CINETIQUE et PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (P.F.D)

Classe : .... **Prof**. : **Ouikassi**

1. Principe de la conservation de masse

1-1. Enoncé

Un système matériel D est à masse conservative si toute partie d de D est à masse constante au cours du temps.

1-2. Conséquences

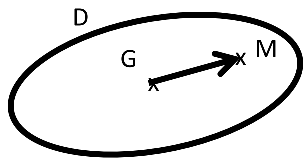
- Soit f une fonction scalaire définie relativement à la mesure de masse dm. On a le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_D f(M).dm\right] = \int_D \frac{d}{dt}[f(M)].dm$$

- Cette relation reste vraie dans le cas d'une fonction vectorielle.

2. Centre de gravité (Centre d'inertie)

2-1. Définition



Le centre de gravité du système matériel D est le point G tel que :

$$\int_{M \in D} \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}$$

2-2. Remarque

Soit A point quelconque :

$$\int_{M \in D} \overrightarrow{AM}.dm = m_D.\overrightarrow{AG}$$

2-3. Application : Voir Ex. 1 – TD 1

2-4. Propriétés

- Si le système matériel D possède un élément de symétrie matérielle alors G appartient à cet élément.
- Si $D = \bigcup_1^n S_i$

avec : S_i solide de masse m_i et de centre de gravité G_i ;

G : centre de gravité de D ;

A : point quelconque ;

Alors : $$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_1^n m_i \overrightarrow{AG_i}}{\sum_1^n m_i}$$ Relation du barycentre

2-5. Application : Voir Ex. 6 - TD. 1

2-6. Vitesse et accélération du centre de gravité

Soit D système matériel de centre de gravité G, et O origine d'un repère R. On a :

$$m_D.\vec{V}_{(G/R)} = \int_{M \in D} \vec{V}_{(M/R)}.dm \quad \text{et} \quad m_D.\vec{\Gamma}_{(G/R)} = \int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M/R)}.dm$$

- Démonstration : (Voir dém. 1 – Doc .3)
- Remarque :

Si $D = \bigcup_1^n S_i$, alors : $$\vec{V}_{(G/R)} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{V}_{(Gi/R)}}{\sum_1^n m_i} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_{(G/R)} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{\Gamma}_{(Gi/R)}}{\sum_1^n m_i}$$

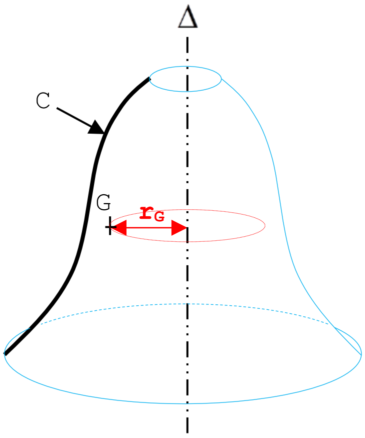
2-7. Théorèmes de GULDIN

Premier théorème

- Enoncé

L'aire de la surface engendrée par la rotation d'une courbe plane et homogène, autour d'un axe de son plan ne la traversant pas, est le produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

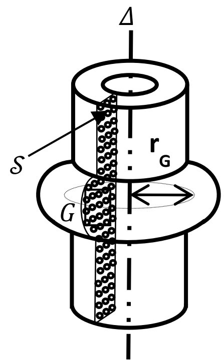
- Illustration



$\boldsymbol{S = 2\,\pi\, r_G\, \ell}$ Avec : S est l'aire de la surface, et ℓ longueur de C

- Application : Voir Ex. 3 - TD. 1

Deuxième théorème



- Enoncé

Le volume engendré par la rotation d'une surface plane et homogène, autour d'un axe de son plan ne la traversant pas, est le produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité : $\boldsymbol{V = 2\,\pi\, r_G\, S}$

- Application : Voir Ex. 2 - TD. 1

3. Opérateur d'inertie d'un solide S en un point Q

3-1. Définition

L'opérateur d'inertie du solide S au point Q quelconque, appliqué au vecteur $\vec{u}$ a pour expression :

$$\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{u})} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM}\right).dm$$

- Remarque :

Cet opérateur est linéaire et symétrique ; il est alors représentable par une matrice 3x3 symétrique, notée $\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)}$ telle que:

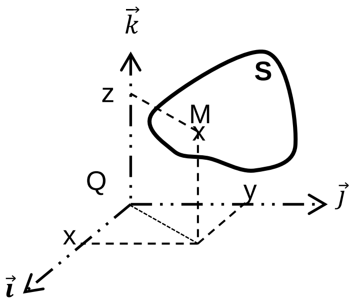
$$\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{u})} = \bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)}.\vec{u}$$

Cette matrice est appelée : ***Matrice d'inertie du solide S au point Q.***

3-2. Expressions des éléments de la matrice d'inertie

Dans la base orthonormée directe $(\vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}\,)$ on pose : $\overrightarrow{QM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

On a alors :



$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S xy.dm & -\int_S xz.dm \\ -\int_S xy.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S yz.dm \\ -\int_S xz.dm & -\int_S yz.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

- Démonstration : Voir dém. 2 – Doc. 3

Cette matrice est habituellement notée : $\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$

- Définitions :

- A, B et C sont les **moments d'inertie** de S autour des axes $(Q,\vec{i}\ ),(Q,\vec{j}\ )\ et\ (Q,\vec{k}\ )$ respectivement (en Kg.m^2) ;
- D, E et F sont les **produits d'inertie** (en Kg.m^2).

