

Planche n° 26. Polynômes : corrigé

Exercice n° 1

Soit $n \geq 2$.

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i} \left(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n} \right) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-2ik\pi/n} \right).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\dots+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2} = \left(e^{i\pi/2} \right)^{n-1} = i^{n-1},$$

et donc $\frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Il reste à calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n})$.

1ère solution. Les $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leq k \leq n-1$, sont les $n-1$ racines n -èmes de 1 distinctes de 1.

Puisque $X^n - 1 = (X-1)(1+X+\dots+X^{n-1})$, ce sont donc les $n-1$ racines deux deux distinctes du polynôme $1+X+\dots+X^{n-1}$. Par suite,

$$1+X+\dots+X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{-2ik\pi/n} \right) = P.$$

En particulier $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}) = P(1) = 1+1+\dots+1 = n$.

Finalement,

$$\forall n \geq 2, \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice n° 2

Soit $n \geq 2$. Tout d'abord

$$Q = (1+X+\dots+X^n)' = \left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1} \right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - (X^{n+1}-1)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, $\omega_0 = 1$ et donc, $Q(\omega_0) = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Puis, pour $1 \leq k \leq n-1$, $\omega_k \neq 1$ et donc, puisque $\omega_k^n = 1$,

$$Q(\omega_k) = \frac{n\omega_k^{n+1} - (n+1)\omega_k^n + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n\omega_k - (n+1) + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n}{\omega_k - 1}.$$

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2 \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1)}.$$

Mais, $X^n - 1 = (X-1)(1+X+\dots+X^{n-1})$ et d'autre part $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) = (X-1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$. On en

déduit que $\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) = 1+X+\dots+X^{n-1}$.

En particulier, $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = 1+1^2+\dots+1^{n-1} = n$ ou encore $\prod_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1) = (-1)^{n-1}n$. Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n^n(n+1)}{2} \frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

$$\forall n \geq 2, \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1} (n+1)}{2}.$$

Exercice n° 3

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout réel α ,

$$e^{i(2p+1)\alpha} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} \cos^{2p+1-j} \alpha (i \sin \alpha)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)\alpha) = \operatorname{Im} \left(e^{i(2p+1)\alpha} \right) = \sum_{j=0}^p \binom{2p+1}{2j+1} \cos^{2(p-j)} \alpha (-1)^j \sin^{2j+1} \alpha.$$

Pour $1 \leq k \leq p$, en posant $\alpha = \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=0}^p \binom{2p+1}{2j+1} \cos^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} (-1)^j \sin^{2j+1} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Ensuite, pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1} \neq 0$. En divisant les deux membres de (*) par $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{2p+1}{2j+1} \cotan^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Maintenant, les p nombres $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts. En effet, pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$. Or, sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, la fonction $x \mapsto \cotan x$ est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction $x \mapsto \cotan^2 x$ est strictement décroissante et en particulier injective.

Ces p nombres deux à deux distincts sont racines du polynôme $P = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{2p+1}{2j+1} X^{p-j}$, qui est de degré p . Ce sont donc toutes les racines de P (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{\binom{2p+1}{3}}{\binom{2p+1}{1}} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

puis,

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^p \left(1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} \right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2) Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. De plus, pour $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

La suite (u_n) est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite (u_n) converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3) Pour x élément de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \tan x - x$. f et g sont dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour x élément de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 - \cos x$ et $g'(x) = \tan^2 x$. f' et g' sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc f et g sont strictement croissantes sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que f et g sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin x < x < \tan x$ et par passage à l'inverse $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ puis $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cotan^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$.

4) Pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \left(\frac{2p+1}{k\pi}\right)^2 < \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{p(2p-1)}{3} = \sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \sum_{k=1}^p \frac{(2p+1)^2}{\pi^2 k^2} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \frac{2p(p+1)}{3},$$

puis

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2} < u_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand p tend vers l'infini et donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_p) tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice n° 4

- $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7 = (X^6 + 8X^3 + 7) - (7X^4 + 7X) = (X^3 + 1)(X^3 + 7) - 7X(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(X^3 - 7X + 7)$.
- $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7 = 3X^2(X^3 + 1) - 7(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(3X^2 - 7)$. Donc,

$$\text{PGCD}(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7, 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7) = (X^3 + 1) \text{PGCD}(X^3 - 7X + 7, 3X^2 - 7).$$

Maintenant, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\left(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^3 - 7\left(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}}\right) + 7 = -\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} + 7 \neq 0$.

