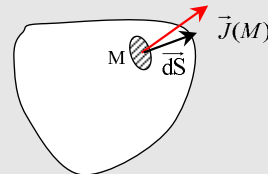


$$I = \underbrace{\iint_{\Sigma(\text{fictive})} dI(M)}_{\substack{\text{courant} \\ \text{traverse} \\ \Sigma \perp \vec{J}}} = \iint_{\Sigma} J(M) \cdot d\Sigma(M)$$

$$= \iint_S J(M) \cdot dS(M) \cos \theta = \iint_S \vec{J}(M) \cdot \vec{dS}(M) = \Phi_S(\vec{J}) \quad (\text{XI.3})$$

Si la surface est fermée, on compte positifs les courants entrants et négatifs les courants sortants :

$$I = - \oiint_S \vec{J}(M) \cdot \vec{dS}(M) \quad (\text{XI.4})$$



I.2 Distribution linéique -équivalence 3D ↔ 1D

Nombreux sont les cas pratiques pour lesquels les dimensions transversales du tube de courant sont très limitées par rapport aux dimensions longitudinales; on parle alors de circuit filiformes, et on assimile dans ces conditions le "tube" à un fil :

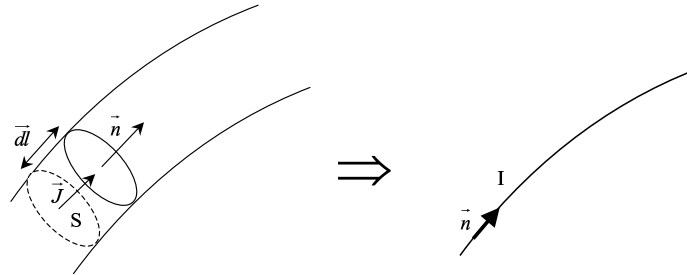


FIGURE XI.2 – Modélisation de la distribution linéique

Nous verrons de manière assez récurrente dans le cours de magnétostatique, qu'il apparaît la grandeur vectorielle $\vec{J} \cdot d\tau$ (avec $d\tau$ élément de volume). Essayons de voir comment se transforme cette grandeur dans le cas d'un circuit filiforme :

$$\vec{J}d\tau = J\vec{n}Sdl = JSdl \times \vec{n}$$

or $J \cdot S$ est l'intensité traversant le tube de section S en considérant \vec{J} constant sur toute la section.

d'où $\vec{J}d\tau = Idl\vec{n}$

ainsi la grandeur $\vec{J} \cdot d\tau$ devient dans ce modèle filiforme de courant :

$$\boxed{\vec{J} \times d\tau = I \times \vec{dl}} \quad (\text{XI.5})$$

I.3 Distribution surfacique

Considérons une plaque conductrice du courant électrique, d'épaisseur $\Delta z = a$ faible devant ses autres dimensions; on appelle \vec{J} le vecteur densité de courant volumique un un point M de cette plaque.

A RETENIR :

Le courant élémentaire s'écoulant à travers la section $d\vec{S}$ est :

$$d^2I(M) = \vec{J}(M) \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{=dz \cdot dl \vec{n}}$$

que l'on intègre sur l'épaisseur $\delta z = a$: $\Rightarrow dI =$

$$\int_{-a}^0 d^2I = \int_{-a}^0 \vec{J}(z) \cdot dz \vec{n} \cdot dl = \boxed{\vec{J}_s \cdot \vec{n} dl}$$

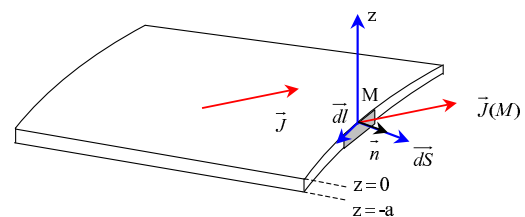


FIGURE XI.3 – Modélisation de la distribution surfacique de courant

en définissant le vecteur densité surfacique de courant :

$$\vec{J}_S = \int_{-a}^0 \vec{J}(z) \cdot dz \quad \text{cas limite } a \rightarrow 0 \quad \boxed{\vec{J}_S = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^0 \vec{J}(z) \cdot dz = a \cdot \vec{J}(M)}$$

DÉFINITION - (I.3) - 3:

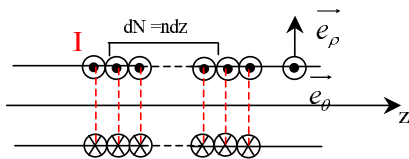
On peut définir, pour un matériau de très faible épaisseur a par rapport à ses autres dimensions latérales, et parcouru par un courant de densité volumique \vec{J} , le vecteur densité surfacique de courant \vec{J}_s tel que :

$$\vec{J}_s(M) = a \vec{J}(M)$$

NB : \vec{J}_s est en quelque sorte "le courant par unité de largeur de passage" !

Unité MKSA : J_s s'exprime en $A.m^{-1}$

EXEMPLE CLASSIQUE : nappe de courant d'un solénoïde



$$dI_{dz} = dN \cdot I = nI \cdot dz \equiv J_S \cdot dz = \vec{J}_S \cdot \vec{e}_\theta dz \quad \text{en posant } \boxed{\vec{J}_S = nI \cdot \vec{e}_\theta}$$

II Symétries et invariances des distributions de courant - impact sur le champ magnétique

II.1 Stratégie de démonstration - exploitation du principe de Curie

RAPPELS : pour les propriétés de symétrie du champ électrique \Rightarrow démonstration à partir de l'expression fondamentale du champ électrique (loi de Coulomb).

