Chapitre 27

Espaces euclidiens

Sommaire

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I PRODUIT SCALAIRE

1) Définitions

Définition 27.1

Un produit scalaire sur E *est une forme bilinéaire sur* E*, généralement notée* $(.|.)$*, qui à tout couple de vecteurs* (x,y) *associe le réel* $(x|y)$*, et qui vérifie :*

- $\forall\ x,y\in \mathrm{E}, (x|y)=(y|x)$ *(symétrie).*
- $\forall\ x\in \mathrm{E}, (x|x)\geqslant 0$ *(positive).*
- $\forall\ x\in \mathrm{E}$*, si* $(x|x)=0$*, alors* $x=0$ *(définie).*

Lorsque E *est muni d'un produit scalaire* $(.|.)$*, on dit que* $(\mathrm{E},(.|.))$ *est un espace euclidien s'il est de dimension finie, ou un espace préhilbertien réel sinon.*

☞**Exemples** :

- Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$: $(x|y)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- $\mathrm{E}=\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ et $\forall\ f,g\in\mathrm{E}, (f|g)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ (avec $a<b$).
- $\mathrm{E}=\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall\ \mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{E}, (\mathrm{P}|\mathrm{Q})=\int_a^b \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,dt \text{ (avec } a<b)$$

- Pour $x,y\in\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, mais pas $\psi(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$.

– $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts, on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall\, P, Q \in E, (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

Théorème 27.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$\forall\, x, y \in E, (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y)$. De plus :
$(x|y)^2 = (x|x)(y|y) \iff (x, y)$ est liée (cas d'égalité).

Preuve : Si y est nul il n'y a rien à démontrer (même pour l'égalité) car on a forcément $(x|y) = 0$ par linéarité à droite. Supposons y non nul, alors $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, (x+\lambda y|x+\lambda y) \geqslant 0$, ce qui donne en développant : $\lambda^2(y|y) + 2\lambda(x|y) + (x|x) \geqslant 0$, on a un trinôme du second degré en λ de signe constant, le discriminant doit être négatif ou nul (s'il était strictement positif il y aurait deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$ et le trinôme serait strictement négatif dans l'intervalle ouvert $]r_1; r_2[$), ce qui donne l'inégalité.

S'il y a l'égalité alors cela signifie que le discriminant est nul, donc le trinôme admet une racine double λ_0, et donc $(x+\lambda_0 y|x+\lambda_0 y) = 0$, ce qui entraîne $x + \lambda_0 y = 0$ et donc la famille (x, y) est liée.

Réciproquement, si la famille est liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$, d'où $(x|y)^2 = \lambda^2(y|y)^2 = (\lambda y|\lambda y)(y|y) = (x|x)(y|y)$.
□

Définition 27.2 (norme euclidienne)

*Soit $x \in (E, (.|.))$, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$, c'est la norme euclidienne de x. Un vecteur de norme égale à 1 est dit **unitaire**. L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut alors s'écrire : $|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$.*

Remarque 27.1 – *Si x est non nul alors le vecteur $\frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire.*

Théorème 27.2 (Propriétés)

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Définition 27.3 (écart angulaire)

*Soient x et y deux vecteurs non nuls, on a $\frac{|(x|y)|}{\|x\|\|y\|} \leqslant 1$, donc en posant $\theta = \arccos\left(\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0;\pi]$, on peut écrire : $(x \mid y) = \|x\|\|y\|\cos(\theta)$, ce réel θ est appelé **écart angulaire** entre les vecteurs x et y. Lorsque $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}]$ (c'est à dire $(x \mid y) \geqslant 0$) on dit que les vecteurs sont dans le même sens, et lorsque $\theta \in [\frac{\pi}{2};\pi]$ (c'est à dire $(x \mid y) \leqslant 0$) on dit que les vecteurs sont dans le sens contraire.*

★**Exercice 27.1** *Soient $x, y \in E$ deux vecteurs non nuls, montrer que :*

1/ $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x+y\|$.

2/ *x et y sont colinéaires si et seulement si leur écart angulaire vaut 0 ou π (pour x et y non nuls).*

3/ $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists\, \alpha > 0, x = \alpha y$.

☞**Exemples :**

– $E = \mathbb{R}^n$, avec le produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

– $E = \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ avec le produit scalaire : $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\left(\int_a^b f(t)fg(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ et $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$.

À retenir : Relations entre le produit scalaire et la norme

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$.
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (théorème de la médiane ou identité du parallélogramme).
- $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x+y\|^2\right)$ (identités de polarisation).

