

Planche n° 14. Trigonométrie hyperbolique : corrigé

Exercice n° 1

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b & \text{et} & \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b & \text{et} & \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} & \text{et} & \quad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}. \end{aligned}$$

Deux démonstrations :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{4}((e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})) = \frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \operatorname{ch}(a+b).$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$.

En appliquant à $a = b = x$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1, \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)), \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)) \text{ et } \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} \text{ et } \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}.$$

Exercice n° 2

Dérivée et variations. Pour tout réel x , $\operatorname{ch} x > 0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - 1 = \operatorname{th} x - 1 < 0.$$

f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Etude en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\operatorname{ch} x) = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. De plus, pour tout réel x ,

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^{-x}) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}) = -2x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}).$$

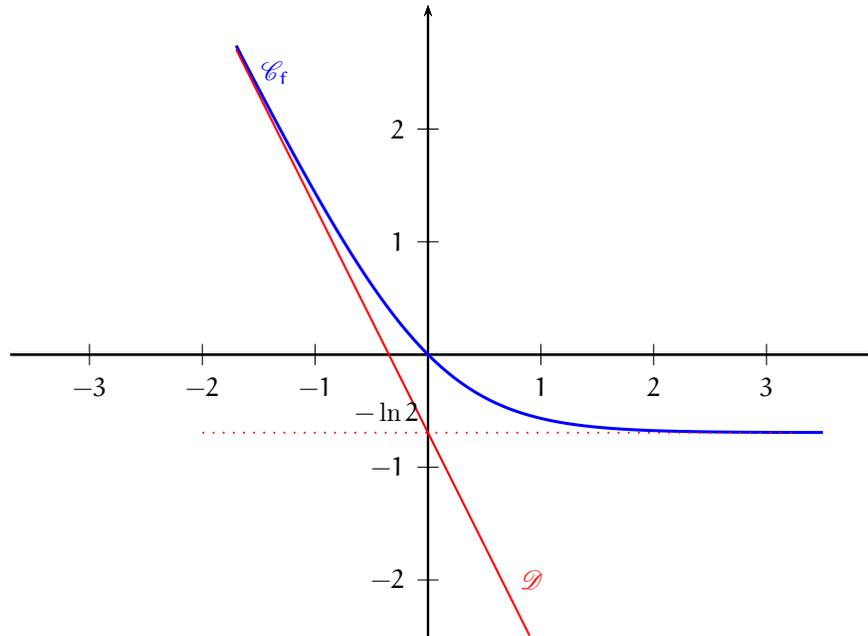
Donc, pour tout réel x , $f(x) - (-2x - \ln 2) = \ln(1 + e^{2x})$. Or, d'une part $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{2x}) = \ln 1 = 0$ et donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x , $\ln(1 + e^{2x}) > 0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de \mathcal{D} sur \mathbb{R} .

Etude en $+\infty$. Pour tout réel x ,

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^x) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = -\ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y = -\ln 2$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Graphe.



Exercice n° 3

Soit x un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100} \text{sh}(2 + kx) = \frac{1}{2} \left(e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx} \right).$$

Si $x = 0$ alors directement $S = 100 \text{sh } 2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2} \left(e^2 e^x \frac{1 - e^{100x}}{1 - e^x} - e^{-2} e^{-x} \frac{1 - e^{-100x}}{1 - e^{-x}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^2 e^x \frac{1 - e^{100x}}{1 - e^x} + e^{-2} \frac{1 - e^{-100x}}{1 - e^{-x}} \right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par le réel non nul e^x . Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2} ((1 - e^{100x}) + e^{-2} (1 - e^{-100x})) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} (1 - e^{100x}) + e^{-2-100x} (e^{100x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - e^{100x}) (e^{x+2} - e^{-100x-2}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x + 2 = -100x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{101} \right\}.$$

Exercice n° 4

On a vu dans l'exercice n° 1 que pour tout réel x , $\text{th}(2x) = \frac{2 \text{th } x}{1 + \text{th}^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1 + \text{th}^2 x}{\text{th } x} = \frac{2}{\text{th}(2x)}$

ou encore $\text{th } x + \frac{1}{\text{th } x} = \frac{2}{\text{th}(2x)}$ ou finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{th } x = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th } x}.$$