PROBLÈME : l'expression fondamentale du champ magnétique (loi de Biot et Savart) est hors programme :

L'élément de courant en P $\vec{J}(P) \cdot d\tau$ engendre en M un champ élémentaire $d\vec{B}_P(M)$ qui a pour expression :

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(P) \wedge \overline{PM}}{PM^3} \cdot d\tau \quad (\text{loi de Biot et Savart})$$

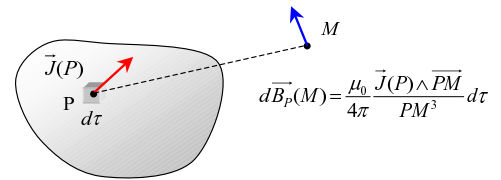
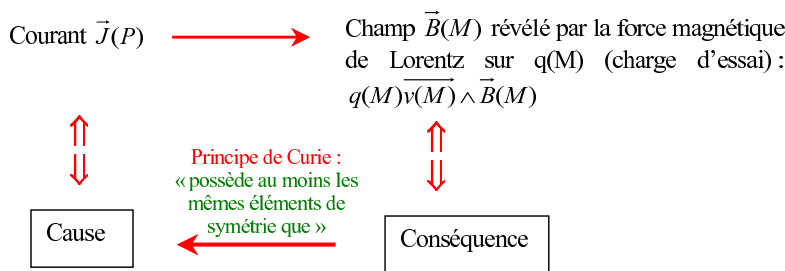


FIGURE XI.4 – Expression fondamentale du champ magnétique à partir de ses sources (les courants !!)

IDÉE : s'appuyer sur le principe de Curie et l'expression de la force de Lorentz (contribution magnétique) appliquée sur une charge plongée dans un champ magnétique engendré par une distribution de courant $\vec{J}(M)$, soit :



Ainsi :

La contribution magnétique de la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ possède la symétrie de sa cause qui est la distribution de courant engendrant le champ \vec{B} .

II.2 Eléments de symétrie des distributions de courant

a - Cas d'un plan de symétrie - conséquence sur le champ

Supposons une distribution de courant présentant un plan de symétrie Π^+ et engendrant une force magnétique de Lorentz sur une charge q en M animée d'une vitesse $\vec{v}_q(M)$ également symétrique. On pose :

$$\begin{cases} M' = sym_{\Pi^+}[M] \\ P' = sym_{\Pi^+}[P] \\ \vec{v}(M') = sym_{\Pi^+}[\vec{v}(M)] \\ q(M') = q(M) \end{cases}$$

des deux dernières relations on tire que : $q(M')\vec{v}(M') = sym_{\Pi^+}[q(M)\vec{v}(M)]$

Par principe de Curie, on a :

$$\vec{F}[M'(q)] = sym_{\Pi^+}[\vec{F}[M(q)]] \Leftrightarrow q(M')\vec{v}_q(M') \wedge \vec{B}(M') = sym_{\Pi^+}[q\vec{v}_q(M) \wedge \vec{B}(M)]$$

CONSÉQUENCES :

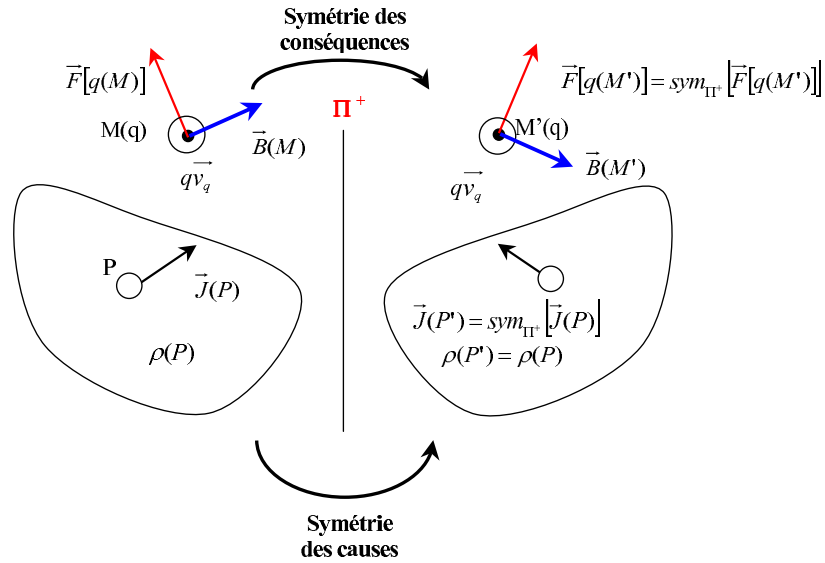


FIGURE XI.5 – Principe de Curie appliqué à la force de Lorentz pour une distribution avec plan de symétrie

$$\vec{B}(M') = -sym_{\Pi^+} [\vec{B}(M)] \implies \begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

si $M \in \Pi^+ \Rightarrow M \equiv M' \Rightarrow \vec{B}_{//}(M) = -\vec{B}_{//}(M) \Rightarrow \vec{B}_{//}(M) = \vec{0}$ alors : $\vec{B}(M \in \Pi^+) \perp \Pi^+$

Le champ magnétique en un point M appartenant à un Π^+ de la distribution de charge source est perpendiculaire à ce Π^+ .

b - Cas d'un plan d'antisymétrie - conséquence sur le champ

Reprenons la situation précédente de la charge en mouvement, la distribution de courant présentant cette fois un plan d'antisymétrie Π^- :

$$\begin{cases} M' = sym_{\Pi^-}[M] \\ P' = sym_{\Pi^-}[P] \\ \vec{v}(M') = -sym_{\Pi^-}[\vec{v}(M)] \\ q(M') = -q(M) \end{cases}$$

des deux dernières relations on tire que : $q(M')\vec{v}(M') = sym_{\Pi^-} [q(M)\vec{v}(M)]$