- **Application** : Voir Ex. 1 - TD. 2

3-3. Base principale d'inertie et Moments principaux d'inertie

La matrice d'inertie est symétrique, elle est alors diagonalisable.

C'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée directe $(\overrightarrow{x_p},\overrightarrow{y_p},\overrightarrow{z_p})$ telle que :

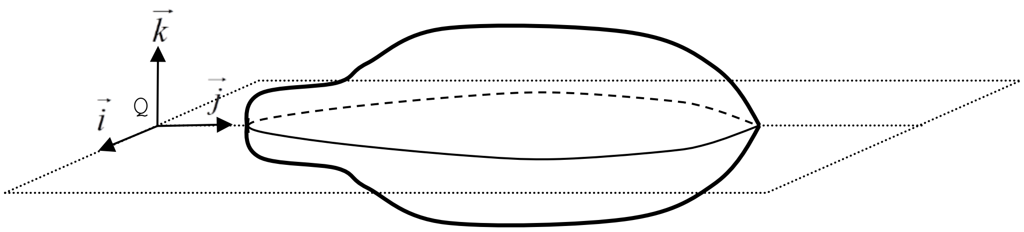
$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_P},\ \overrightarrow{y_P},\ \overrightarrow{z_P})}$$

- A_p, B_p et C_p sont appelés : moments **principaux** d'inertie ;
- Les axes $(Q,\overrightarrow{x_p})$, $(Q,\overrightarrow{y_p})$ et $(Q,\overrightarrow{z_p})$ sont appelés : axes **principaux** d'inertie.
- La base $(\overrightarrow{x_p},\overrightarrow{y_p},\overrightarrow{z_p})$ est appelée : base **principale** d'inertie.

3-4. Effet de la symétrie matérielle d'un solide sur la forme de sa matrice d'inertie

1er cas : S possède un plan de symétrie matérielle

$(Q,\vec{i},\vec{j})$ plan de symétrie matérielle de S.



On alors :

$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

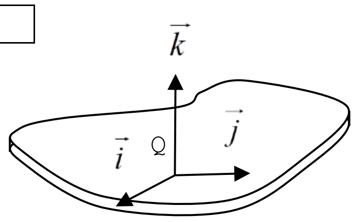
- Démonstration : Voir dém. 3 – Doc. 3

- Conclusion : si S possède un plan de symétrie matérielle alors l'axe ⊥ à ce plan est axe **principal d'inertie**.

- Remarque : Si S possède deux plans de symétrie matérielle perpendiculaires, alors sa matrice d'inertie est **diagonale**.

- **Application** : Voir Ex. 2 - TD. 2

2ème cas : S est une plaque plane



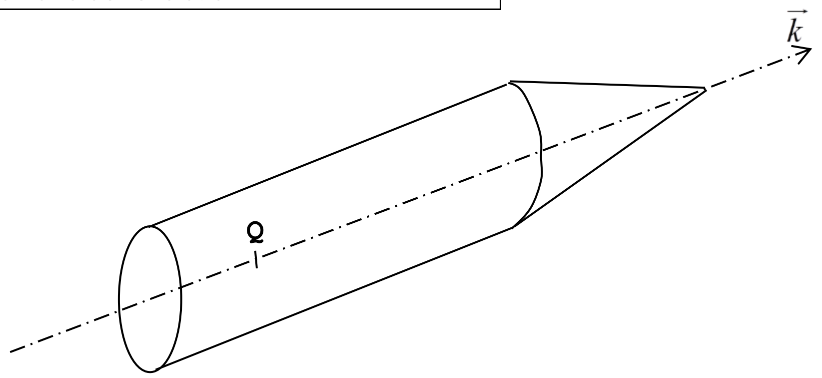
On alors :

$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$$

- Démonstration : Voir dém. 4 – Doc. 3

- Conclusion : si S est une plaque plane alors l'axe ⊥ à son plan est axe **principal d'inertie**, et le moment d'inertie par rapport à cet axe est la **somme** des deux autres moments d'inertie.

3ème cas : S possède un axe de révolution



On a alors : $$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{k})}$$

- Démonstration : Voir dém. 5 – Doc. 3

3-5. Application : Voir Ex. 3 - TD. 2

3-6. Matrice d'inertie des solides usuels : Voir Document 2.

3-7. Matrice d'inertie d'un ensemble de solides

Soit $D = \bigcup_{1}^{n} S_i$, on a alors : $\bar{\bar{I}}_{(Q,\ D)} = \sum_1^n \bar{\bar{I}}_{(Q,\ S_i)}$

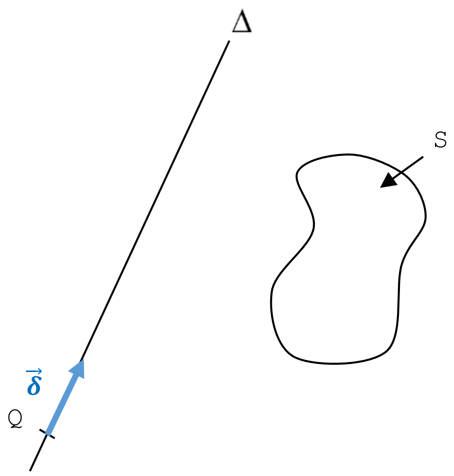
3-8. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

On considère un solide S et Q point quelconque :

Δ est une droite passant par Q et de directeur $\vec{\delta}$.

Le moment d'inertie de S par rapport à Δ est :

$$J_{(S/\Delta)} = \vec{\delta}^t . \left[\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} . \vec{\delta}\right]$$



- Démonstration : Voir dém. 6 – Doc. 3

3-9. Théorème de HUYGENS

S : solide de centre de gravité G.