2) Orthogonalité

Définition 27.4

Soient $x, y \in E$, et soient F, G deux s.e.v de E, on dit que :
- *x et y sont orthogonaux lorsque $(x|y) = 0$.*
- *F et G sont orthogonaux lorsque $\forall\ x \in F, \forall\ y \in G, (x|y) = 0$.*

On appelle ***orthogonal de*** *A (une partie de E), l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A, notation : $A^{\perp} = \{x \in E \ /\ \forall\ y \in A, (x|y) = 0\}$. On remarquera que dire que F et G sont orthogonaux équivaut à $F \subset G^{\perp}$, ou encore $G \subset F^{\perp}$.*

Remarque 27.2 :
- *Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul, i.e. $E^{\perp} = \{0\}$, car le produit scalaire est défini.*
- *Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur écart angulaire vaut $\frac{\pi}{2}$.*

★**Exercice 27.2** *Si A est une partie de E (non vide), montrer que $A^{\perp}$ est un sev de E.*

Théorème 27.3 (de Pythagore)

Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Preuve : On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$, l'équivalence en découle. □

Théorème 27.4

Si F est un s.e.v de E, alors $F^{\perp}$ est un s.e.v de E en somme directe avec F.

Preuve : Pour $y \in E$, on pose $f_y : E \to \mathbb{R}$ définie par $f_y(x) = (x|y)$, alors f_y est une forme linéaire sur E, et il est facile de voir que $F^{\perp} = \bigcap_{y \in F} \ker(f_y)$, ce qui prouve que $F^{\perp}$ est un s.e.v de E. Si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors on doit avoir $(x|x) = 0$, d'où $x = 0$. □

Propriétés :
- Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- Si A est une partie de E, alors $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
- Si F et G sont deux sev de E, alors $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Théorème 27.5

Si E est un espace euclidien de dimension n, et si F est un s.e.v de E de dimension p, alors $\dim(F^{\perp}) = n - p$, on a donc :

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Preuve : On sait que $\dim(F \oplus F^{\perp}) \leqslant n$, d'où $\dim(F^{\perp}) \leqslant n - p$.

Soit $f : E \to \mathbb{R}^p$ l'application définie par $f(x) = ((e_1|x), \ldots, (e_p|x))$ où $B = (e_1, \ldots, e_p)$ désigne une base de F, alors il est facile de voir que f est linéaire et que $\ker(f) = F^{\perp}$. D'après le théorème du rang, on a $n = \dim(F^{\perp}) + \mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F^{\perp}) + p$, ce qui donne $\dim(F^{\perp}) \geqslant n - p$, et donc $\dim(F^{\perp}) = n - p$. □

Attention !

Ce théorème est faux en dimension infinie. Par exemple dans $E = \mathbb{R}[X]$ avec le produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}\left[X, X^2, \ldots\right]$ est réduit au polynôme nul alors que $F \neq E$.

Quelques conséquences. Soit E un espace euclidien, F et G deux sev de E :
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
- $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Théorème 27.6 **(représentation des formes linéaires sur E)**

Soit E un euclidien et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, alors il existe un unique vecteur $a \in \mathrm{E}$ tel que $\forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = (a|x)$.

Preuve : Pour l'existence : si f est nulle alors on peut prendre $a = 0$. Si f est non nulle, alors $\ker(f)$ est un hyperplan de E, donc $\ker(f)^{\perp} = \mathrm{Vect}[u]$ est une droite vectorielle. Posons $\lambda = f(u)$ et prenons $a = \frac{\lambda}{\|u\|^2}u$. Il est facile de vérifier que pour tout $x \in \mathrm{E}, f(x) = (a|x)$.

Pour l'unicité : si b est un autre vecteur qui convient, alors $\forall\, x \in \mathrm{E}, (a-b|x) = 0$, donc $a - b = 0$. □

3) Bases orthonormales dans un euclidien

Définition 27.5

Une famille $(x_1,\ldots,x_p)$ de E est dite orthonormale lorsque $\forall\, i, j \in [\![1;p]\!], (e_i|e_j) = \delta_{ij}$. Cette famille est dite orthogonale lorsque $\forall\, i, j \in [\![1;p]\!], i \neq j \implies (e_i|e_j) = 0$.

Théorème 27.7

Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

Si $(e_1,\ldots,e_p)$ est une famille orthogonale, alors : $\|\sum_{k=1}^{p} e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\|e_i\|^2$.

Preuve : Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul, si $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_k = 0$, alors soit $i \in [\![1;p]\!]$, on a $(e_i|\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_k) = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k(e_i|e_k) = \lambda_i\|e_i\|^2 = 0$, ce qui entraîne $\lambda_i = 0$.

Pour la deuxième partie, on a $\|\sum_{i=1}^{p} e_i\|^2 = \sum_{i,j=1}^{p}(e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{p}\|e_i\|^2$. □

Cas particulier

Si E est un euclidien de dimension n, alors une famille orthonormale de n vecteurs est une base de E, on dit que l'on a une **base orthonormale** (b.o.n en abrégé). Par exemple, la base canonique que $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Théorème 27.8 **(intérêt d'une b.o.n)**

Soit $\mathfrak{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une b.o.n de E, alors $\forall\, x, y \in \mathrm{E}$:

- $x = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$, *autrement dit, la coordonnée de x sur e_i est $(x|e_i)$;*
- $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, *expression analogue au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$;*
- $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

avec $x_i = (x|e_i)$ et $y_i = (y|e_i)$ les coordonnés de x et de y.