En vertu du principe de Curie, la force de Lorentz magnétique présente donc une antisymétrie toujours :

$$\vec{F} [M'(q)] = -sym_{\Pi^-} [\vec{F} [M(q)]] \Leftrightarrow q(M')\vec{v}(M') \wedge \vec{B}(M') = -sym_{\Pi^-} [q\vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)]$$

CONSÉQUENCES : (À RETENIR)

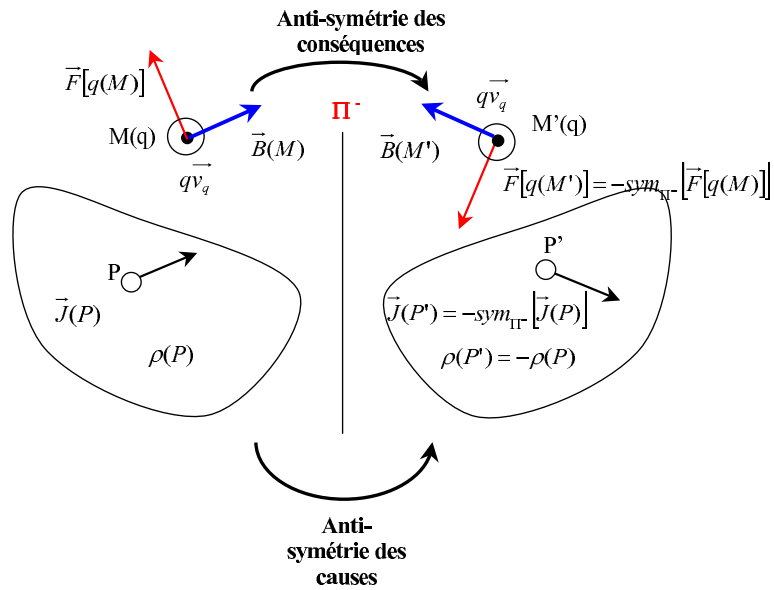


FIGURE XI.6 – Principe de Curie appliqué à la force de Lorentz pour une distribution avec plan de symétrie (un brin d’humour ne fait jamais de mal !)

$$\vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi^-} [\vec{B}(M)] \implies \begin{cases} \vec{B}_{\parallel}(M') = \vec{B}_{\parallel}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

si $M \in \Pi^- \Rightarrow M \equiv M' \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = -\vec{B}_{\perp}(M) \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$ alors : $\vec{B}(M \in \Pi^-) \in \Pi^-$

Le champ magnétique en un point M appartenant à un Π^- de la distribution de charge source est contenu dans ce Π^- .

II.3 Invariances des distributions de courant

a - Cas de la translation - conséquences sur le champ

On suppose une distribution de courant telle qu’une translation, par exemple $\vec{T} = a \cdot \vec{e}_z (\forall a)$, laisse cette dernière invariante. On parle alors d’invariance par translation (recouvrement).

NB : une telle distribution de sources n’existe pas dans la mesure où un courant naît forcément dans un circuit fermé qui interdit ce type d’invariances.

Du fait du recouvrement on a : $\vec{F}^{\rightarrow}(M') = \vec{F}^{\rightarrow}(M)$ (1)

et d’après le principe de Curie comme $\vec{J}(P) = \vec{J}(P') \implies \vec{F}(M) = \vec{F}(M')$ (2)

ainsi avec (1) et (2) on a :

$$\vec{F}(M) = \vec{F}(M') \Leftrightarrow q \vec{v}_q(M) \wedge \vec{B}(M) = q \vec{v}_q(M') \wedge \vec{B}(M')$$

d’où l’on tire finalement :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(M')$$

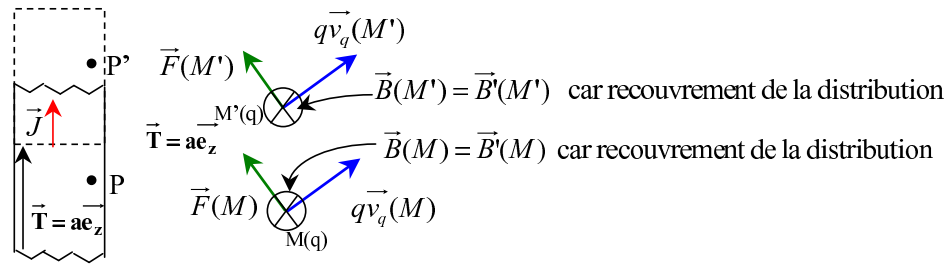


FIGURE XI.7 – Invariance par translation

Dans notre cas de la translation $\vec{T} = a \cdot \vec{e}_z$ selon \vec{e}_z , cette égalité devient :

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y, z') = \vec{B}(x, y, \forall z) = \vec{B}(x, y)$$

A RETENIR :

PROPRIÉTÉ - (II.3) - 1:

Si on a invariance par translation d'une distribution de courant alors le champ magnétique engendré ne dépend pas de la variable spatiale attachée à cette translation.

b - Cas de la rotation - conséquences sur le champ

Par une démarche totalement analogue : dans le cas d'une invariance par rotation \mathcal{R}_θ d'axe \vec{e}_z , la norme du champ magnétique est conservée :

$$|\vec{B}(\rho, \theta(M), z)| = |\vec{B}(\rho, \theta(M) + \theta_0, z)| \stackrel{\forall \theta_0}{=} |\vec{B}(\rho, \forall \theta, z)| = |\vec{B}(\rho, z)|$$

PROPRIÉTÉ - (II.3) - 2:

Si on a invariance par rotation d'une distribution de charge alors la norme du champ magnétique ne dépend pas de la variable angulaire attachée à cette rotation.

c - Exemple "pédagogique" : le fil infini

Considérons un fil conducteur infini parcouru par un courant I ² disposé selon l'axe $[Oz)$.