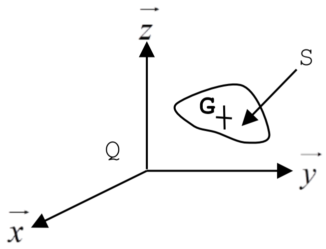
Q : point quelconque.

Le théorème de HUYGENS s'écrit : $\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \bar{\bar{I}}_{(G,\ S)} + \bar{\bar{I}}_{(Q,\ M_S,\ G)}$

- Démonstration : Voir dém. 7 – Doc. 3

- Remarque :

Soit $\overrightarrow{QG} = X_G \vec{x} + Y_G \vec{y} + Z_G \vec{z}$, alors :



$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ M_S,\ G)} = M_S \begin{bmatrix} Y_G{}^2 + Z_G{}^2 & -X_G Y_G & -X_G Z_G \\ -X_G Y_G & X_G{}^2 + Z_G{}^2 & -Y_G Z_G \\ -X_G Z_G & -Y_G Z_G & X_G{}^2 + Y_G{}^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})}$$

- Application : Voir Ex. 4 - TD. 2

4. Torseur cinétique

4-1. Définition

Le torseur cinétique du système matériel D, dans son mouvement par rapport à un repère R, en un point Q quelconque est :

$$\{\mathcal{C}_{(D/R)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{c(D/R)} \\ \vec{\sigma}_{Q(D/R)} \end{Bmatrix}_Q = \begin{Bmatrix} \int_{M \in D} \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm \\ \int_{M \in D} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm \end{Bmatrix}_Q$$

- Sa résultante est appelée : résultante Cinétique de D dans son mouvement par rapport à R (ou quantité de mouvement) (en Kg.m.S^{-1}) ;
- Son moment est appelé : moment cinétique au point Q de D dans son mouvement par rapport à R (en Kg.m^2.S^{-1}).

4-2. Expressions pratiques

- Résultante cinétique :

Pour un système matériel D : $\vec{R}_{c\,(D/R)} = m_D . \vec{V}_{(G/R)}$

Démonstration : Voir dém. 8 – Doc. 3

- Moment cinétique :

Pour un solide S : $\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = \bar{\bar{I}}_{(Q\,,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)} + m . \overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{(Q,\ S/R)}$

Démonstration : Voir dém. 9 – Doc. 3

Cas particuliers : Voir Doc. 4

4-3. Torseur cinétique d'un ensemble de solides

Soit $D = \bigcup_1^n S_i$: $\{\mathcal{C}_{(D/R)}\} = \sum_1^n \{\mathcal{C}_{(Si/R)}\}$

- Résultante cinétique : $\vec{R}_{c\,(D/R)} = \sum_1^n \vec{R}_{c\,(Si/R)} = \sum_1^n m_i \,.\, \vec{V}_{(Gi/R)}$

- Moment cinétique : $\vec{\sigma}_{Q\,(D/R)} = \sum_1^n \vec{\sigma}_{Q\,(Si/R)} = \sum_1^n \left[\bar{\bar{I}}_{(Q\,,\ Si)} \cdot \vec{\Omega}_{(Si/R)} + m_i \,.\, \overrightarrow{QG_i} \wedge \vec{V}_{(Q,\ Si/R)} \right]$

5. Torseur dynamique

5-1. Définition

Le torseur dynamique du système matériel D, dans son mouvement par rapport à un repère R, en un point Q quelconque est :

$$\{\mathcal{D}_{(D/R)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{d(D/R)} \\ \vec{\delta}_{Q(D/R)} \end{Bmatrix}_Q = \begin{Bmatrix} \int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M/R)} \,.\, dm \\ \int_{M \in D} \vec{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M/R)} \,.\, dm \end{Bmatrix}_Q$$

- Sa résultante est appelée : résultante dynamique de D dans son mouvement par rapport à R (en Kg.m.S^{-2});
- Son moment est appelé : moment dynamique au point Q de D dans son mouvement par rapport à R (en Kg.m^2.S^{-2}).

5-2. Expressions pratiques

- Résultante dynamique

Pour un système matériel D : $\vec{R}_{d\,(D/R)} = m_D.\,\vec{\Gamma}_{(G/R)}$

Démonstration : Voir dém. 10 – Doc. 3

- Moment dynamique

Pour un système matériel D : $\vec{\delta}_{Q\,(D/R)} = \left[\frac{d\,\vec{\sigma}_{Q\,(D/R)}}{dt}\right]_R + m_D\,.\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G/R)}$

Démonstration : Voir dém. 11 – Doc. 3

Cas particuliers : Voir Doc. 4

5-3. Torseur dynamique d'un ensemble de solides

Soit $D = \bigcup_1^n S_i$: $\{\mathcal{D}_{(D/R)}\} = \sum_1^n \{\mathcal{D}_{(Si/R)}\}$

- Résultante dynamique : $\vec{R}_{d\,(D/R)} = \sum_1^n \vec{R}_{d\,(Si/R)} = \sum_1^n m_i\,.\,\vec{\Gamma}_{(Gi/R)}$
- Moment dynamique : $\vec{\delta}_{Q\,(D/R)} = \sum_1^n \vec{\delta}_{Q\,(Si/R)} = \sum_1^n \left(\left[\frac{d\,\vec{\sigma}_{Q\,(Si/R)}}{dt}\right]_R + m_i\,.\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(Gi/R)} \right)$