Preuve : Soit $\mathrm{Coord}_{\mathfrak{B}}(x) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, on a $(x|e_k) = (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i|e_k) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(e_i|e_k) = \lambda_k$. Pour les deux autres points, il suffit de développer le produit scalaire. □

Attention !

Le théorème ci-dessus est fondamental et démontre l'interêt des b.o.n. dans les espaces euclidiens.

Théorème 27.9

Dans un espace euclidien, il existe toujours des bases orthonormales.

Preuve : Par récurrence sur $n = \dim(\mathrm{E})$: pour $n = 1$, on a $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}[e_1]$, une b.o.n de E est (e_1') avec $e_1' = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Supposons le théorème vrai au rang $n-1$ ($n \geqslant 1$), et soit e_1 un vecteur unitaire de E, soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}[e_1]^{\perp}$, alors F est un s.e.v de dimension $n-1$, soit $(e_2,\ldots,e_n)$ une b.o.n de F, il est facile de voir que $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une b.o.n de E. □

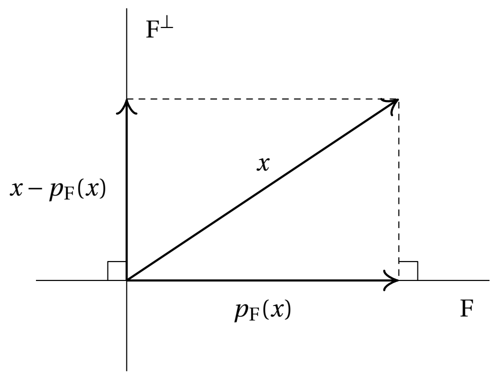
4) Projections orthogonales

Définition 27.6
Soit E *un préhilbertien réel et* $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *une projection* ($p \circ p = p$), *on dit que* p *est une projection orthogonale lorsque* $\ker(p) = \ker(p - \mathrm{id})^{\perp}$. *Si* F *est un s.e.v de* E *tel que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$, *la projection orthogonale sur* F, *notée* p_{F}, *est la projection sur* F *parallèlement à* $\mathrm{F}^{\perp}$.

Remarque 27.3 – *Si* F *est un s.e.v de* E *tel que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$, *alors* $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$ *et la projection orthogonale sur* $\mathrm{F}^{\perp}$ *est* $\mathrm{id} - p_{\mathrm{F}}$.

Théorème 27.10 (projeté orthogonal sur un s.e.v.)
Soit E *un préhilbertien réel et* F *un s.e.v de* E *de dimension finie, alors* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$, *et si* $(e_1, \dots, e_p)$ *est une b.o.n de* F, *alors* $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $p_{\mathrm{F}}(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$.

Preuve : Soit $x \in \mathrm{E}$, posons $y = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$, alors $y \in \mathrm{F}$, on a pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $(y|e_j) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)(e_i|e_j) = (x|e_j)$, on en déduit que $(x - y|e_j) = 0$ et donc $x - y \in \mathrm{F}^{\perp}$, or $x = y + (x - y)$ ce qui prouve que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{F}^{\perp}$, comme on sait que la somme est directe, on a $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$ et $p_{\mathrm{F}}(x) = y = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$. □



Exemples :
- Si $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}[u]$ est une droite vectorielle de E, alors $(e_1 = \frac{u}{\|u\|})$ est une b.o.n de D, donc $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $p_{\mathrm{D}}(x) = (x|e_1)e_1$, c'est à dire $p_{\mathrm{D}}(x) = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$.
- Si E est euclidien et H un hyperplan, alors $\mathrm{H}^{\perp}$ est de dimension 1, donc il existe un vecteur non nul n tel que $\mathrm{H}^{\perp} = \mathrm{Vect}[n] = \mathrm{D}$ et $p_{\mathrm{H}}(x) = x - p_{\mathrm{D}}(x) = x - \frac{(x|n)}{\|n\|^2}n$ (le vecteur n est appelé un vecteur normal à H).

Théorème 27.11 (procédé d'orthonormalisation de Schmidt [1])
Soit E *un espace préhilbertien réel, et soit* $(e_1, \dots, e_n)$ *une famille libre de* E, *alors il existe une unique famille orthonormale* $(v_1, \dots, v_n)$ *de* E *telle que :*
$$\forall\, i \in [\![1;n]\!], \begin{cases} \mathrm{Vect}[e_1, \dots, e_i] = \mathrm{Vect}[v_1, \dots, v_i] \\ (e_i|v_i) > 0 \end{cases}.$$

Preuve : On pose $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, on a bien $\mathrm{Vect}[e_1] = \mathrm{Vect}[v_1]$ et $(e_1|v_1) > 0$.
Supposons les vecteurs $v_1, \dots, v_i$ construits et vérifiant les conditions, on pose $e'_{i+1} = p_{\mathrm{F}_i^{\perp}}(e_{i+1})$ où $\mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}[v_1, \dots, v_i] = \mathrm{Vect}[e_1, \dots, e_i]$, ce qui donne $e'_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} (e_{i+1}|v_k)v_k$, ce vecteur e'_{i+1} est non nul et dans F_{i+1}, on pose ensuite $v_{i+1} = \frac{e'_{i+1}}{\|e'_{i+1}\|}$, il est facile de voir que $\mathrm{Vect}[e_1, \dots, e_{i+1}] = \mathrm{Vect}[v_1, \dots, v_{i+1}]$. D'autre part, $(e_{i+1}|v_{i+1}) = (e'_{i+1}|v_{i+1}) = \|e'_{i+1}\| > 0$.
On remarque qu'à chaque étape, il y a deux choix pour v_i, mais la condition $(e_i|v_i) > 0$ élimine une des deux possibilités, ce qui entraîne l'unicité, car on doit prendre e'_{i+1} dans $\mathrm{F}_{i+1} \cap \mathrm{F}_i^{\perp}$ qui est une droite vectorielle. □