► ANALYSE DES SYMÉTRIES : tout plan contenant l'axe du fil $[Oz)$ est un plan de symétrie donc le champ est perpendiculaire à ce plan $\implies \vec{B} = B(M) \cdot \vec{e}_\theta$.

► ANALYSE DES INVARIANCES :

2. distribution sans réalité physique!

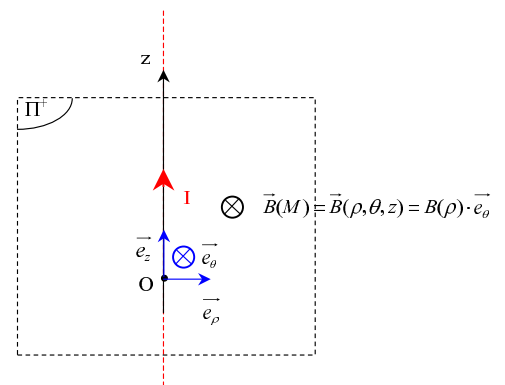


FIGURE XI.8 – Fil conducteur infini parcouru par un courant I

- la distribution est invariante par translation selon $[Oz)$
 $\implies B(M) = B(\rho, \theta, z)$
- la distribution est invariante par rotation d'angle quelconque autour de l'axe $[Oz)$ $\implies B(M) = B(\rho, \theta, z)$

CONCLUSION :

$$\vec{B}_{fil \infty} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\theta$$

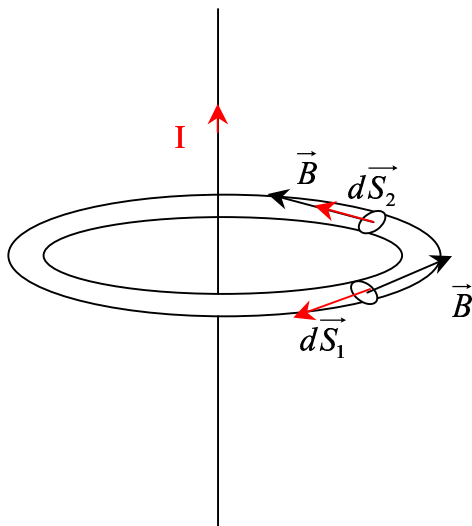
d - Autres exemples : en live !

III Le flux du champ magnétostatique

III.1 Conservation du flux magnétique (propriété fondamentale) - traduction intégrale

Pour simplifier l'approche, prenons le cas du fil infini créant un champ orthoradial \implies les tubes de champ sont donc des tores d'axe de révolution le fil.

Rappel : pour le fil rectiligne infini on a $\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\theta$



On considère une surface fermée S constituée d'une portion de tore de révolution autour du fil comprise entre dS_1 et dS_2 . Le flux total à travers cette surface fermée S est, compte tenu de la topographie orthoradiale du champ, simplement le flux du champ à travers les surfaces extrémités de la portion de tore donc :

$$d\phi_{S_{ferm}} = \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}_1 + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot \vec{dl}}_{=0} = B_2 dS_2 - B_1 dS_1$$

or $B_1(\rho) = B_2(\rho)$ donc : $d\phi_{S_{ferm}} = 0$

Sachant que toute surface fermée peut être décomposée en une série de tubes de champ, le flux sera toujours nul, donc dans le cas du fil rectiligne infini, on a :

$$\phi_{S \text{ fermée}} = \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

GÉNÉRALISATION :

Dans le cas d'un conducteur de forme quelconque, un élément dl crée également un champ orthoradial et l'on retrouve ce même résultat en sommant les flux élémentaires $d\phi$ créés par \vec{dB} .

On peut donc donner la propriété générale suivante :

PROPRIÉTÉ - (III.1) - 3:

Le flux du champ magnétique crée par une distribution quelconque est toujours nul à travers une surface fermée :

$$\phi_{S \text{ fermée}} = \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (\text{valable } \forall \text{ surface fermée, } \forall \text{ circuit}) \quad (\text{XI.6})$$

\vec{B} est dit à flux conservatif.

INTERPRÉTATION SUR LES LIGNES DE CHAMP : On peut décomposer le flux total $\phi_{S \text{ fermée}}$ en flux des lignes de champ entrantes et flux des lignes de champ sortantes :

$$\phi_{S \text{ fermée}} = \phi_{entr} + \phi_{sort} = 0 \implies \phi_{entr} = -\phi_{sort}$$

Conséquences : | les LDC entrantes ressortent forcément
| les LDC sortantes sont forcément entrées

III.2 Traduction locale : l'équation de Maxwell-Thomson ou Maxwell-"flux"

On sait que

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

or d'après le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iiint_{V/S} \text{div} [\vec{B}] \times d\tau = 0 \quad \forall S \text{ fermée}$$

d'où la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ - (III.2) - 4:

La conservation du flux magnétique se traduit localement par l'équation suivante (appelée équation de Maxwell-Thomson ou "Maxwell-Flux")

$$\text{div} [\vec{B}] = 0 \quad (\text{interprétation plus tard!}) \quad (\text{XI.7})$$

IV La circulation du champ magnétique : le théorème d'Ampère

IV.1 Démonstration élémentaire - Enoncé généralisé

Considérons à nouveau le cas du fil infini. On montre à partir de la loi de Biot et Savart que le champ magnétique produit par une telle distribution de courant est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \times \vec{e}_\theta$$