6. Energie cinétique :

6-1. Définition

L'énergie cinétique d'un système matériel D dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$T_{(D/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in D} \vec{V}^2_{(M/R)} \,.\, dm$$

6-2. Expression pratique

Pour un solide S : $T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}_{(S/R)}\} \otimes \{\mathcal{C}_{(S/R)}\}$

Démonstration : Voir dém. 12 – Doc. 3 –

Cas particuliers : Voir Doc. 4

6-3. Pour un ensemble de solides

Soit $D = \bigcup_1^n S_i$: $T_{(D/R)} = \sum_1^n T_{(Si/R)} = \sum_1^n \frac{1}{2} \{\mathcal{V}_{(Si/R)}\} \otimes \{\mathcal{C}_{(Si/R)}\}$

7. P.F.D

7-1. Enoncé

Il existe un référentiel galiléen R_g dans lequel le torseur des actions mécaniques extérieures au système matériel (D) est égal au torseur dynamique de (D) dans son mouvement par rapport à R_g.

$$\left\{ \tau_{(\bar{D} \to D)} \right\} = \left\{ \mathcal{D}_{(D/Rg)} \right\}$$

7-2. Théorèmes généraux de la dynamique (TGD)

- **Théorème de la résultante dynamique (TRD)**

$$\vec{R}_{(\bar{D} \to D)} = \vec{R}_{d\,(D/Rg)}$$

- **Théorème du moment dynamique (TMD)**

  En un point A quelconque :

$$\vec{\mathfrak{M}}_{A\,(\bar{D} \to D)} = \vec{\delta}_{A\,(D/Rg)}$$

Ces deux théorèmes permettent d'obtenir 6 équations scalaires.

7.3. Utilisation des T.G.D

- **Equation de mouvement**

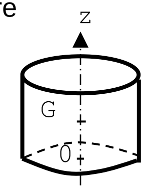
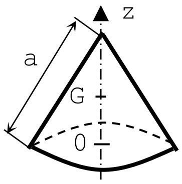
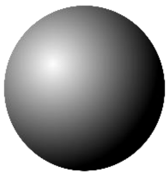
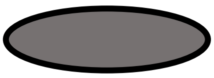
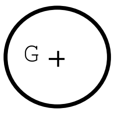
C'est une équation différentielle du 2ème ordre traduisant les TGD et dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

(Les seules inconnues sont les paramètres de mouvement, leurs premières et deuxièmes dérivées.

- **Equation intégrale première de mouvement (Eq. I.P)**

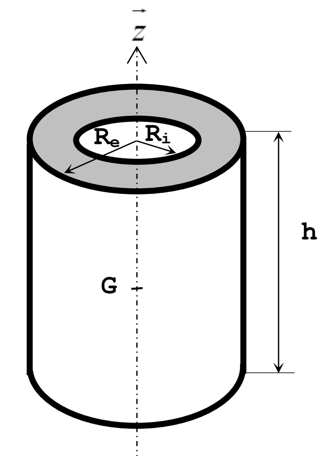
C'est une équation différentielle du premier ordre dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

Document 1 – surfaces et volumes usuels

Forme du solide	Centre de gravité	Surface latérale	Volume
Cylindre 	h: hauteur R: Rayon OG = h/2	$2\pi Rh$	πR^2h
Cône 	h: hauteur R: Rayon de la base OG = h/4	πRa	$\pi R^2h/3$
 Sphère	R: Rayon G: centre de la sphère	$4\pi R^2$	$4\pi R^3/3$
Dique 	R: Rayon G: centre du disque	πR^2	
Cercle 	R: Rayon G: centre du cercle	Longueur $2\pi R$	