Les polynômes $(X^3 - 7X + 7)$ et $(3X^2 - 7)$ n'ont pas de racines communes dans \mathbb{C} et sont donc premiers entre eux. Donc,

$$\text{PGCD}(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7, 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7) = X^3 + 1.$$

Exercice n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2 + X + 1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1 \\ &\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1 \\ &(\text{car } (X+1)^n - X^{n-1} \text{ est dans } \mathbb{R}[X]) \\ &\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0. \end{aligned}$$

- Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
- Si $n \in 1 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
- Si $n \in 2 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
- Si $n \in 3 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
- Si $n \in 4 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.

- Si $n \in 5 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.

En résumé, $(X + 1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si n est dans $(1 + 6\mathbb{Z}) \cup (5 + 6\mathbb{Z})$.

Exercice n° 6

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Pour tout réel x , on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^l ((x - z_j)(x - \bar{z}_j))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les α_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_j des entiers naturels et les $(x - z_j)(x - \bar{z}_j)$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.

Tout d'abord, pour tout réel x , $\prod_{j=1}^l ((x - z_j)(x - \bar{z}_j))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinômes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)

Donc, $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\alpha_i} \geq 0)$.

Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \geq 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en α_i , ce qui contredit l'hypothèse faite sur P . Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs. Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

Posons $A = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite

$Q_1 = \prod_{j=1}^l (x - z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \prod_{j=1}^l (x - \bar{z}_j)^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$ puis

$$P = A^2 Q_1 Q_2 = A^2 (B + iC)(B - iC) = A^2 (B^2 + C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

Exercice n° 7

Si P est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair. Sinon, posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(P(X)) - X &= P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = \sum_{k=0}^n a_k ((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k ((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X). \end{aligned}$$

Mais, pour $1 \leq k \leq n$, $(P(X))^k - X^k = (P(X) - X)((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + \dots + X^{k-1})$ est divisible par $P(X) - X$ et il en est donc de même de $P(P(X)) - X$.

Exercice n° 8

1) Posons $P = \sum_{i=0}^l a_i X^i$ où $l \geq 1$ et où les a_i sont des entiers relatifs avec $a_l \neq 0$. D'après la formule du binôme de NEWTON, il existe des entiers relatifs K_i , $0 \leq i \leq l$, tels que

$$P(n + km) = \sum_{i=0}^l a_i (n + km)^i = \sum_{i=0}^l a_i (n^i + K_i m) = \sum_{i=0}^l a_i n^i + Km = m + Km = m(K + 1),$$

où K est un entier relatif. $P(n + km)$ est donc un entier relatif multiple de $m = P(n)$.

2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est premier.

Soit n un entier naturel donné et $m = P(n)$ (donc, $m \geq 2$ et en particulier $m \neq 0$). Pour tout entier relatif k , $P(n + km)$ est divisible par m mais $P(n + km)$ est un nombre premier ce qui impose $P(n + km) = m$. Par suite, le polynôme $Q = P - m$ admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque $m \neq 0$) et est donc le polynôme nul ou encore P est constant.

Exercice n° 9

1) Déjà, P_0 est dans E .

Soit n un naturel non nul. $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)\dots(X+n)$ et donc, si k est élément de $\llbracket -n, -1 \rrbracket$, $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Si k est un entier positif, $P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = \binom{n+k}{n} \in \mathbb{Z}$.

Enfin, si k est un entier strictement plus petit que $-n$,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = (-1)^n \frac{1}{n!}(-k-1)\dots(-k-n) = (-1)^n \binom{-k-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P_n(k) \in \mathbb{Z}$, ou encore $P_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2) Une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est donc dans E .

3) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$ (si P est nul, P est combinaison linéaire à coefficients entiers des P_k).

Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$, on sait que pour tout entier naturel n , $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (c'est-à-dire que tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des P_k , $0 \leq k \leq n$). et donc, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ (c'est-à-dire que tout polynôme s'écrit donc manière unique comme combinaison linéaire des P_k , $k \in \mathbb{N}$).

Soit $n = \deg P$. Il existe $n+1$ nombres complexes a_0, \dots, a_n tels que $P = a_0 P_0 + \dots + a_n P_n$. Il reste à montrer que les a_i sont des entiers relatifs.

- La phrase « $P(-1)$ est dans \mathbb{Z} » fournit : a_0 est dans \mathbb{Z} .
- La phrase « $P(-2)$ est dans \mathbb{Z} » fournit : $a_0 - a_1$ est dans \mathbb{Z} et donc a_1 est dans \mathbb{Z} .
- La phrase « $P(-3)$ est dans \mathbb{Z} » fournit : $a_0 - 2a_1 + a_2$ est dans \mathbb{Z} et donc a_2 est dans \mathbb{Z} ...
- La phrase « $P(-(k+1))$ est dans \mathbb{Z} » fournit : $a_0 - a_1 + \dots + (-1)^k a_k$ est dans \mathbb{Z} et si par hypothèse de récurrence, a_0, \dots, a_{k-1} sont des entiers relatifs alors a_k l'est encore.