1. SCHMIDT Erhard (1876 – 1959) : mathématicien allemand.

Remarque 27.4 – *Si $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, alors la famille $(v_1,\dots,v_n)$ obtenue par la méthode Schmidt est une b.o.n de E.*

★**Exercice 27.3** *Soit $E=\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, on pose $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(1,0,1)$ et $v_3=(0,1,1)$. Appliquer la méthode de Schmidt à la base (v_1,v_2,v_3).*

Dans la suite, $(E,(.|.))$ désigne un espace euclidien.

5) Distance d'un vecteur à un s.e.v

Soit F un s.e.v de E et soit $x\in E$, pour tout vecteur $y\in F$, on a :

$$\|x-y\|^2=\|(p_F(x)-y)+p_{F^\perp}(x)\|^2=\|p_F(x)-y\|^2+\|p_{F^\perp}(x)\|^2$$

on voit donc que $\forall\ y\in E, \|x-y\|^2\geqslant\|p_{F^\perp}(x)\|^2$, et que cette valeur est un minimum atteint uniquement pour $y=p_F(x)$,

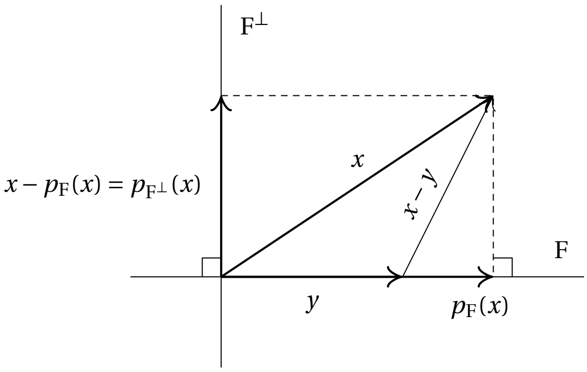


FIGURE 27.1: Projection orthogonale et distance à F

d'où le théorème :

Théorème 27.12
Soit F un s.e.v de E, pour $x\in E$, l'ensemble $\{\|x-y\|\ /\ y\in F\}$ admet un minimum, celui-ci est atteint uniquement pour $y=p_F(x)$, et vaut $\|p_{F^\perp}(x)\|$. Ce minimum est appelé distance de x à F et noté $d(x,F)$: $d(x,F)=\min\limits_{y\in F}\|x-y\|=\|p_{F^\perp}(x)\|=\|x-p_F(x)\|$.

☞**Exemples** :
- Distance d'un vecteur à une droite : soit $D=\text{Vect}[u]$ une droite vectorielle, on sait que $p_D(x)=\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$, d'où $d(x,D)=\sqrt{\|x-p_D(x)\|^2}=\sqrt{\|x\|^2-\frac{(x|u)^2}{\|u\|^2}}$.
- Distance d'un vecteur à un hyperplan : soit H un hyperplan de E, alors $H^\perp=\text{Vect}[u]$ est une droite vectorielle, d'où $d(x,H)=\|p_D(x)\|=\frac{|(x|u)|}{\|u\|}$. Si $\mathfrak{B}$ est une b.o.n de E et si u a pour coordonnées $(a_1,\dots,a_n)$ dans la base $\mathfrak{B}$ alors un vecteur x de coordonnées dans la base $\mathfrak{B}$ $(x_1,\dots,x_n)$ appartient à H si et seulement si $(x|u)=0$, c'est à dire $x\in H\iff a_1x_1+\cdots a_nx_n=0$ (équation cartésienne de H dans la base $\mathfrak{B}$). On remarque alors que $d(x,H)=\frac{|a_1x_1+\cdots a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$. On remarquera que les coordonnées d'un vecteur normal à un hyperplan se lisent directement sur une équation cartésienne de cet hyperplan dans une b.o.n. (ce sont les coefficients).

II ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX DANS UN EUCLIDIEN

1) Définition

Définition 27.7
Une isométrie vectorielle de E (ou endomorphisme orthogonal de E) est une application $f\in\mathscr{L}(E)$ telle que $\forall\ x\in E, \|f(x)\|=\|x\|$ (on dit que f conserve la norme), l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

☞**Exemple** : id_E, h_{-1} sont des endomorphismes orthogonaux de E.

Théorème 27.13

Un endomorphisme f de E est une isométrie si et seulement si f conserve le produit scalaire, c'est à dire :

$$\forall\ x, y \in \mathrm{E}, (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

Preuve : Si f conserve le produit scalaire, il est clair que f conserve la norme, et donc $f \in \mathrm{O(E)}$.