Document 2 – Matrices d'inertie des solides usuels

Cylindre creux

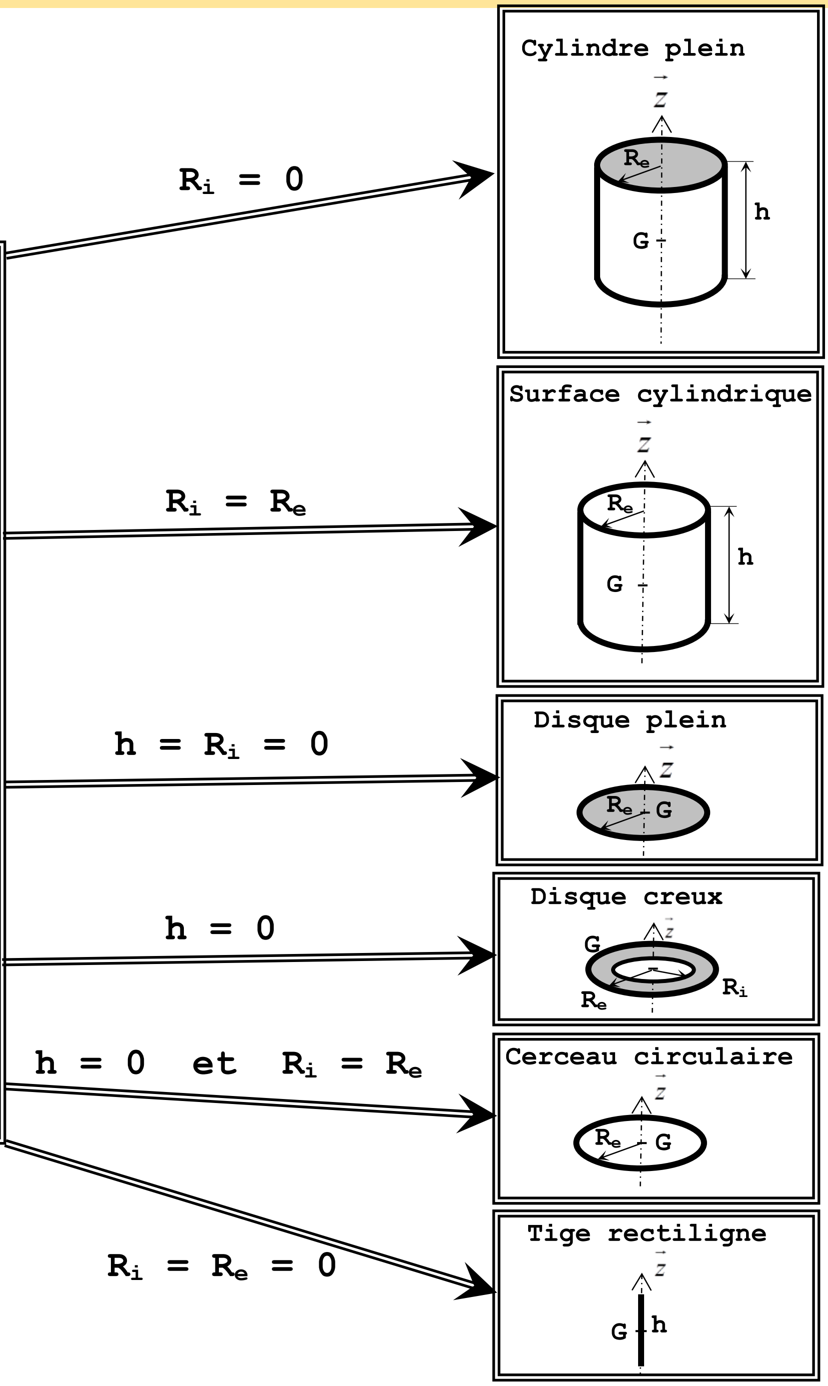


$$\bar{\bar{I}}_{(G,\text{cylindre creux})} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

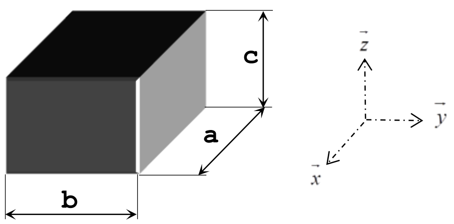
$$A = m\left(\frac{R_e^2 + R_i^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$

$$C = m\,\frac{R_e^2 + R_i^2}{2}$$

m : masse ;
G : centre de gravité.

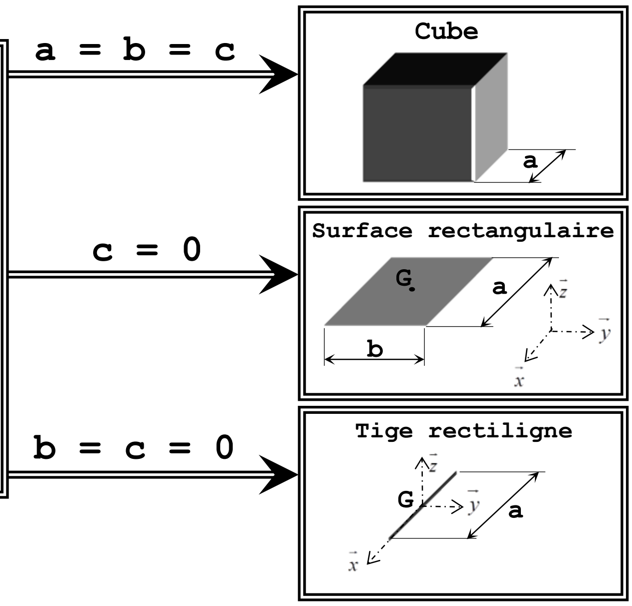


Parallélépipède rectangle



$$\bar{\bar{I}}_{(G,\text{Paral.Rect.})} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

m : masse ; G : centre de gravité



Document 3 – Démonstrations du cours

Dém. 1

$$m_D.\overrightarrow{OG} = \int_{M\in D} \overrightarrow{OM}.dm \quad \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[m_D.\overrightarrow{OG}\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\int_{M\in D}\overrightarrow{OM}.dm\right]_R \Leftrightarrow m_D.\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG}\right]_R = \int_{M\in D}\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}\right]_R dm$$

$$\text{d'où : } m_D.\ \vec{V}_{(G/R)} = \int_{M\in D} \vec{V}_{(M,\ D/R)}.dm$$

Et on a aussi : $m_D.\ \vec{\Gamma}_{(G/R)} = \int_{M\in D}\vec{\Gamma}_{(M,\ D/R)}.dm$

Dém. 2

Dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, la matrice d'inertie du solide **S** au point **Q** a pour expression :

$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$$

$$\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\imath})} \qquad \vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\jmath})} \qquad \vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{k})}$$

$$\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\imath})} = \int_{M\in S}\overrightarrow{QM}\wedge\left(\vec{\imath}\wedge\overrightarrow{QM}\right).dm = \int_{M\in S}\left[\ \overrightarrow{QM}^2.\vec{\imath}\ -\left(\overrightarrow{QM}\wedge\vec{\imath}\right).\overrightarrow{QM}\ \right].dm$$

On pose : $\overrightarrow{QM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

Donc : $\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\imath})} = \int_{M\in S}\left[(x^2+y^2+z^2)\,\vec{\imath}\ - x.\overrightarrow{QM}\ \right].dm = \int_{M\in S}\left[(x^2+y^2+z^2)\,\vec{\imath}\ - x.(x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k})\right].dm$

$$\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\imath})} = \left[\int_{M\in S}(y^2+z^2)\,dm\right]\vec{\imath}\ \text{-}\ \left[\int_{M\in S}x\,y\,.dm\right]\vec{\jmath}\ - \left[\int_{M\in S}x\,z\,.dm\right]\vec{k}$$