Tous les coefficients a_k sont des entiers relatifs et E est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_k .

Exercice n° 10

On prend $n \geq 2$ (sinon tout est clair).

$Q = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$ est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq e^{-ia}$ ou encore $e^{2ia} \neq 1$ ou enfin, $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$ alors, $P = 0 = 0 \times Q$.

2ème cas. Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, d'après la formule de MOIVRE

$$\begin{aligned} P(e^{ia}) &= \sin a (\cos(na) + i \sin(na)) - \sin(na) (\cos a + i \sin a) + \sin((n-1)a) \\ &= \sin((n-1)a) - (\sin(na) \cos a - \cos(na) \sin a) = 0. \end{aligned}$$

Donc, e^{ia} est racine de P et de même, puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} est racine de P . P est donc divisible par Q .

$$\begin{aligned} P &= P - P(e^{ia}) = \sin a (X^n - e^{ina}) - \sin(na) (X - e^{ia}) = (X - e^{ia}) \left(\sin a \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k} e^{ika} - \sin(na) \right) \\ &= (X - e^{ia}) S. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} S &= S - S(e^{-ia}) = \sin a \sum_{k=0}^{n-1} e^{ika} (X^{n-1-k} - e^{-i(n-1-k)a}) \\ &= \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} e^{ika} \left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{-ija} \right) \\ &= \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j} e^{i(k-j)a} \right) = \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \left(\sum_{k+j=l} e^{i(k-j)a} \right) X^{n-2-l} \\ &= \sin a (X - e^{-ia}) \sum_{l=0}^{n-2} \left(\sum_{k=0}^l e^{i(2k-l)a} \right) X^{n-2-l} \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^l e^{i(2k-1)\alpha} a = e^{-i\alpha} a \frac{1 - e^{2i(l+1)\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = \frac{\sin((l+1)\alpha)}{\sin \alpha}.$$

Donc

$$S = \sin \alpha (X - e^{-i\alpha}) \sum_{l=0}^{n-2} \frac{\sin((l+1)\alpha)}{\sin \alpha} X^{n-2-l} = (X - e^{-i\alpha}) \sum_{l=0}^{n-2} \sin((l+1)\alpha) X^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha}) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)\alpha) X^{n-2-k} = (X^2 - 2X \cos \alpha + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)\alpha) X^{n-2-k}.$$

Exercice n° 11

Soit P un polynôme de degré n supérieur ou égal à 2.

Posons $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} (X - z_j) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{P}{X - z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X - z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans \mathbb{C} . Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z - z_k}}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} \quad (*).$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\lambda_k = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |z - z_j|^2}$. Chaque λ_k est un réel strictement positif et de plus

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{|z - z_k|^2}}{\sum_{j=1}^n |z - z_j|^2} = 1.$$

En conjuguant les deux membres de l'égalité (*), on obtient $\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{|z - z_j|^2} \right) z = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z - z_k|^2} z_k$ et donc,

$$z = \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k.$$

Exercice n° 12

$$\begin{aligned} P &= X^6 - 2X^3 \cos \alpha + 1 = (X^3 - e^{i\alpha})(X^3 - e^{-i\alpha}) \\ &= (X - e^{i\alpha/3})(X - je^{i\alpha/3})(X - j^2e^{i\alpha/3})(X - e^{-i\alpha/3})(X - je^{-i\alpha/3})(X - j^2e^{-i\alpha/3}) \\ &= \left(X^2 - 2X \cos \frac{\alpha}{3} + 1\right) \left(X^2 - 2X \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right) \left(X^2 - 2X \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right). \end{aligned}$$

Il reste à se demander : 1) si les facteurs précédents sont irréductibles sur \mathbb{R} et 2) si ces facteurs sont deux à deux distincts.

Les trois facteurs de degré 2 ont un discriminant réduit du type $\Delta' = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$ et Δ' est nul si et seulement si α est dans $\pi\mathbb{Z}$.

Les cas particuliers sont donc ($\frac{\alpha}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $\alpha = 0$) et ($\frac{\alpha + 2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $\alpha = \pi$) et ($\frac{\alpha - 2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ ce qui n'a pas de solution dans $[0, \pi]$).

1er cas. Si $\alpha = 0$.

$$P = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)^2(X^2 + X + 1)^2.$$

2ème cas. Si $\alpha = \pi$, en remplaçant X par $-X$ on obtient :

$$P = (X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

3ème cas. Si α est dans $]0, \pi[$, les trois facteurs de degré 2 sont irréductibles sur \mathbb{R} . D'autre part, $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$ sont distincts et donc n'ont pas de racine cubique en commun. Les trois facteurs de degré 2 sont deux à deux distincts. Dans ce cas,

$$P = \left(X^2 - 2X \cos \frac{\alpha}{3} + 1\right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3} + 1\right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{\alpha - 2\pi}{3} + 1\right).$$

Exercice n° 13

Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P + 10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P + 10)' = P'$ d'ordre au moins deux.