Réciproquement, si $f \in \mathrm{O(E)}$: soient $x, y \in \mathrm{E}$, $\|f(x)+f(y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(f(x)|f(y))$, mais on a aussi $\|f(x)+f(y)\|^2 = \|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$, d'où $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. □

Théorème 27.14

$\mathrm{O(E)}$ *est un groupe pour la loi* $\circ$, *plus précisément c'est un sous-groupe de* $\mathrm{GL(E)}$, *on l'appelle* ***groupe orthogonal de*** E.

Preuve : Si $f \in \mathrm{O(E)}$, alors si $x \in \ker(f)$, on a $\|f(x)\| = 0 = \|x\|$, d'où $x = 0$, donc f est injective, comme E est de dimension finie, on a bien $f \in \mathrm{GL(E)}$. D'autre part, $\mathrm{id_E} \in \mathrm{O(E)}$, soient $f, g \in \mathrm{O(E)}$, $\|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|$, donc $f \circ g \in \mathrm{O(E)}$, $\|x\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\|$, donc $f^{-1} \in \mathrm{O(E)}$. □

Définition 27.8 (symétrie orthogonale)

Soient $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ une symétrie ($s^2 = \mathrm{id_E}$), soit $\mathrm{F} = \ker(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{G} = \ker(s + \mathrm{id})$, alors on sait que s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. On dit que s est une symétrie orthogonale lorsque $\mathrm{F} = \mathrm{G}^\perp$, on parle alors de la symétrie orthogonale par rapport à F (notée s_F).

Théorème 27.15

Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Preuve : Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport au s.e.v F, soit $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id})$, alors on sait que p est la projection sur F parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}) = \mathrm{F}^\perp$, donc p est une projection orthogonale. Soit $x \in \mathrm{E}$, $\|s_\mathrm{F}(x)\|^2 = \|p_\mathrm{F}(x) - p_{\mathrm{F}^\perp}(x)\|^2 = \|p_\mathrm{F}(x)\|^2 + \|p_{\mathrm{F}^\perp}(x)\|^2$, or $\|x\|^2 = \|p_\mathrm{F}(x) + p_{\mathrm{F}^\perp}(x)\|^2 = \|p_\mathrm{F}(x)\|^2 + \|p_{\mathrm{F}^\perp}(x)\|^2 = \|s_\mathrm{F}(x)\|^2$, d'où $s_\mathrm{F} \in \mathrm{O(E)}$. □

Remarque 27.5 – *Une projection orthogonale qui n'est pas l'identité, n'est pas une isométrie (elle n'est pas bijective).*

Définition 27.9 (réflexion)

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

★**Exercice 27.4** *Soient $u, v \in \mathrm{E}$ deux vecteurs non nuls, de même norme et distincts. Montrer qu'il existe une unique réflexion qui échange u et v.*

Théorème 27.16

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, alors $f \in \mathrm{O(E)} \iff f$ transforme une b.o.n en une b.o.n de E.

Preuve : Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n de E, on a $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$. Si $f \in \mathrm{O(E)}$, alors $(f(e_i)|f(e_k)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, donc $\mathfrak{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une b.o.n de E.

Réciproquement, si $\mathfrak{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une b.o.n de E, alors pour $x \in \mathrm{E}$, $\|f(x)\|^2 = \|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$, donc $f \in \mathrm{O(E)}$. □

2) Matrices orthogonales

Théorème 27.17

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormale de E et soit $\mathrm{A} = \underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$f \in \mathrm{O(E)} \iff {}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

Preuve : Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n., on a $[{}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A}]_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = (f(e_i)|f(e_j)) = \delta_{i,j}$, donc ${}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$. □

À retenir

Plus généralement, si $x_1, \dots, x_p$ est une famille de vecteurs de E et si A désigne la matrice des coordonnées de cette famille dans une b.o.n., alors ${}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ est la matrice carrée de taille p dont le terme général est $(x_i|x_j)$, cette matrice est appelée matrice de Gram de la famille.

Définition 27.10

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice orthogonale lorsque ${}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, l'ensemble des matrices orthogonales de taille n est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 27.18 (Propriétés des matrices orthogonales)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
- *$\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$.*
- *$\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les vecteurs colonnes de A forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.*
- *Si $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$ (réciproque fausse). On en déduit que si $f \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$, alors $\det(f) = \pm 1$.*
- *$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, c'est en fait un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, que l'on appelle **groupe orthogonal de type** n sur $\mathbb{R}$.*

Preuve :
- $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n \iff$ A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$.
- $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si f_A, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A est un endomorphisme orthogonal (la base canonique étant une b.o.n. pour le produit scalaire canonique), ce qui équivaut f_A transforme la base canonique en une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ (cette base est constituée des vecteurs colonnes de A).
- Si $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, on en déduit que $\det({}^t\mathrm{A} \times \mathrm{A}) = 1 = \det(\mathrm{A})^2$, et donc $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$. A est la matrice de $f \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ dans une base orthonormale, alors $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\det(\mathrm{A}) = \pm 1$, c'est à dire $\det(f) = \pm 1$. Pour la réciproque fausse, considérer par exemple la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Laissé en exercice. □