Soient n un entier naturel et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

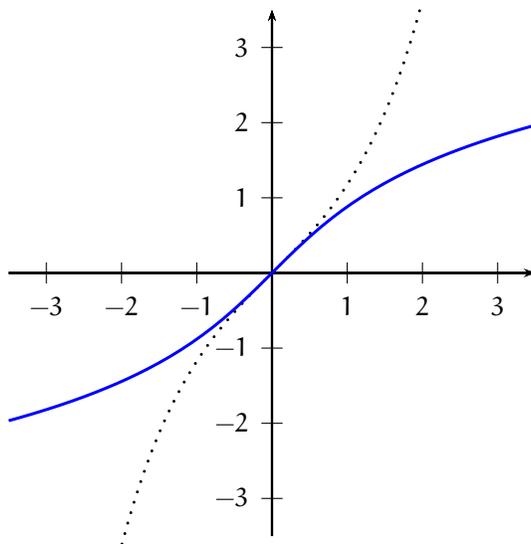
$$u_n = \sum_{k=0}^n 2^k \text{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1} x)} - \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} \right) = \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1} x)} - \frac{1}{\text{th } x} \text{ (somme télescopique).}$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\text{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Exercice n° 5

1) a) La fonction sh est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . La fonction sh réalise donc une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh } x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x \right[=] -\infty, +\infty[$. sh est donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

b) **Graphe de argsh .**



c) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} y = \text{argsh } x &\Leftrightarrow x = \text{sh } y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) \Leftrightarrow e^y - 2x - e^{-y} = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y) \\ &\Leftrightarrow e^y \text{ est solution de l'équation } X^2 - 2xX - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ est $\Delta' = x^2 + 1$. Ce discriminant est toujours strictement positif et donc l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2 + 1}$ et $X_2 = x - \sqrt{x^2 + 1}$. Le produit de ces deux nombres est égal à -1 . Donc, l'un de ces deux nombres est strictement positif et l'autre est strictement négatif. Le positif est le plus grand de ces deux nombres à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Donc

$$\begin{aligned} y = \text{argsh } x &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).}$$

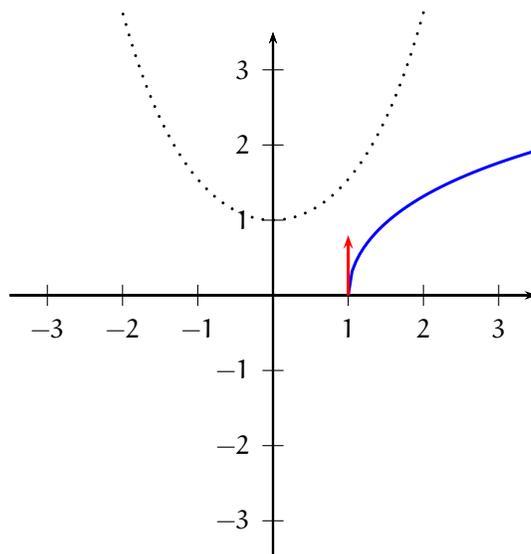
d) sh est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée à savoir $\text{sh}' = \text{ch}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} . On sait alors que argsh est dérivable sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x ,

$$\text{argsh}'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.}$$

2) a) La fonction ch est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . La fonction ch réalise donc une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh } x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x \right[=] -\infty, +\infty[$. sh est donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

b) Graphe de argch.



c) Soient $x \geq 1$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argch} x &\Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \Leftrightarrow e^y - 2x + e^{-y} = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^x) \\ &\Leftrightarrow e^y \text{ est solution de l'équation } X^2 - 2xX + 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2xX + 1 = 0$ est $\Delta' = x^2 - 1 \geq 0$. Ce discriminant est toujours et donc l'équation $X^2 - 2xX + 1 = 0$ admet deux solutions réelles (éventuellement confondues si $x = 1$) à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $X_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Le produit de ces deux nombres est égal à 1 et leur somme est égale à $2x \geq 0$. Donc, ces deux nombres sont strictement positifs. Par suite,