De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un complexe λ tel que $P' = \lambda(X - 2)^2(X + 2)^2 = \lambda(X^2 - 4)^2 = \lambda(X^4 - 8X^2 + 16)$ et enfin, nécessairement,

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 / P = \lambda \left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X \right) + \mu \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Réciproquement, soit $P = \lambda \left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X \right) + \mu$ avec $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} P \text{ solution} &\Leftrightarrow P + 10 \text{ divisible par } (X + 2)^3 \text{ et } P - 10 \text{ est divisible par } (X - 2)^3 \\ &\Leftrightarrow P(-2) + 10 = 0 = P'(-2) = P''(-2) \text{ et } P(2) + 10 = 0 = P'(2) = P''(2) \\ &\Leftrightarrow P(-2) = -10 \text{ et } P(2) = 10 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32 \right) + \mu = -10 \\ \lambda \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) + \mu = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = 10 \\ &\Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda = \frac{75}{128} \end{aligned}$$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir $P = \frac{75}{128} \left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X \right) = \frac{15}{128}X^5 - \frac{25}{16}X^3 + \frac{75}{8}X$.

Exercice n° 14

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont 0 et 1 car $\lambda = \lambda\lambda \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1\}$.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

Soit α une racine de P dans \mathbb{C} . Alors, $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \dots$, sont encore racines de P . Mais, P étant non nul, P ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite $(\alpha^{(2^n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$ car si $|\alpha| \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la suite $(|\alpha^{(2^n)}|)$ est strictement monotone et en particulier les $\alpha^{(2^n)}$ sont deux à deux distincts.

De même, si α est racine de P alors $(\alpha - 1)^2$ l'est encore mais aussi $(\alpha - 1)^4, (\alpha - 1)^8, \dots$, ce qui impose $\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$.

En résumé,

$$\begin{aligned} (\alpha \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{C}) &\Rightarrow ((\alpha = 0 \text{ ou } |\alpha| = 1) \text{ et } (\alpha = 1 \text{ ou } |\alpha - 1| = 1)) \\ &\Rightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ ou } |\alpha| = |\alpha - 1| = 1). \end{aligned}$$

Maintenant, $|a| = |a-1| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$ et $|a| = |a-1| \Leftrightarrow a \in \mathcal{C}((0,0),1) \cap \text{med}[(0,0),(1,0)] = \{-j, -j^2\}$.
 Donc, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est solution, il existe $K, \alpha, \beta, \gamma, K$ complexe non nul et α, β et γ entiers naturels tels que

$$P = KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma = KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$$

($-j$ et $-j^2$ devant avoir même ordre de multiplicité puisque P est à coefficients réels).

Réciproquement, si $P = KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$.

$$\begin{aligned} P(X^2) &= KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X^4-X^2+1)^\gamma = KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X^4+2X^2+1-3X^2)^\gamma \\ &= KX^{2\alpha}(X-1)^\beta(X+1)^\beta(X^2-\sqrt{3}X+1)^\gamma(X^2+\sqrt{3}X+1)^\gamma, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X)P(X+1) &= KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma K(X+1)^\alpha X^\beta(X^2+X+1)^\gamma \\ &= K^2 X^{\alpha+\beta} (X-1)^\beta (X+1)^\alpha (X^2-X+1)^\gamma (X^2+X+1)^\gamma. \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul, P est solution si et seulement si $P=0$ ou $K=1$ et $\alpha=\beta$ et $\gamma=0$.

Les polynômes solutions sont 0 et les $(X^2-X)^\alpha$ où α est un entier naturel quelconque.

Exercice n° 15

a est solution du problème si et seulement si $X^5 - 209X + a$ est divisible par un polynôme de la forme $X^2 + \alpha X + 1$. La division euclidienne de $X^5 - 209X + a$ par $X^2 + \alpha X + 1$ s'écrit

$$X^5 - 209X + a = (X^2 + \alpha X + 1)(X^3 - \alpha X^2 + (\alpha^2 - 1)X - (\alpha^3 - 2\alpha)) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208)X + a + (\alpha^3 - 2\alpha).$$

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} / \begin{cases} \alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \\ a = -\alpha^3 + 2\alpha \end{cases}$. Mais,

$$\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \in \{-13, 16\} \Leftrightarrow \alpha \in \{-4, 4, i\sqrt{13}, -i\sqrt{13}\}$$

et la deuxième équation fournit $a \in \{56, -56, 15i\sqrt{13}, -15i\sqrt{13}\}$.