On déduit alors que :

$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} \int_{M\in S}(y^2+z^2)\,dm & \blacksquare & \blacksquare \\ \int_{M\in S}x\,y\,.dm & \blacksquare & \blacksquare \\ \int_{M\in S}x\,z\,.dm & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$$

De même : $\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\jmath})} = \int_{M\in S}\overrightarrow{QM}\wedge\left(\vec{\jmath}\wedge\overrightarrow{QM}\right).dm = \int_{M\in S}\left[\ \overrightarrow{QM}^2.\vec{\jmath}\ -\left(\overrightarrow{QM}\wedge\vec{\jmath}\right).\overrightarrow{QM}\ \right].dm$

$$= \int_{M\in S}\left[(x^2+y^2+z^2)\,\vec{\jmath}\ - y.(x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k})\right].dm$$

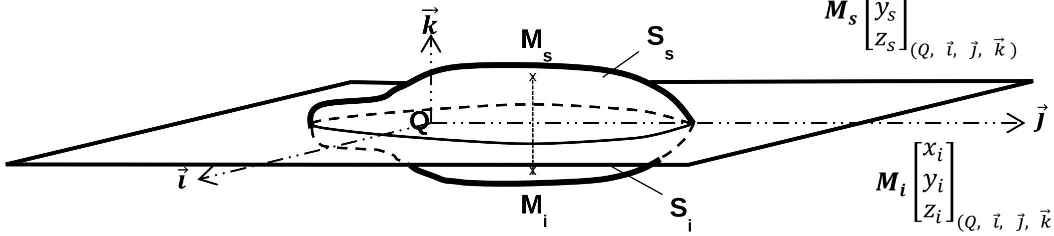
Donc : $\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\jmath})} = -\left[\int_{M\in S}x\,y\,.dm\right]\vec{\imath} + \left[\int_{M\in S}(x^2+z^2)\,dm\right]\vec{\jmath}\ - \left[\int_{M\in S}y\,z\,.dm\right]\vec{k}$

Et : $\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{k})} = -\left[\int_{M\in S}x\,z\,.dm\right]\vec{\imath} - \left[\int_{M\in S}y\,z\,.dm\right]\vec{\jmath} + \left[\int_{M\in S}(x^2+y^2)\,dm\right]\vec{k}$

On obtient finalement :

$$\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\int_S(y^2+z^2).dm} & \boldsymbol{-\int_S xy\,.dm} & \boldsymbol{-\int_S xz\,.dm} \\ \boldsymbol{-\int_S xy\,.dm} & \boldsymbol{\int_S(x^2+z^2).dm} & \boldsymbol{-\int_S yz\,.dm} \\ \boldsymbol{-\int_S xz\,.dm} & \boldsymbol{-\int_S yz\,.dm} & \boldsymbol{\int_S(x^2+y^2).dm} \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$$

Dém. 3



$$M_s \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}_{(Q,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$$

$$M_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{(Q,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ -z_s \end{bmatrix}_{(Q,\ \vec{\imath}\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$$

Le plan (Q, $\vec{x}$, $\vec{y}$) est plan de symétrie matérielle du solide S. On peut écrire : $S = S_s \cup S_i$, avec $S_s = S_i$

- $D = \int_S y\,z\,.dm = \int_{Ss} y_s\ z_s\,.dm + \int_{Si} y_i\ z_i\,.dm = \int_{Ss} y_s\ z_s\,.dm - \int_{Ss} y_s\ z_s\,.dm = 0$
- $E = \displaystyle\int_S x\,z\,.dm = 0$

Donc : $\quad \bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$

Dém. 4

Le solide S est contenu dans le plan $\left(Q,\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,\right)$, donc : $\boldsymbol{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}_{(Q,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$

- $A = \int_S (\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2).\boldsymbol{dm} = \int_S y^2.dm$
- $B = \int_S (\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{z}^2)\,.\boldsymbol{dm} = \int_S \boldsymbol{x}^2.dm$
- $A + B = \displaystyle\int_S (x^2 + y^2).dm = C$
- $E = \int_S x\,z\,.dm = 0$
- $D = \int_S y\,z\,.dm\,0$

Donc : $\quad \bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$

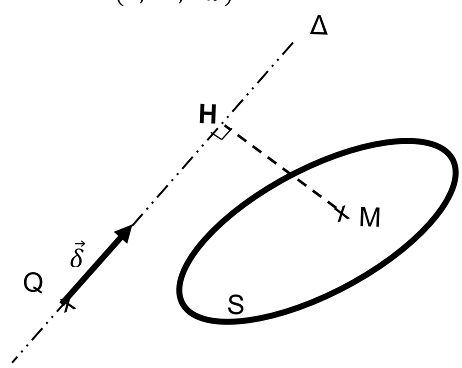
Dém. 5

Les plans (Q, $\vec{\imath}$, $\vec{k}$) et $\left(Q,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\,\right)$ sont plans de symétrie matérielle du solide S, Donc : $\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$

Les axes (Q, $\vec{\imath}$) et $\left(Q,\ \vec{\jmath}\,\right)$ jouent le même rôle pour S, Donc : $\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})}$

Tous les axes passant par Q jouent le même rôle pour S, Donc : $\bar{\bar{I}}_{(Q,\ S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-,\ -,\ \vec{k})}$