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argch} x &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ ou } y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

Comme le produit $X_1 X_2$ est égal à 1 et que X_1 et X_2 sont strictement positifs, l'un des deux nombres, à savoir X_1 est plus grand que 1 et l'autre, à savoir X_2 , est dans $]0, 1[$. Mais alors, $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0$ et $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \leq 0$ (avec égalité à 0 si et seulement si $x = 1$ et dans ce cas, $X_1 = X_2 = 0$).

Comme on ne veut retenir que la solution positive, il ne reste que $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$$\forall x \geq 1, \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

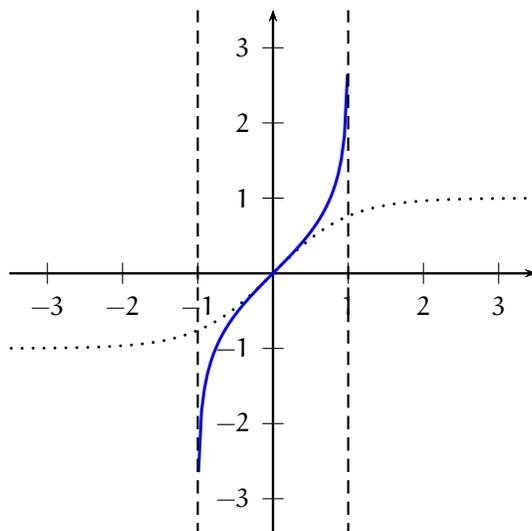
d) ch est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée à savoir $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. On sait alors que argch est dérivable sur $\operatorname{ch}(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$ et n'est pas dérivable en $\operatorname{ch}(0) = 1$. De plus, pour tout réel $x > 1$,

$$\operatorname{argch}'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\forall x > 1, \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

3) a) La fonction th est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . La fonction th réalise donc une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th } x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th } x \right[=] -1, 1[$. th réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$.

b) Graphe de argth .



c) Soient $x \in] -1, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = \text{argth } x &\Leftrightarrow x = \text{th } y \Leftrightarrow \frac{(e^y - e^{-y})/2}{(e^y + e^{-y})/2} = x \Leftrightarrow e^y - e^{-y} = xe^y + xe^{-y} \\ &\Leftrightarrow e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y) \\ &\Leftrightarrow (1 - x)e^{2y} = 1 + x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right). \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

d) th est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée à savoir $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} . On sait alors que argth est dérivable sur $\text{th}(\mathbb{R}) =] -1, 1[$. De plus, pour tout réel x de $] -1, 1[$,

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice n° 6

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 + 1 \geq 0$ et donc $\sqrt{x^2 + 1}$ existe puis

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| = \text{Max}\{x, -x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$ et $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$. L'expression proposée existe pour tout réel x . De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln \left((\sqrt{x^2 + 1} + x) (\sqrt{x^2 + 1} - x) \right) = \ln(x^2 + 1 - x^2) = \ln 1 = 0.$$

2) Pour $x > 0$,

$$\frac{\text{ch}(\ln x) + \text{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x} \left(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} \right) = 1.$$

3) Soit x et y deux réels.

$$\operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + (1 + \operatorname{sh}^2 x) \sin^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y.$$

Exercice n° 7

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow e^x - 4 + e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \text{ (après multiplication par le réel non nul } e^x) \\ &\Leftrightarrow e^x \text{ est solution de l'équation } X^2 - 4X + 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta' = (-2)^2 - 1 = 3$. L'équation $X^2 - 4X + 1 = 0$ admet donc deux solutions réelles distinctes à savoir $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$. Ces deux nombres sont strictement positifs et donc

$$\operatorname{ch} x = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } e^x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2 - \sqrt{3}).$$

Remarque. La fonction ch est paire et donc les deux nombres obtenus sont nécessairement opposés l'un de l'autre. C'est effectivement le cas car $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ et donc

$$\ln(2 - \sqrt{3}) = \ln\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = -\ln(2 + \sqrt{3}).$$

2) Pour tout réel x , $\operatorname{ch} x \geq 1$. En particulier, pour tout réel x , $\operatorname{ch} x \neq \frac{1}{2}$. L'équation proposée n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

Exercice n° 8

Soient a et b deux réels et n un entier naturel.