Définition 27.11

*Il est facile de vérifier que l'ensemble $\{f \in \mathrm{O}(\mathrm{E}) \ / \ \det(f) = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(\mathrm{E}), \circ)$. On l'appelle **groupe des rotations** et on le note $\mathrm{SO}(\mathrm{E})$ **groupe spécial orthogonal de** E (parfois noté $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$). On a donc $\mathrm{SO}(\mathrm{E}) = \{f \in \mathrm{O}(\mathrm{E}) \ / \ \det(f) = 1\}$.*
De même, on vérifie que l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et on l'appelle groupe spécial orthogonal de type n sur $\mathbb{R}$ (ou groupe des matrices de rotation de taille n).

☞**Exemples** :
- Soit $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les vecteurs colonnes de A sont unitaires et deux à deux orthogonaux, donc $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$, on a $\det(\mathrm{A}) = 1$, donc A est la matrice d'une rotation.
- Une réflexion n'est pas dans $\mathrm{SO}(\mathrm{E})$, en effet, soit s la réflexion par rapport à un hyperplan H, soit e_n un vecteur unitaire de la droite $\mathrm{H}^\perp$, et soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une b.o.n de H, alors $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n de E et $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on voit donc que $\det(s) = -1$.

À retenir : composée d'endomorphismes orthogonaux

En raisonnant sur le déterminant, on obtient :
- La composée de deux rotations est une rotation.
- La composée d'une rotation et d'une isométrie négative ($\det = -1$) est une isométrie négative.

• La composée de deux isométries négatives est une rotation.

Théorème 27.19

Soit $f \in \mathrm{O(E)}$, soit F un s.e.v de E, montrer que si F est stable par f, alors $\mathrm{F}^{\perp}$ aussi.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

3) Espace vectoriel euclidien orienté - Produit mixte

Soit $(\mathrm{E}, (.|.))$ un espace euclidien **orienté** (on a donc choisi la classe des bases directes).

Théorème 27.20 (caractérisation des rotations)

Un endomorphisme f de E est une rotation si et seulement si f transforme une b.o.n.d en une b.o.n.d (on dit que f conserve l'orientation).

Preuve : Si $f \in \mathrm{SO(E)}$, soit $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n.d de E, on sait que f transforme $\mathfrak{B}$ en une b.o.n de E, $\mathfrak{B}' = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$, le déterminant de la matrice de passage est le déterminant de f qui vaut 1, donc $\mathfrak{B}'$ est une base directe.

Réciproquement : si f transforme une b.o.n.d $\mathfrak{B}$ en une b.o.n.d $\mathfrak{B}'$, alors on sait que $f \in \mathrm{O(E)}$, le déterminant de f vaut ± 1, or le déterminant de f est le déterminant de la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ et celui-ci est strictement positif, donc $\det(f) = 1$, *i.e.* f est une rotation. □

Théorème 27.21

Soit $\mathfrak{B}$ une b.o.n.d de E, soit $\mathfrak{B}'$ une autre base orthonormale de E, alors :
- *Si $\mathfrak{B}'$ est directe, alors $\det_{\mathfrak{B}'} = \det_{\mathfrak{B}}$.*
- *Si $\mathfrak{B}'$ est indirecte, alors $\det_{\mathfrak{B}'} = -\det_{\mathfrak{B}}$.*

Preuve : Si $\mathfrak{B}'$ est indirecte, alors la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ a un déterminant strictement négatif, mais cette matrice est une matrice orthogonale, donc son déterminant vaut -1. Or on a la relation $\det_{\mathfrak{B}} = \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}')\det_{\mathfrak{B}'}$, et donc $\det_{\mathfrak{B}} = -\det_{\mathfrak{B}'}$. □

L'espace vectoriel E est euclidien, orienté et de dimension n.

Définition 27.12

*Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n.d de E, soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **produit mixte des vecteurs** $x_1, \ldots, x_n$, le réel noté $[x_1, \ldots, x_n]$ et défini par : $[x_1, \ldots, x_n] = \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. D'après le théorème précédent, ce nombre ne dépend pas de la b.o.n.d choisie.*

Remarque 27.6 – *Le produit mixte étant un déterminant, il hérite des propriétés de ce dernier.*