Dans le système de coordonnées cylindriques, l'élément de longueur $d\vec{OM} = \vec{dl}$ s'écrit :

$$\vec{dl} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz \cdot \vec{e}_z$$

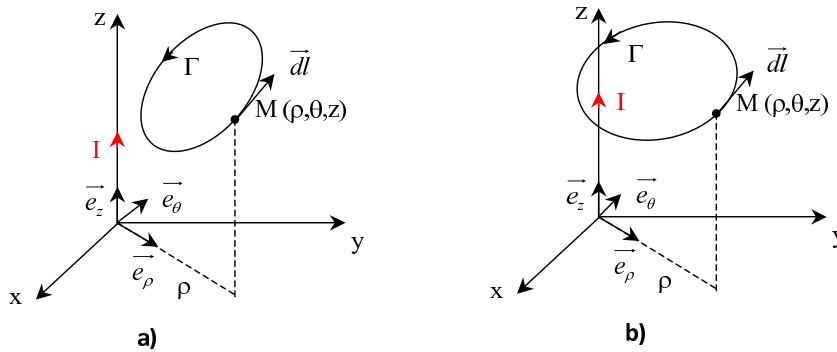


FIGURE XI.9 – Circulation du champ magnétique

Calculons la circulation de \vec{B} sur un contour fermé Γ arbitraire :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_\Gamma d\theta$$

Il convient ici de distinguer deux cas :

- si le contour Γ enlace le fil, alors θ varie de 2π lors de l'intégration d'où :

$$\boxed{\mathcal{C}_\Gamma = \mu_0 I}$$

- si le contour Γ n'enlace pas le fil, alors θ reprend sa valeur initiale en fin d'intégration ("rebroussement"), l'intégrale est donc nulle :

$$\boxed{\mathcal{C}_\Gamma = 0}$$

REMARQUE - (IV.1) - 1:

Si le contour Γ enlace N fois le même courant alors $\mathcal{C}_\Gamma = N\mu_0 I$
Le calcul de \mathcal{C}_Γ est indépendant du contour choisi.

Enfin, ce résultat peut être généralisé à toute distribution de courant source d'un champ magnétique, et porte le nom de **théorème d'Ampère** :

PROPRIÉTÉ - (IV.1) - 5:

La circulation du champ magnétique \vec{B} sur une courbe fermée est égale au produit de μ_0 par l'intensité enlacée par Γ , c'est à dire l'intensité algébrique totale qui traverse toute surface S s'appuyant sur Γ :

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad \text{avec} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \quad \text{(XI.8)}$$

perméabilité magnétique du vide

3 CAS DE FIGURE PEUVENT SE PRÉSENTER :

• SI LA DISTRIBUTION DE COURANT EST FILIFORME :

alors le courant enlacé correspond à la somme des courants filiformes enlacés par le contour Γ comptés algébriquement \Rightarrow d'où la **nécessité d'une orientation des courants** (cf schéma ci-dessous)

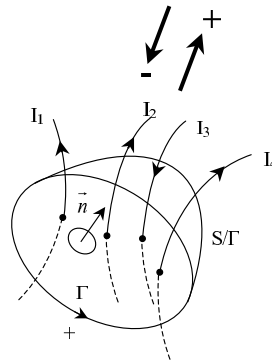


FIGURE XI.10 – Théorème d'ampère pour une distribution linéique de courant

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_n I_n = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3 + I_4)$$

• SI LA DISTRIBUTION DE COURANT EST VOLUMIQUE :

alors le courant enlacé par le contour Γ est évalué en intégrant la densité volumique de courant sur une surface s'appuyant sur le contour Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S/\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{(XI.9)}$$

\Rightarrow cf exemple du tube de courant un peu plus bas.

• ENFIN, SI LA DISTRIBUTION DE COURANT EST SURFACIQUE :

le courant enlacé est calculé par intégration de la densité surfacique de courant sur une nappe enlacé par Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{L \text{ à définir}} \vec{J}_s \cdot d\vec{l} \quad (\text{XI.10})$$

⇒ cf exemple de la nappe de courant un peu plus bas.

IV.2 Stratégie de mise en oeuvre (à connaître!!!)

À RETENIR : Tout comme le théorème de Gauss en électrostatique, son équivalent magnétique le **théorème d'Ampère** est un puissant outil de détermination du champ magnétique en tout point de l'espace dans les cas où les distributions de courants sources présentent un haut degré de symétrie et d'invariances (fil, cylindre, plan infinis etc.)!!!

L'application du théorème d'Ampère passe par 3 étapes essentielles :

- Identification des plans de symétrie et antisymétrie des sources ⇒ **direction du champ connue en tout point de l'espace.**
- Identification des invariances de la distribution source ⇒ **variables "vraies" du champ connues.**
- On pose le théorème d'Ampère ⇒

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlace}}$$

et on choisit le contour d'Ampère fermé $\Gamma \stackrel{\text{éventuellement}}{=} \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_i \cup \dots \cup \Gamma_n$ tel que sur chaque élément de contour on ait :

- ◇ $\vec{B} \perp d\vec{l}$ soit $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ ou bien $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ soit $\vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \|\vec{B}\| \times dl$
- ◇ $\|\vec{B}\| = \text{cste} \neq 0$ sur les $m \leq n$ portions de contour d'Ampère pour lesquelles $\vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \|\vec{B}\| \times dl$

Ainsi le théorème d'Ampère devient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlace}} \implies B \sum_i^{m \leq n} \pm \int_{\Gamma_i} dl_i = \mu_0 I_{\text{enlace}} \implies \boxed{B = \frac{\mu_0 I_{\text{enlace}}}{\sum_i^{m \leq n} \pm \int_{\Gamma_i} dl_i}}$$

Le champ \vec{B} est alors déterminé.