Dém. 6



$$J_{S/\Delta} = \int_{M \in S} \overrightarrow{MH}^2\ .dm$$

On a : $\quad \overrightarrow{MH}^2 = \overrightarrow{QM}^2 - \overrightarrow{QH}^2 = \overrightarrow{QM}^2 - \left(\overrightarrow{QM}\,.\,\vec{\delta}\,\right)^2$

$$= \overrightarrow{QM}^2.\ \ \vec{\delta}^2 - \left(\overrightarrow{QM}\,.\,\vec{\delta}\,\right)^2$$

$$= \vec{\delta}\,.\left[\overrightarrow{QM}^2\,\vec{\delta} - \left(\overrightarrow{QM}\,.\ \vec{\delta}\,\right)\overrightarrow{QM}\right] = \vec{\delta}\,.\ \left[\overrightarrow{QM} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{QM}\ )\right]$$

On injecte cette expression dans la relation précédente :

$$J_{S/\Delta} = \int_{M \in S} \overrightarrow{MH}^2 .\mathrm{dm} = \int_{M \in S} \vec{\delta} . \left[\overrightarrow{QM} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{QM}) \right] .\mathrm{dm} = \vec{\delta} . \int_{M \in S} \left[\overrightarrow{QM} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{QM}) \right] .\mathrm{dm}$$

$J_{S/\Delta} = \vec{\delta} . \vec{\boldsymbol{J}}_{(\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{S},\ \vec{\boldsymbol{u}})}$ D'où l'on tire : $J_{S/\Delta} = \vec{\delta} . \left[\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{(\mathrm{Q}\ ,\ \boldsymbol{S})} . \vec{\delta} \right]$

Dém. 7

Pour un vecteur $\vec{u}$ quelconque : $\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{u})} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM} \right) .dm$

Avec : $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GM}$, on aura : $\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{u})} = \int_{M \in S} \left(\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GM} \right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM} \right) .dm$

$$\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{u})} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM} \right) .dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM} \right) .dm$$

$$\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{u})} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM} \right) .dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG} \right) .dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm$$

- $\int_{M \in S} \overrightarrow{QG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM} \right) .dm = \overrightarrow{QG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} .\ \mathrm{dm} \right) = m\, \overrightarrow{QG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG} \right) = \vec{J}_{(Q, \{\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{m}\},\ \vec{u})}$
- $\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG} \right) .dm = \left(\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} .\ \mathrm{dm} \right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG} \right) = \vec{0}$
- $\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm = \vec{J}_{(G,\ S,\ \vec{u})}$

Donc : $\vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{u})} = \vec{J}_{(G,\ S,\ \vec{u})} + \vec{J}_{(Q, \{\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{m}\},\ \vec{u})}$

Soit alors : $\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{(\mathbf{Q},\boldsymbol{S})} . \vec{\boldsymbol{u}} = \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{(\mathbf{G},\boldsymbol{S})} . \vec{\boldsymbol{u}} + \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{(\mathbf{Q},\ \{\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{m}\})} . \vec{\boldsymbol{u}}$

On en déduit finalement que : $\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{(\mathbf{Q},\boldsymbol{S})} = \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{(\mathbf{G},\boldsymbol{S})} + \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}_{(\mathbf{Q},\ \{\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{m}\})}$

Dém. 8

Nous avons déjà montré que : $\int_{M \in D} \vec{V}_{(M,\ D/R)} .dm = m_D . \vec{V}_{(G/R)}$

Donc : $\vec{R}_{c\,(D/R)} = \int_{M \in D} \vec{V}_{(M,\ D/R)} .dm = m_D . \vec{V}_{(G/R)}$

Dém. 9

On a : $\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M,\ S/R)}\, dm$

Pour le point Q lié au solide S, on peut écrire : $\vec{V}_{(M,\ S/R)} = \vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}$

Donc : $\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)})\, \mathrm{dm}$

$$\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = \int_{M \in S} \left(\overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(Q,\ S/R)} \right) dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)})\, dm$$

$$\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = \int_{M \in S} \left(\overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(Q,\ S/R)} \right) dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{QM})\, dm$$

$$\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = \left(\int_{M \in S} \overrightarrow{QM}\, dm \right) \wedge \vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \vec{J}_{(Q,\ S,\ \vec{\Omega}(S/R))}$$

$$\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = m\, \overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \bar{\bar{I}}_{(Q,S)} . \vec{\Omega}_{(S/R)}$$

Dém. 10

Nous avons déjà montré que : $\int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M,\ D/R)} . dm = m_D . \vec{\Gamma}_{(G/R)}$

Donc : $\vec{R}_{d\,(D/R)} = \int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M,\ D/R)} . dm = m_D . \vec{\Gamma}_{(G/R)}$

Dém. 11

On a :
$$\left[\frac{d\,\vec{\sigma}_{Q\,(D/R)}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\left(\int_{M \in D} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M,\ D/R)}\, dm\right)}{dt}\right]_R = \int_{M \in D} \left[\frac{d\left(\overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M,\ D/R)}\right)}{dt}\right]_R dm$$

$$= \int_{M \in D} \left(\left[\frac{d\,\overrightarrow{QM}}{dt}\right]_R \wedge \vec{V}_{(M,D/R)} + \overrightarrow{QM} \wedge \left[\frac{d\,\vec{V}_{(M,D/R)}}{dt}\right]_R \right) dm$$

$$\left[\frac{d\,\vec{\sigma}_{Q\,(D/R)}}{dt}\right]_R = \int_{M \in D} \left(\left[\vec{V}_{(M,D/R)} - \vec{V}_{(Q/R)}\right] \wedge \vec{V}_{(M,\ D/R)} + \overrightarrow{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M,D/R)} \right) dm$$