Interprétation géométrique

- **En dimension** 2 : si E est un plan euclidien orienté et (u, v) est une base (quelconque) de E, alors $[u, v]$ est l'aire **orientée** du parallélogramme construit sur u et v, positive si (u, v) est dans le sens directe, négative sinon. Lorsque (u, v) est liée, le résultat est encore valable car le produit mixte est nul dans ce cas, et l'aire aussi.
  <u>En effet</u> : on construit une b.o.n.d (i, j) de telle sorte que $u = \|u\| i$, on a alors $u(\|u\|, 0)$ et $v(a, b)$ d'où $[u, v] = \|u\| b$ or cette quantité représente effectivement l'aire annoncée (base fois hauteur).
- **En dimension** 3 : si E est un espace euclidien orienté de dimension 3, et (u, v, w) est une base (quelconque) de E, alors $[u, v, w]$ est le volume **orienté** du parallélépipède construit sur u, v et w, positif si (u, v, w) est dans le sens directe, négatif sinon. Lorsque (u, v, w) est liée, le résultat est encore valable car le produit mixte est nul dans ce cas, et le volume aussi (vecteurs coplanaires).
  <u>En effet</u> : on construit une b.o.n.d (i, j, k) de telle sorte que $u = \|u\| i$, $v = ai + bj$ et $b > 0$, on a alors $u(\|u\|, 0, 0)$, $v(a, b, 0)$ et $w(\alpha, \beta, \gamma)$, d'où $[u, v, w] = \|u\| b\gamma = [u, v]\gamma$ (produit mixte $[u, v]$ dans le plan (i, j) orienté par k), cette quantité représente effectivement le volume annoncé (base fois hauteur).

III ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX EN DIMENSION 1 ET 2

1) En dimension 1

Si $\dim(E) = 1$ et si $f \in O(E)$, alors f est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$, mais f conserve la norme donc $\forall\, x \in E, \|\lambda x\| = \|x\|$, ce qui donne en prenant $x \neq 0$, $|\lambda| = 1$, d'où $O(E) = \{\pm \mathrm{id}_E\}$ et $SO(E) = \{\mathrm{id}_E\}$.

2) En dimension 2

Soit E un plan euclidien orienté et soit $f \in O(E)$, on peut effectuer la classification suivant les invariants de f, c'est à dire suivent le s.e.v. $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$.

- $\dim(F) = 2$: alors $\boxed{f = \mathrm{id}_E \in SO(E)}$.
- $\dim(F) = 1$: alors $F = \mathrm{Vect}[u]$ est une droite vectorielle (avec u unitaire) stable par f, donc $F^\perp$ est une droite vectorielle stable par f également et sur laquelle le seul vecteur invariant est 0, donc la restriction de f à $F^\perp$ est $-\mathrm{id}_{F^\perp}$. Soit v un vecteur unitaire de $F^\perp$, alors $\mathfrak{B} = (u, v)$ est une b.o.n de E et on a $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{f \text{ est } \textbf{la réflexion d'axe } F}$.
  Soit $\mathfrak{B}' = (i, j)$ une b.o.n.d, il existe un réel θ tel que $u = \cos(\theta/2)i + \sin(\theta/2)j$, on prend alors $v = -\sin(\theta/2)i + \cos(\theta/2)j$, la matrice de passage de $\mathfrak{B}'$ à $\mathfrak{B}$ est $P = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$, et la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}'$ est $\underset{\mathfrak{B}'}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
- $\dim(F) = 0$, seul 0 est invariant par f, soit $\mathfrak{B} = (i, j)$ une b.o.n.d de E, alors $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $\begin{cases} a^2 + c^2 & = 1 \\ b^2 + d^2 & = 1 \\ ab + cd & = 0 \end{cases}$, avec les complexes $z = a + ic$ et $z' = b + id$, on a $|z| = |z'| = 1$, donc $z = e^{i\theta}$, $z' = e^{i\theta'}$, avec $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = ab + cd = 0$, donc $\cos(\theta - \theta') = 0$, d'où $\theta' = \theta + \pi/2 + k\pi$, ce qui donne $\begin{cases} b = \cos(\theta') = -\sin(\theta) \\ d = \sin(\theta') = \cos(\theta) \end{cases}$, ou bien $\begin{cases} b = \cos(\theta') = \sin(\theta) \\ d = \sin(\theta') = -\cos(\theta) \end{cases}$, mais le second cas correspond à une réflexion d'après l'étude précédente, il reste donc : $\underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, cette matrice est notée $R(\theta)$, c'est la matrice **d'une rotation** (déterminant 1).
  Soit u un vecteur non nul, et soit $v = f(u)$, notons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ les coordonnées de u dans la base $\mathfrak{B}$, alors les coordonnées de v sont $X' = AX = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ a\sin(\theta) + b\cos(\theta) \end{pmatrix}$, d'où l'affixe de v, $z_v = a\cos(\theta) - b\sin(\theta + i(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)) = e^{i\theta}(a + ib) = e^{i\theta} z_u$, donc θ est l'angle orienté des deux vecteurs u et v. On dit que $\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \theta}$.

À retenir

En dimension 2, la matrice de la rotation d'angle θ est $R(\theta)$ dans toutes les b.o.n.d de E.

En résumé :

→ $SO(E) = \{f \in O(E) \ / \ \exists\, \theta \in \mathbb{R}, \underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = R(\theta)\}$, où $\mathfrak{B}$ est une b.o.n.d quelconque de E

→ $O^-(E) = \{f \in O(E) \ / \ \exists\, \theta \in \mathbb{R}, \underset{\mathfrak{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\}$,
où $\mathfrak{B}$ est une b.o.n.d quelconque de E. Ce sont des réflexions d'axe $\mathrm{Vect}[u]$ où $u = \cos(\theta/2)i + \sin(\theta/2)j$.