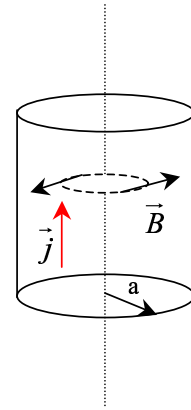
IV.3 Exemples classiques d'application (à connaître!!!)

IV.4 Le fil infini

En live!

a - Le tube de courant

On considère un conducteur cylindrique infini de section circulaire de rayon a et d'axe $[Oz]$. On suppose une densité de courant uniforme sur toute la section $\vec{J} = J_0 \cdot \vec{e}_z$.



- ❶ Déterminer la topographie du champ magnétique³.
- ❷ Exploiter les invariances afin de déterminer les variables d'intérêt⁴.
- ❸ Appliquer le théorème d'Ampère afin de déterminer la norme du champ magnétique, et conclure⁵.

FIGURE XI.11 – Application du théorème d'Ampère sur le tube de courant

b - Le solénoïde infini

On considère un solénoïde d'axe $[Oz]$, de longueur infinie dont les spires sont parcourues par un courant $I = cste$ et comportant n spires par unité de longueur.

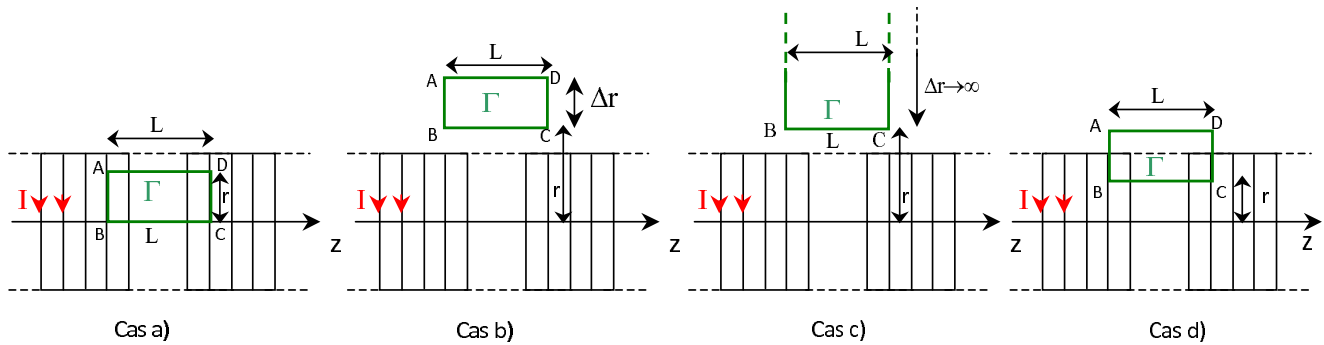


FIGURE XI.12 – Théorème d'Ampère appliqué au cas du solénoïde infini

- ANALYSE DES SYMÉTRIES
 Tout plan $\perp [Oz] \equiv \Pi^+ \implies \vec{B} \parallel \vec{e}_z$

- ANALYSE DES INVARIANCES

$$\begin{cases} \text{Par rotation autour de l'axe } [Oz] & \implies \vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z) \\ \text{Par translation selon l'axe } [Oz] & \implies \vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z) \end{cases} \quad \text{donc : } \boxed{\vec{B} = B(r) \cdot \vec{e}_z}$$

- APPLICATION DU THÉORÈME D'AMPÈRE

$$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Compte tenu de la topographie du champ, on choisit un contour $\Gamma = ABCD$ rectangulaire dont les côtés sont soit $\parallel [Oz]$, soit $\perp [Oz]$.

L'analyse complète du problème nécessite l'application du théorème d'Ampère à 4 reprises :

◇ CAS A) :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = B(0)L - B(\forall r < a)L = 0 \implies B(0) = B(\forall r < a) \implies \boxed{\vec{B} \text{ homogène dans le solénoïde}}$$

◇ CAS B) :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = B(\forall r > a)L - B(r + \Delta r)L = 0 \implies B(r + \Delta r) = B(\forall r > a) \implies \boxed{\vec{B} \text{ homogène à l'extérieur du solénoïde}}$$

◇ CAS C) :

On pose la C.L. $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 0$ (absence de sources à l'infini), ainsi en reprenant le cas précédent avec $\Delta r \rightarrow \infty$:

$$B(r + \Delta r \rightarrow \infty) = B(\forall r > a) \implies \boxed{\vec{B} = \vec{0} \text{ à l'extérieur du solénoïde}}$$

◇ CAS D) :

On choisit enfin de placer Γ à cheval sur l'intérieur et l'extérieur du solénoïde :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 n I L = B(\forall r < a)L - \underbrace{B(\forall r > a)L}_{=0} \implies \boxed{B(\forall r < a) = \mu_0 n I}$$

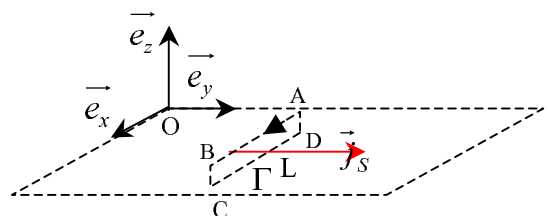
Bilan :

$$\boxed{\vec{B}_{\text{solénoïde}} = \mu_0 n I \cdot \vec{e}_z}$$

c - La nappe de courant (hors programme \rightarrow optionnel)

On considère un plan supposé infini parcouru par un courant de densité surfacique homogène :

$$\vec{J}_s = J_s \times \vec{e}_y$$



Q ? : Déterminer toutes les caractéristiques du champ magnétique au dessus et en dessous du plan de courant. Que constate-t-on ?