Exercice n° 16

On note que $P(1) = 1 \neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^5 \frac{a_k + 2}{a_k - 1} = \sum_{k=1}^5 \left(1 + \frac{3}{a_k - 1} \right) = 5 - 3 \sum_{k=1}^5 \frac{1}{1 - a_k} = 5 - 3 \frac{P'(1)}{P(1)} = 5 - 3 \times \frac{12}{1} = -31.$$

Exercice n° 17

Notons (S) le système proposé.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{xy + xz + yz}{xyz} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = -4$$

$\Leftrightarrow x, y$ et z sont les trois solutions de l'équation $X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x, y$ et z sont les trois solutions de l'équation $(X-1)(X-2)(X+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(1, 2, -2), (1, -2, 2), (2, 1, -2), (2, -2, 1), (-2, 1, 2), (-2, 2, 1)\}$

Exercice n° 18

Le polynôme nul est solution. Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 1 ne convient pas.

Soit P un polynôme non nul solution de degré $n \geq 2$. Alors $n = n-1 + n-2$ et donc $n = 3$. Posons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(2X) = P'(X)P''(X) &\Leftrightarrow 8aX^3 + 4bX^2 + 2cX + d = (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b) \\
&\Leftrightarrow (18a^2 - 8a)X^3 + (18ab - 4b)X^2 + (4b^2 + 6ac - 2c)X + 2bc - d = 0 \\
&\Leftrightarrow 18a^2 - 8a = 18ab - 4b = 4b^2 + 6ac - 2c = 2bc - d = 0 \\
&\Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \text{ et } b = c = d = 0.
\end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et $\frac{4}{9}X^3$.

Exercice n° 19

1)

$$\begin{aligned}
P(r) = 0 &\Rightarrow a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} a_n p^n = q (-a_{n-1} p^{n-1} - \dots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}) \\ a_0 q^n = p (-a_n p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} q - \dots - a_1 q^{n-2}) \end{cases} .
\end{aligned}$$

La première égalité montre que q divise $a_n p^n$. Mais q est premier à p et donc q est premier à p^n . D'après le théorème de GAUSS, q divise a_n .

De même, la deuxième égalité montre que p divise a_0 .

2) 0 n'est pas racine de P .

Soit $r = \frac{p}{q}$, ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(p, q) = 1$) une éventuelle racine rationnelle de P . Alors, p divise 4 et q divise 12 et donc, p est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ et q est élément de $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ou encore r est élément de $\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{12} \right\}$.

Réciproquement, on trouve $P\left(\frac{2}{3}\right) = P\left(\frac{1}{4}\right) = 0$. P est donc divisible par

$$12 \left(X - \frac{2}{3}\right) \left(X - \frac{1}{4}\right) = (3X - 2)(4X - 1) = 12X^2 - 11X + 2.$$

Plus précisément, $P = (12X^2 - 11X + 2)(X^2 + X + 2) = (3X - 2)(4X - 1) \left(X - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\right) \left(X - \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}\right)$.

Exercice n° 20

Pour $n \geq 0$, posons $P_n = (X - 1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$. $P_n(0) = P_n(1) = P_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. P_n admet 0, 1 et $\frac{1}{2}$ pour racines et est donc divisible par $X(X - 1)(2X - 1) = 2X^3 - 3X^2 + X$.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, le quotient est nul. Si $n = 2$, le quotient vaut -2 .

Soit $n \geq 3$. On met successivement $2X - 1$ puis $X - 1$ puis X en facteur :

$$\begin{aligned}
P_n &= ((X-1)^2)^n - (X^2)^n + (2X-1) = ((X-1)^2 - X^2) \sum_{k=0}^{n-1} (X-1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + (2X-1) \\
&= (2X-1) \left(- \sum_{k=0}^{n-1} (X-1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + 1 \right) = (2X-1) \left(- \sum_{k=1}^{n-1} (X-1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + 1 - X^{2n-2} \right) \\
&= (2X-1) \left(-(X-1) \sum_{k=1}^{n-1} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - (X-1) \sum_{k=0}^{2n-1} X^k \right) \\
&= (2X-1)(X-1) \left(- \sum_{k=1}^{n-1} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=0}^{2n-1} X^k \right) \\
&= (2X-1)(X-1) \left(- \left(\sum_{k=1}^{n-2} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} \right) - \left(\sum_{k=1}^{2n-1} X^k \right) - 1 - (X-1)^{2n-3} \right) \\
&= (2X-1)(X-1) \left(- \sum_{k=1}^{n-2} (X-1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-3} X^k - \sum_{k=1}^{2n-3} (-1)^{2n-3-k} \binom{2n-3}{k} X^k \right) \\
&= X(2X-1)(X-1) \left(- \sum_{k=1}^{n-2} (X-1)^{2k-1} X^{2n-2k-3} - \sum_{k=1}^{2n-3} X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n-3} (-1)^{2n-3-k} C_{2n-3}^k X^{k-1} \right).
\end{aligned}$$