→ $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $O_2^-(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}$

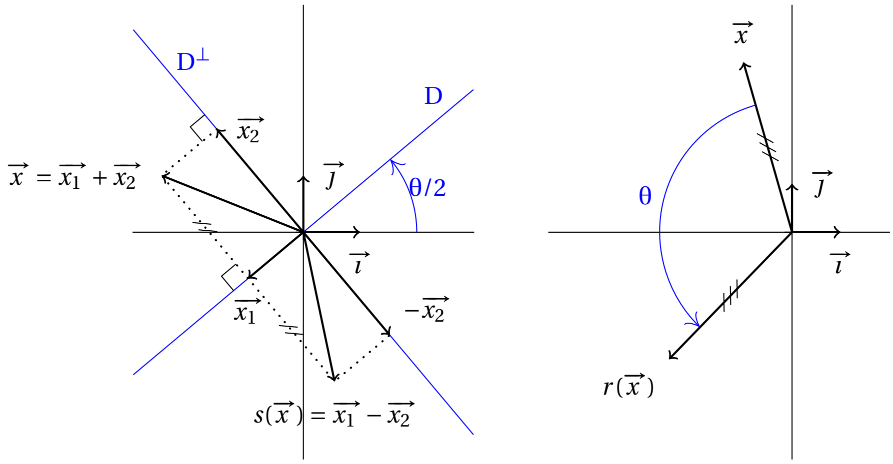


FIGURE 27.2: Réflexion et rotation

Propriété : L'application $R : \mathbb{R} \to SO_2(\mathbb{R})$ définie par $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupes surjectif. En particulier, on a $R(0) = I_2$ et $\forall\ \theta, \theta' \in \mathbb{R}, R(\theta+\theta') = R(\theta) \times R(\theta')$, d'où $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

Théorème 27.22 (composée de deux rotations)

Pour tous réels θ et θ', on a $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta+\theta')$. On en déduit qu'en dimension 2, le groupe des rotations, $(SO(E), \circ)$, est commutatif, ainsi que le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

On en déduit également que $R(-\theta) \times R(\theta) = R(0) = I_2$ et donc :

$$\boxed{\text{la bijection réciproque de la rotation d'angle } \theta \text{ est la rotation d'angle } -\theta.}$$

Composée de deux réflexions

Soit $\mathfrak{B} = (i, j)$ une b.o.n.d de E, soit s la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}[u]$ et s' la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}[u']$ avec $u = \cos(\theta/2)i + \sin(\theta/2)j$ et $u' = \cos(\theta'/2)i + \sin(\theta'/2)j$. La matrice de $s \circ s'$ dans la base $\mathfrak{B}$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta') & \sin(\theta') \\ \sin(\theta') & -\cos(\theta') \end{pmatrix} = R(\theta-\theta')$, donc $s \circ s'$ est la rotation d'angle $\theta - \theta' = 2(u', u) \pmod{2\pi}$. Ce calcul montre en même temps, qu'une rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions dont une est arbitraire.

IV SOLUTION DES EXERCICES

Solution 27.1

1/ *On écrit $\|x\| = \|(x+y)-y\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$ et donc $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$, on échange les rôles de x et y, ce qui donne $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x+y\|$, le résultat en découle.*

2/ *Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si on a l'égalité de Cauchy-Schwarz, c'est à dire $(x \mid y) = \|x\|\|y\|\cos(\theta) = \pm\|x\|\|y\|$ ce qui équivaut à $\cos(\theta) = \pm 1$.*

3/ *En élevant au carré l'égalité équivaut à $(x|y) = \|x\|\|y\| > 0$, et donc la famille est liée (Cauchy-Schwarz) et les vecteurs de même sens.*

Solution 27.2 *Si $x, y \in A^{\perp}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $\forall a \in A$, $(kx+y|a) = k(x|a) + (y|a) = 0$ car $(x|a) = (y|a) = 0$, donc $kx + y \in A^{\perp}$.*

Solution 27.3 *On pose $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, puis $e_2' = v_2 - (v_2 \mid e_1)\cdot e_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ et $e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$. Enfin, $e_3' = v_3 - (v_3 \mid e_1)\cdot e_1 - (v_3 \mid e_2)\cdot e_2 = \frac{2}{3}(-1,1,1)$ et $e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.*

Solution 27.4 *Soit $w = u - v$, soit $H = \mathrm{Vect}[w]^{\perp}$ et $s = s_H$, on a $(u-v|u+v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$, donc $u + v \in H$, on a donc $s(u-v) = v - u$ et $s(u+v) = u + v$, la résolution de ce système donne $s(u) = v$ et $s(v) = u$.*
Si s' est une autre réflexion qui convient, alors on doit avoir $s'(u-v) = v-u$, donc $\ker(s'+\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}[w]$ et par conséquent, $s' = s$.
*Remarque : l'hyperplan H s'appelle **hyperplan médiateur** de $[u;v]$, car si $x \in H$, alors $\|u - x\| = \|s(v) - s(x)\| = \|v - x\|$.*