Planche n° 1. Logique : corrigé

Exercice n° 1

1) a) ($f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$) et ($f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$).

b) (L'équation $f(x) = 0$ a (au moins) une solution si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$).

c) (L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution si et seulement si $\exists!\ x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas exactement une solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$ ou $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2/\ (x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 0)$.

d) (Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ D(x) = 0$) et
(Le dénominateur D de f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ D(x) \neq 0$).

e) (f est l'identité de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$) et (f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq x$).

f) (Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = x$) et (Le graphe de f ne coupe pas la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq x$).

g) (f est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x')$) et (f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2/\ x \leqslant x'$ et $f(x) > f(x')$).

h) (L'équation $\sin x = x$ a une solution dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = x$) et (L'équation $\sin x = x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x \neq x$).

2) a) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}/\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M$).

b) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geqslant u_n$) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non croissante $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n$).

c) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \leqslant u_n)$) et
($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non monotone $\Leftrightarrow ((\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n)$ et $(\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} > u_n))$.

3) a) ($f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) = M$) et ($f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) \neq M$).

b) (f a au moins un point fixe $\Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) = M$) et (f n'a pas de point fixe $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) \neq M$).

Constatez que les phrases $f(M) = M$ ou $f(M) \neq M$ **n'ont aucun sens** si elles ne sont pas accompagnées de quantificateurs.

Exercice n° 2

Le contraire de $x \geqslant 3$ est $x < 3$. Le contraire de $0 < x \leqslant 2$ est $((x \leqslant 0)$ ou $x > 2)$.

Exercice n° 3

1) Oui. Dans les deux cas, chaque fois que l'on se donne un réel x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont tous deux nuls.

2) Non. La deuxième affirmation implique la première mais la première n'implique pas la deuxième. La première phrase est la traduction avec des quantificateurs de l'égalité $fg = 0$. La deuxième phrase est la traduction avec quantificateurs de ($f = 0$ ou $g = 0$).

Voici un exemple de fonctions f et g toutes deux non nulles dont le produit est nul.
Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$.

Pour chaque valeur de x, on a soit $f(x) = 0$ (quand $x \leqslant 0$), soit $g(x) = 0$ (quand $x \geqslant 0$). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0$ ou enfin, $fg = 0$. Cependant, $f(1) = 1 \neq 0$ et donc $f \neq 0$, et $g(-1) = -1 \neq 0$ et donc $g \neq 0$. On a donc pas ($f = 0$ ou $g = 0$) ou encore, on n'a pas $((\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0))$.

Exercice n° 4

1) La proposition « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin(x) = x$ » est vraie. En effet, soit $x_0 = 0$. Alors $\sin(x_0) = x_0$.

2) La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \neq 0$ » est vraie. En effet, soit x un réel. $x^2 + 1 \geqslant 1$ et en particulier $x^2 + 1 \neq 0$. On a ainsi montré que pour tout réel x, $x^2 + 1 \neq 0$.

3) La proposition « $\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 + 1 \neq 0$ » est fausse. Pour le démontrer, on démontre que sa négation est vraie. La négation de cette proposition est « $\exists x \in \mathbb{C},\ x^2 + 1 = 0$ ». Cette proposition est effectivement vraie car le complexe $x_0 = i$ vérifie $x_0^2 + 1 = 0$.

Exercice n° 5.

1) Puisque $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$, il existe une réel x tel que $\sin(x) \neq 0$. Donc, la fonction sin n'est pas nulle.

2) Une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette fonction est dérivable en chaque réel. Donc, une fonction n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette fonction n'est pas dérivable en au moins un réel.
La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 et donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6.

1) Soit $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Alors $\cos(x_0) = 0$. Donc la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0$ » est vraie.
Soit $x_1 = 0$. Alors $\sin(x_1) = 0$. Donc la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0$ » est vraie.
Puisque les deux propositions « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0$ » et « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0$ » sont vraies, la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0)$ » est vraie.

2) Supposons par l'absurde que la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0$ et $\sin x = 0)$ soit vraie. Soit x_0 un réel tel que $\cos(x_0) = \sin(x_0) = 0$. Alors, $\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0) = 0$. Ceci contredit le fait que pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Donc, la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0$ et $\sin x = 0)$ est fausse.

Exercice n° 7.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tel que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ ou encore tels que $a^2 = 2b^2$.
On peut poser $a = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$ et $b = 2^{\alpha'}3^{\beta'}5^{\gamma'}\ldots$ où α, β, ... sont des entiers naturels.
L'égalité $a^2 = 2b^2$ s'écrit encore $2^{2\alpha}3^{2\beta}5^{2\gamma}\ldots = 2^{2\alpha'+1}3^{2\beta'}5^{2\gamma'}\ldots$ Ceux qui ont pris l'enseignement de spécialité en Terminale savent que cette égalité implique que l'exposant 2α est égal à l'exposant $2\alpha' + 1$. Cette égalité est impossible car 2α est un entier pair et $2\alpha' + 1$ est un entier impair.
Il était donc absurde de supposer $\sqrt{2}$ rationnel. On a montré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice n° 8.

Soient k_0 et k_1 deux entiers naturels tels que $b = k_0 a$ et $a = k_1 b$. Alors, $b = k_0 k_1 b$ puis $k_0 k_1 = 1$ car b n'est pas nul.
Supposons par l'absurde que l'un des deux entiers naturels k_0 ou k_1 ne soit pas égal à 1. Alors, $(k_0 \geqslant 2$ et $k_1 \geqslant 1)$ ou $(k_0 \geqslant 1$ et $k_1 \geqslant 2)$. Dans les deux cas, on a $k_0 k_1 \geqslant 2$ et en particulier $k_0 k_1 \neq 1$.
On a montré par l'absurde que $k_0 = k_1 = 1$. Mais alors, $a = b$.

Exercice n° 9.

1) $\forall n \mathbb{N}$, $((\exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k)$ ou $(\exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k + 1))$. Cette proposition est vraie car pour chaque n, l'une des deux propositions « n est pair » ou « n est impair » est vraie.

2) $(\forall n \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k)$ ou $(\forall n \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k+1))$. Cette proposition est fausse car chacune des deux propositions « tout entier naturel n est pair » et « tout entier naturel n est impair » est fausse.

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}/\ n < m$. Cette proposition est vraie. En effet, si n est un entier naturel, l'entier $m = n + 1$ est strictement plus grand que n.

4) $\exists m \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ n < m$. Cette proposition est fausse.

Exercice n° 10.

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$.
On peut donner une définition plus simple. f est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.

2) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(0)$.