Donc :
$$\left[\frac{d\,\vec{\sigma}_{Q\,(D/R)}}{dt}\right]_R = \int_{M \in D} \left(-\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(M,D/R)} + \overrightarrow{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M,D/R)} \right) dm$$

$$= \int_{M \in D} -\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(M,D/R)}\ dm + \int_{M \in D} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M,D/R)}\,)\ dm$$

$$= -\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \int_{M \in D} \vec{V}_{(M,\ D/R)}\ dm + \vec{\delta}_{Q\,(D/R)} = -\,m_D\,.\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G/R)} + \vec{\delta}_{Q\,(D/R)}$$

D'où il vient : $\vec{\delta}_{Q\,(D/R)} = \left[\frac{d\,\vec{\sigma}_{Q\,(D/R)}}{dt}\right]_R + m_D\,.\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G/R)}$

Dém. 12

On a :
$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in S} \vec{V}^2_{(M,\ D/R)} . dm = \frac{1}{2} \int_{M \in S} \vec{V}_{(M,\ S/R)} . \vec{V}_{(M,\ S/R)}\ dm$$

On sait que : $\vec{V}_{(M,\ S/R)} = \vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}$

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in S} \vec{V}_{(M,\ S/R)} . \left[\vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}\right] dm$$

donc :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in S} \left[\vec{V}_{(M,\ S/R)} . \vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \vec{V}_{(M,\ S/R)} . \left(\overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}\right)\right] dm$$

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \left[m\ \vec{V}_{(G,\ S/R)} . \vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} . \int_{M \in S} \vec{V}_{(M,\ S/R)} \wedge \overrightarrow{MQ}\ dm \right]$$

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \left[m\ \vec{V}_{(G,\ S/R)} . \vec{V}_{(Q,\ S/R)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} . \vec{\sigma}_{Q\ (S/R)} \right]$$

D'où : $T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}_{(S/R)}\} . \{\mathcal{C}_{(S/R)}\}$

Cas Particuliers

➢ Liés à la nature du point Q

✓ **Au centre d'inertie G de S (ou D) :**

- Moment cinétique : $\vec{\sigma}_{G\,(S/R)} = \bar{\bar{I}}_{(G\,,\,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)}$
- Moment dynamique : $\vec{\delta}_{G\,(D/R)} = \left[\dfrac{d\,\vec{\sigma}_{G\,(D/R)}}{dt}\right]_R$

- ✓ R : repère ;
- ✓ S : solide ;
- ✓ D : système matériel ;
- ✓ G : centre de gravité ;
- ✓ M : masse.

✓ **En un point Q fixe dans le repère R :**

- Moment cinétique : $\vec{\sigma}_{Q\,(S/R)} = \bar{\bar{I}}_{(Q\,,\,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)}$
- Moment dynamique : $\vec{\delta}_{Q\,(D/R)} = \left[\dfrac{d\,\vec{\sigma}_{Q\,(D/R)}}{dt}\right]_R$

➢ Liés à la nature du mouvement du solide S par rapport à R

✓ **solide en translation par rapport à R :**

- Moment cinétique : $\vec{\sigma}_{G\,(S/R)} = \vec{0}$
- Moment dynamique : $\vec{\delta}_{G\,(S/R)} = \vec{0}$
- Energie cinétique : $T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\, m\, \vec{V}^{\,2}_{(\forall\, point\ ,S/R)}$

✓ **solide en rotation autour d'un axe $(A,\vec{u})$, fixe dans le repère R :**

- Moment cinétique : $\vec{u}\,.\,\vec{\sigma}_{A\,(S/R)} = J\,.\,\dot{\theta}$
- Moment dynamique : $\vec{u}\,.\,\vec{\delta}_{A\,(S/R)} = J\,.\,\ddot{\theta}$
- Energie cinétique : $T_{(S/R)} = \frac{1}{2}\, J\,.\,\dot{\theta}^2$

- ✓ J : moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $(A,\ \vec{u}\,)$;
- ✓ θ : paramètre de rotation du solide S autour de l'axe$(A,\ \vec{u}\,)$.

✓ **solide en mouvement plan, dans le plan $(A,\vec{x},\vec{y})$, de R :**

- Energie cinétique : $T_{(S\,/\,R)} = \frac{1}{2}\left[m\, \vec{V}^2_{(G,S/R)} + J_z\ \dot{\theta}^2\right]$

- ✓ J_z : moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $(G,\ \vec{z}\,)$;
- ✓ θ : paramètre de rotation du solide S autour de l'axe$(A,\ \vec{u}\,)$.

➢ Liés à la nature du solide S

✓ **Pour un solide $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ assimilé à une masse m ponctuelle en A :**

- Moment cinétique : $\vec{\sigma}_{A\,(\mathcal{S}_\mathcal{P}/R)} = \vec{0}$
- Moment dynamique : $\vec{\delta}_{A\,(\mathcal{S}_\mathcal{P}/R)} = \vec{0}$
- Energie cinétique : $T_{(\mathcal{S}_\mathcal{P}/R)} = \frac{1}{2}\, m\, \vec{V}^{\,2}_{(A/R)}$

Notion d'équilibrage dynamique

Un solide **S** est équilibré dynamiquement autour de son axe de rotation **Δ** si et seulement si :

✓ **Son centre d'inertie est situé sur Δ (Equilibrage statique) ;**

✓ **Δ est axe principal d'inertie de S.**