Exercice n° 21

1)

$$\begin{aligned}
1 &= (X + (1-X))^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{2n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k} \\
&= (1-X)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{n+m-1-k}
\end{aligned}$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1-X)^n = 1$. De plus, pour $n \leq k \leq 2n-1$, $\deg(X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}) = k-n+2n-1-k = n-1 < n$ et donc $\deg(U) < n$ et de même pour $0 \leq k \leq n-1$, $\deg(X^k(1-X)^{n-1-k}) = k+n-1-k = n-1 < n$ et $\deg(V) < n$.

2)

$$\begin{aligned}
1 &= (X + (1-X))^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} X^k (1-X)^{n+m-1-k} \\
&= (1-X)^m \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{n+m-1-k}.
\end{aligned}$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{n+m-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1-X)^m = 1$. De plus, pour $n \leq k \leq n+m-1$, $\deg(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}) = k-n+n+m-1-k = m-1 < m$ et donc $\deg(U) < m$ et de même pour $0 \leq k \leq n-1$, $\deg(X^k(1-X)^{n-1-k}) = k+n-1-k = n-1 < n$ et $\deg(V) < n$.

Exercice n° 22

Soit $n \geq 2$ le degré de P .

1) a) Si P admet n racines réelles simples, le théorème de ROLLE fournit au moins $n - 1$ racines réelles deux à deux distinctes pour P' . Mais, puisque P' est de degré $n - 1$, ce sont toutes les racines de P' , nécessairement toutes réelles et simples.

b) Le résultat tombe en défaut si les racines de P ne sont pas toutes réelles. Par exemple, $P = X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ est à racines simples dans \mathbb{C} mais $P' = 3X^2$ admet une racine double.

2) Séparons les racines simples et les racines multiples de P . Posons $P = (X - a_1) \dots (X - a_k)(X - b_1)^{\alpha_1} \dots (X - b_l)^{\alpha_l}$ où les a_i et les b_j sont $k + l$ nombres réels deux à deux distincts et les α_j des entiers supérieurs ou égaux à 2 (éventuellement $k = 0$ ou $l = 0$ et dans ce cas le produit vide vaut conventionnellement 1).

P s'annule déjà en $k + l$ nombres réels deux à deux distincts et le théorème de ROLLE fournit $k + l - 1$ racines réelles deux à deux distinctes et distinctes des a_i et des b_j . D'autre part, les b_j sont racines d'ordre α_j de P et donc d'ordre $\alpha_j - 1$ de P' . On a donc trouvé un nombre de racines (comptées en nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) égal

$$\text{à } k + l - 1 + \sum_{j=1}^l (\alpha_j - 1) = k + \left(\sum_{j=1}^l \alpha_j \right) - 1 = n - 1 \text{ racines réelles et c'est fini.}$$

Exercice n° 23

Pour k élément de $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, posons $x_k = \sin \frac{k\pi}{7}$ (les x_k sont deux à deux opposés). Il faut calculer les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned} P &= \left(X - \sin \frac{\pi}{7} \right) \left(X - \sin \frac{2\pi}{7} \right) \left(X - \sin \frac{3\pi}{7} \right) \left(X + \sin \frac{\pi}{7} \right) \left(X + \sin \frac{2\pi}{7} \right) \left(X + \sin \frac{3\pi}{7} \right) \\ &= \left(X^2 - \sin^2 \frac{\pi}{7} \right) \left(X^2 - \sin^2 \frac{2\pi}{7} \right) \left(X^2 - \sin^2 \frac{3\pi}{7} \right) \\ &= \left(X^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right) \right) \left(X^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{7} \right) \right) \left(X^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{6\pi}{7} \right) \right) \\ &= \frac{1}{8} Q(-2X^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{où } Q(Y) = \left(\cos \frac{2\pi}{7} - Y \right) \left(\cos \frac{4\pi}{7} - Y \right) \left(\cos \frac{6\pi}{7} - Y \right).$$

Posons $\omega = e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8} (\omega + \omega^6) (\omega^2 + \omega^5) (\omega^3 + \omega^4) = \frac{1}{8} (\omega^6 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^{12} + \omega^{14} + \omega^{15}) \\ &= \frac{1}{8} (\omega^6 + 1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{4} ((\omega + \omega^6) (\omega^2 + \omega^5) + (\omega + \omega^6) (\omega^3 + \omega^4) + (\omega^3 + \omega^4) (\omega^2 + \omega^5)) \\ &= \frac{1}{4} (2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 + 2\omega^5 + 2\omega^6) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2} (\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc, } Q = \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2} \right) Y + \left(-\frac{1}{2} \right) Y^2 - Y^3 = \frac{1}{8} (-8Y^3 - 4Y^2 + 4Y + 1) \text{ puis,}$$

$$P = \frac{1}{64} \left(-8(-2X^2 + 1)^3 - 4(-2X^2 + 1)^2 + 4(-2X^2 + 1) + 1 \right) = \frac{1}{64} (64X^6 - 112X^4 + 56X^2 - 7).$$

Une équation du 6ème degré dont les solutions sont les $\sin \frac{k\pi}{7}$, $k \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ est $64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 0$.