RÉPONSE :

- SYMÉTRIES : $(yOz) = \Pi^+ \implies \vec{B}(M) \perp (yOz)$ soit $\boxed{\vec{B}(M) \parallel \vec{e}_x \quad \forall M}$
- INVARIANCES : translation /x et /y $\implies \boxed{\vec{B} = B(z)\vec{e}_x}$
- ANTISYMMÉTRIE DE \vec{B} : du fait de son caractère antisymétrique par rapport à tout plan de symétrie de la distribution de courant on a pour le champ \vec{B} (on dit alors que ce dernier est un pseudo-vecteur) :

$(xOy) \equiv \Pi^+$ donc $\vec{B}_{\parallel}(z) = -\vec{B}_{\parallel}(-z)$ or dans le cas de notre plan de courant, seule existe la composante parallèle avec $\vec{B}_{\parallel} = B(z)\vec{e}_x = \vec{B}$
donc :

$$\boxed{\vec{B}(z) = -\vec{B}(-z)}$$

- APPLICATION DU THÉORÈME D'AMPÈRE :
Compte tenu de la topographie du champ, on choisit un contour Γ rectangulaire ABCD "à cheval" sur la nappe de courant (cf schéma). On applique alors le théorème d'Ampère "2D" :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_L \vec{J}_S \cdot \underbrace{d\vec{n}}_{=\vec{e}_y} = \mu_0 \int_L J_S dl = \mu_0 J_S L$$

$$\text{donc : } \int_A^B \vec{B}(z > 0) \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\rightarrow 0} + \int_C^D \underbrace{\vec{B}(-z < 0)}_{=-\vec{B}(z > 0)} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\rightarrow 0} = \mu_0 J_S L$$

$$\text{soit : } B(z > 0)\vec{e}_x \cdot L\vec{e}_x - B(z > 0)\vec{e}_x \cdot (-L\vec{e}_x) = 2B(z > 0)L = \mu_0 J_S L$$

$$\text{et enfin : } \boxed{B(z > 0) = \mu_0 \frac{J_S}{2}}$$

Bilan :

$$\begin{cases} \vec{B}(z > 0) = \mu_0 \frac{J_S}{2} \vec{e}_x \\ \vec{B}(z < 0) = -\mu_0 \frac{J_S}{2} \vec{e}_x \end{cases}$$

On constate par ailleurs une discontinuité du champ magnétique à la traversée de la nappe de courant. Ceci constitue une propriété essentielle que nous détaillerons plus tard dans le cours sur les équations de Maxwell.

IV.5 Traduction locale : Equation de Maxwell-Ampère statique

Reprenant l'expression du théorème d'Ampère dans le cas d'une distribution volumique ; en utilisant la relation de Stokes-Ampère on a :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S/C} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \underbrace{\iint_{S/C} \vec{J} \cdot d\vec{S}}_{=I_{\text{enlacé}}}$$

on en tire la relation générale :

$$\iint_{S/C} [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \mu_0 \vec{J}] \cdot d\vec{S}$$

qui, valable \forall $\underbrace{S/C}_{\text{surface } S \text{ s'appuyant sur } C}$, permet de dégager la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ - (IV.5) - 6:

En régime permanent, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est lié à ses sources $\vec{J}(M)$ par la relation locale (forme locale du théorème d'Ampère) suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) \quad (\text{XI.11})$$

REMARQUE - (IV.5) - 2:

Cette relation, de caractère fondamental ^a contient le vecteur densité volumique de courant \vec{J} et n'a donc de sens que dans le cas des distributions volumiques de courant, les cas filiformes et surfaciques n'étant que des modèles limites.

a. nous verrons dans le prochain chapitre qu'elle est l'une des 4 équations fondamentales de l'électromagnétisme (écrite ici en régime statique)

EXEMPLE D'EXPLOITATION : détermination par analyse locale du champ magnétique produit par un tube infini de courant.

- Pour $r < a$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \end{array} \right) = \mu_0 J_0 \vec{e}_z$$

soit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \mu_0 J_0$$

qui intégré donne :

$$B_\theta = B(r) = \mu_0 J_0 \cdot \frac{r}{2} + \frac{K_1}{r}$$

En outre, le champ étant nul sur l'axe (le champ est perpendiculaire à deux plans passant par l'axe donc nécessairement nul!), on a $K_1 = 0$

donc :

$$\boxed{\vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \cdot \vec{e}_\theta}$$

- Pour $r > a$:

$$\text{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = 0$$

soit après intégration :

$$B_\theta = B(r) = \frac{K_2}{r}$$

NB : on admet pour une distribution volumique la continuité du champ en $r = a$: $B(r = a^-) = B(r = a^+) \implies K_2 = \frac{\mu_0 J_0}{2} \cdot a^2$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2 r} \cdot \vec{e}_\theta}$$

V Analyse topographique du champ magnétique

V.1 Lignes et tubes de champ

a - Définitions

Les deux définitions qui suivent sont totalement identiques à celles formulées pour le champ électrostatique.

Considérons un champ magnétostatique \vec{B} . On appelle **ligne de champ**, la courbe tangente en tout point au vecteur champ magnétostatique.