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ak + b) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n e^{ak+b} + \sum_{k=0}^n e^{-ak-b} \right) = \frac{1}{2} \left(e^b \sum_{k=0}^n (e^a)^k + e^{-b} \sum_{k=0}^n (e^{-a})^k \right)$$

1er cas. Si $a = 0$, $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ak + b) = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(b) = (n+1) \operatorname{ch}(b)$.

2ème cas. Si $a \neq 0$, alors $e^a \neq 1$ et $e^{-a} \neq 1$ puis

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ak + b) &= \frac{1}{2} \left(e^b \frac{e^{(n+1)a} - 1}{e^a - 1} + e^{-b} \frac{1 - e^{-(n+1)a}}{1 - e^{-a}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{b + \frac{(n+1)a}{2} - \frac{a}{2}} \frac{e^{(n+1)a/2} - e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2} - e^{-a/2}} + e^{-b - \frac{(n+1)a}{2} + \frac{a}{2}} \frac{e^{(n+1)a/2} - e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2} - e^{-a/2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{b + \frac{na}{2}} + e^{-b - \frac{na}{2}} \right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)a}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{na}{2} + b\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Exercice n° 9

Soient a , b et c trois réels. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c &\Leftrightarrow a(e^x + e^{-x}) + b(e^x - e^{-x}) = 2c \Leftrightarrow (a+b)e^x - 2c + (a-b)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)(e^x)^2 - 2ce^x + (a-b) = 0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^x) \\ &\Leftrightarrow e^x \text{ solution de l'équation } (a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0. \end{aligned}$$

1er cas. Si $b = -a$, l'équation s'écrit $-2ce^x + 2a = 0$ ou encore $ce^x = a$.

- Si $c = a = 0 (= b)$, tout réel est solution.
- Si $c = 0$ et $a = -b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $c \neq 0$ et $\frac{a}{c} \leq 0$, l'équation n'a pas de solution.

- Si $c \neq 0$ et $\frac{a}{c} > 0$, l'équation a une solution et une seule à savoir $\ln\left(\frac{c}{a}\right)$.

2ème cas. Si $b \neq -a$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ est du second degré. Son discriminant réduit est

$$\Delta' = c^2 - (a+b)(a-b) = c^2 + b^2 - a^2.$$

- Si $c^2 + b^2 - a^2 < 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} et donc l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

- Si $c^2 + b^2 - a^2 = 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ admet une solution double à savoir $\frac{c}{a+b}$.

• Si $\frac{c}{a+b} \leq 0$, l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

• Si $\frac{c}{a+b} > 0$, l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ a une solution et une seule dans \mathbb{R} à savoir $\ln\left(\frac{c}{a+b}\right)$.

- Si $c^2 + b^2 - a^2 > 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes dont le produit est égal à $\frac{a-b}{a+b}$ et la somme est égale à $\frac{2c}{a+b}$.

• Si $a^2 - b^2 < 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a une solution strictement négative et une solution strictement positive. Dans ce cas, l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ a une solution et une seule.

• Si $a^2 - b^2 > 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a deux solutions non nulles distinctes et de même signe.

★ Si $c(a+b) < 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a deux solutions strictement négatives et dans ce cas l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ n'a pas de solution.

★ Si $c(a+b) > 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a deux solutions strictement positives et dans ce cas l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ a deux solutions distinctes.

• Si $a^2 - b^2 = 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a une solution égale à 0 et l'autre à $\frac{c}{a+b}$. Dans ce cas, l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ a une solution et une seule si $c(a+b) > 0$ et pas de solution si $c(a+b) \leq 0$.