Maintenant, si $r = \frac{p}{q}$ (p entier relatif non nul, q entier naturel non nul, p et q premiers entre eux) est une racine rationnelle de cette équation, alors p divise -7 et q divise 64 et donc p est élément de $\{1, -1, 7, -7\}$ et q est élément de $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Réciproquement, on vérifie qu'aucun des rationnels r obtenu n'est racine de P et donc les racines de P sont irrationnelles.

Exercice n° 24

Si (x, y, z) est solution du système proposé noté (S), alors x , y et z sont deux à deux distincts. En effet, si par exemple $x = y$ alors $7 = y^2 + yz + z^2 = x^2 + xz + z^2 = 13$ ce qui est impossible. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - z^3 = 7(y - z) \\ z^3 - x^3 = 13(z - x) \\ x^3 - y^3 = 3(x - y) \end{cases} .$$

En additionnant les trois équations, on obtient $-10x + 4y + 6z = 0$ ou encore $-5x + 2y + 3z = 0$. Donc,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x - 3z) \\ \left(\frac{1}{2}(5x - 3z)\right)^2 + \frac{1}{2}(5x - 3z)z + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + \frac{1}{2}(5x - 3z)x + \left(\frac{1}{2}(5x - 3z)\right)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x - 3z) \\ 25x^2 - 20xz + 7z^2 = 28 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ 39x^2 - 36xz + 9z^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x - 3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 25x^2 - 20(13 - x^2 - z^2) + 7z^2 = 28 \\ 39x^2 - 36(13 - x^2 - z^2) + 9z^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x - 3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 5x^2 + 3z^2 = 32 \end{cases}$$

Soit (S') le système formé des deux dernières équations. On note que $x = 0$ ne fournit pas de solution et donc

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \\ xz = 13 - x^2 - \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2x^2 + 7}{3x} \\ \frac{(2x^2 + 7)^2}{9x^2} = \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{cases}$$

La deuxième équation s'écrit $(2x^2 + 7)^2 = 3x^2(32 - 5x^2)$ puis $19x^4 - 68x^2 + 49 = 0$ puis $x^2 = \frac{34 \pm 15}{19}$ D'où les solutions $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \sqrt{\frac{49}{19}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{49}{19}}$. Les quatre triplets solutions du système : $(1, -2, 3)$, $(-1, 2, -3)$, $\left(\frac{7}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{11}{\sqrt{19}}\right)$ et $\left(-\frac{7}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{11}{\sqrt{19}}\right)$.

Exercice n° 25

Posons $P = X^4 - 4X^3 - 36X^2 + \lambda X + \mu$.

(λ, μ) solution $\Leftrightarrow \exists(a, r) \in \mathbb{C}^2 /$ les racines de P soient $a, a + r, a + 2r, a + 3r$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists(a, r) \in \mathbb{C}^2 / & \begin{cases} \sigma_1 = 4 \\ \sigma_2 = -36 \\ \sigma_3 = -\lambda \\ \sigma_4 = \mu \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists(a, r) \in \mathbb{C}^2 / & \begin{cases} 4a + 6r = 4 \\ a(3a + 6r) + (a + r)(2a + 5r) + (a + 2r)(a + 3r) = -36 \\ \sigma_3 = -\lambda \\ \sigma_4 = \mu \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists(a, r) \in \mathbb{C}^2 / & \begin{cases} 2a + 3r = 2 \\ 6a^2 + 18ra + 11r^2 = -36 \\ \sigma_3 = -\lambda \\ \sigma_4 = \mu \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists(a, r) \in \mathbb{C}^2 / & \begin{cases} a = 1 - \frac{3}{2}r \\ 6\left(1 - \frac{3}{2}r\right)^2 + 18\left(1 - \frac{3}{2}r\right)r + 11r^2 = -36 \\ \sigma_3 = -\lambda \\ \sigma_4 = \mu \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists(a, r) \in \mathbb{C}^2 / & \begin{cases} -\frac{5}{2}r^2 + 42 = 0 \\ a = 1 - \frac{3}{2}r \\ \sigma_3 = -\lambda \\ \sigma_4 = \mu \end{cases} \end{aligned}$$