On appelle tube de champ un faisceau de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé. Les lignes de champ sont tangentes à la surface d'un tube de champ, et donc perpendiculaires au vecteur de la surface latérale :

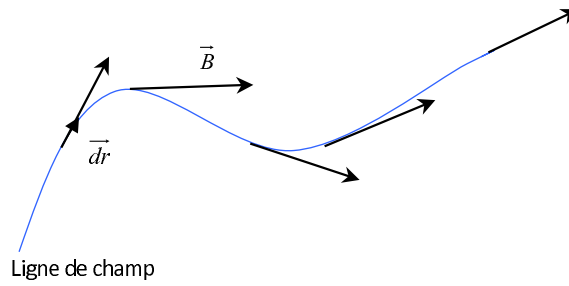


FIGURE XI.13 – Ligne de champ magnétostatique

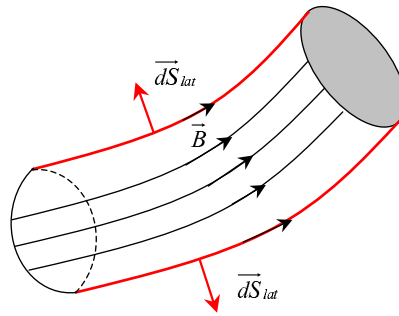


FIGURE XI.14 – Tube de champ magnétostatique

b - Orientation des lignes de champ magnétique

À RETENIR :

Règle : le champ magnétostatique «tourne autour des courants sources» en sens trigonométrique.

QUELQUES SITUATIONS SIMPLES :

**V.2 Interprétation des positions relatives des lignes de champs - resserrement ou éva-
sement**

Envisageons maintenant un tube de champ dont les lignes de champ se resserrent :

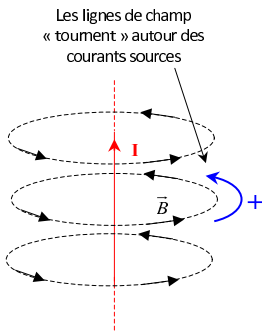
Appelons Σ la surface fermée du tube de champ telle que $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$.

Le flux du champ magnétique étant nul à travers toute surface fermée :

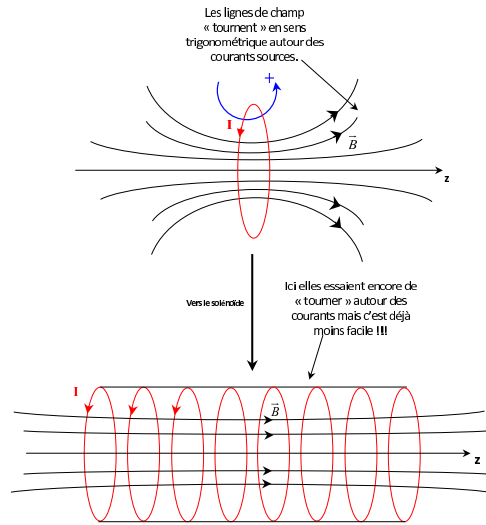
$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1}_{-\iint_{S_1} B_1 \times dS_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2}_{\iint_{S_2} B_2 \times dS_2} + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{lat}}_{=0}$$

qui donne en supposant le champ constant sur chaque base du tube :

• Fil rectiligne infini



• Spire circulaire → solénoïde



• Plan infini

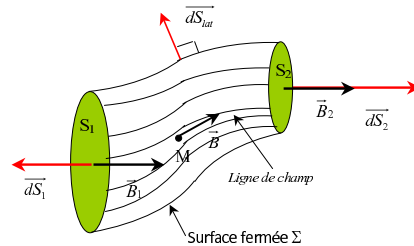
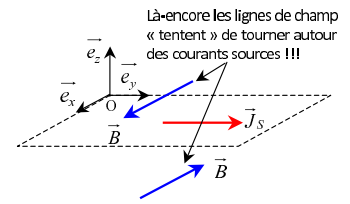


FIGURE XI.15 – Tube de champ resserré : les lignes de champ se resserrent

$$B_2 = B_1 \times \frac{S_1}{S_2} \implies \boxed{B_2 > B_1}$$

A RETENIR :

- Un resserrement des lignes de champ correspond à une augmentation de l'intensité du champ électrostatique.
- Un évasement des lignes de champ correspond à une diminution de l'intensité du champ électrostatique.

V.3 Quelques cartes de champs magnétiques

QUELQUES EXEMPLES DE LIGNES DE CHAMP MAGNÉTIQUE (2D) DE DISTRIBUTIONS DE COURANT CLASSIQUES :

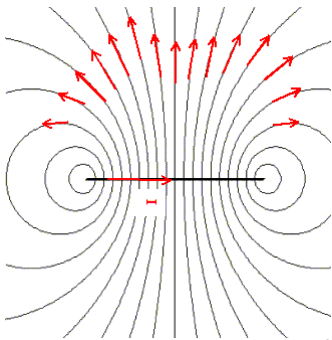


FIGURE XI.16 – Topographie des lignes de champ magnétique d'une spire

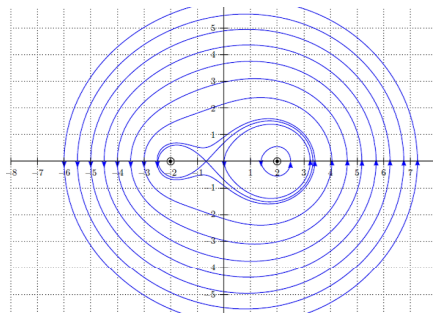


FIGURE XI.17 – Topographie des lignes de champ magnétique de deux fils ($I_1 \neq I_2$)

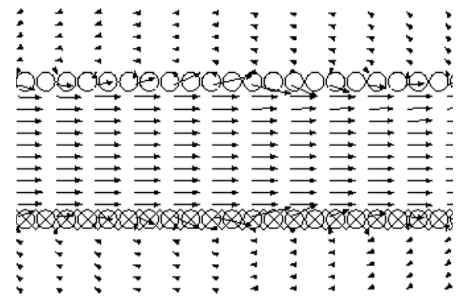


FIGURE XI.18 – Topographie des lignes de champ magnétique d'un solénoïde