D'où la solution (les deux valeurs opposées de r fournissent évidemment la même progression arithmétique) $r = 2\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis $a = 1 - 3\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis les racines $z_1 = 1 - 3\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_2 = 1 - \sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_3 = 1 + \sqrt{\frac{21}{5}}$ et $z_4 = 1 + 3\sqrt{\frac{21}{5}}$, obtenues pour

$$\mu = z_1 z_2 z_3 z_4 = \left(1 - 3\sqrt{\frac{21}{5}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{21}{5}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{21}{5}}\right) \left(1 + 3\sqrt{\frac{21}{5}}\right) = \left(1 - 9 \times \frac{21}{5}\right) \left(1 - \frac{21}{5}\right) = \frac{2944}{25},$$

et

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(1 - 3\sqrt{\frac{21}{5}}\right) \left(1 - \frac{21}{5}\right) + \left(1 - 9 \times \frac{21}{5}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{21}{5}}\right) + \left(1 - 9 \times \frac{21}{5}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{21}{5}}\right) + \left(1 - \frac{21}{5}\right) \left(1 + 3\sqrt{\frac{21}{5}}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{21}{5}\right) + 2\left(1 - 9 \times \frac{21}{5}\right) = 2\left(2 - 10 \times \frac{21}{5}\right) = -80 \end{aligned}$$

Exercice n° 26

L'équation proposée admet deux solutions inverses l'une de l'autre si et seulement si il existe deux complexes a et b tels que

$$X^4 - 21X + 8 = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 8) = X^4 + (a + b)X^3 + (9 + ab)X^2 + (8a + b)X + 8 \quad (*)$$

$(*) \Leftrightarrow b = -a$ et $ab = -9$ et $8a + b = -21 \Leftrightarrow a = -3$ et $b = 3$. Ainsi,

$$X^4 - 21X + 8 = (X^2 - 3X + 1)(X^2 + 3X + 8) = \left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{-3 + i\sqrt{23}}{2}\right) \left(X - \frac{-3 - i\sqrt{23}}{2}\right).$$

Exercice n° 27

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. On veut calculer S_4 .

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $x_i^3 + 2x_i - 1 = 0$ et donc $x_i^4 + 2x_i^2 - x_i = 0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4 + 2S_2 - S_1 = 0$ et donc

$$\begin{aligned} S_4 + 2S_2 - S_1 &= -2 \left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \right) + (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= -2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_1 = -2(-2 \times 2) = 8. \end{aligned}$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8.$$

Exercice n° 28

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4. On suppose P unitaire sans perte de généralité. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de P dans \mathbb{C} .

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 forment un parallélogramme, notons a le centre de ce parallélogramme. Les racines de P s'écrivent alors $z_1, z_2, 2a - z_1, 2a - z_2$ et si $Q = P(X + a)$ alors $Q(-a + z_1) = Q(a - z_1) = Q(-a + z_2) = Q(a - z_2) = 0$. Les racines du polynôme Q sont deux à deux opposées, ce qui équivaut à dire que le polynôme Q est bicarré ou encore de la forme $X^4 + \alpha X^2 + \beta$ ou enfin que

$$P = (X - a)^4 + \alpha(X - a)^2 + \beta.$$

Mais alors a est racine de $P' = 4(X - a)^3 + 2\alpha(X - a)$ et de $P^{(3)} = 24(X - a)$.

Réciproquement, si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune a . $P^{(3)}$ est de degré 1 et de coefficient dominant 24 et donc $P^{(3)} = 24(X - a)$ puis en intégrant $P'' = 12(X - a)^2 + \lambda$ puis $P' = 4(X - a)^3 + \lambda(X - a) + \mu$. La condition a est racine de P' fournit $\mu = 0$ et donc $P = (X - a)^4 + \alpha(X - a)^2 + \beta$. Donc, le polynôme $Q = P(X + a)$ est bicarré et ses racines sont deux à deux opposées et donc de la forme $Z_1 = a - z_1, Z_2 = z_1 - a, Z_3 = a - z_2, Z_4 = z_2 - a$ et on a bien $Z_1 - Z_3 = Z_4 - Z_2$.

Exercice n° 29

Soit $P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = X^n - 1$ (où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$)

$$1) \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k} \right) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4 - \omega_k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2 - \omega_k)} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k} \right) = 2^n + 1.$$

2)

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} (\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1) &= \prod_{k=0}^{n-1} (e^{ia} - \omega_k)(e^{-ia} - \omega_k) = P(e^{ia})P(e^{-ia}) = (e^{ina} - 1)(e^{-ina} - 1) \\ &= 2 - e^{ina} - e^{-ina} = 2(1 - \cos na). \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}, \prod_{k=0}^{n-1} (\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1) = 2(1 - \cos na).$$