

## Planche n° 34. Déterminants : corrigé

### Exercice n° 1 :

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Notons  $\Delta$  le déterminant de l'énoncé. Pour  $x$  réel, on pose  $D(x) = \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$  (de sorte que  $\Delta = D(a)$ ).  $D$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de  $x^2$  vaut

$$-(-2c) + (b+c) + (b+c) - (-2b) = 4(b+c).$$

Puis,

$$D(-b) = \begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = 2b(4bc - (b+c)^2) + 2b(c-b)^2 = 0,$$

et par symétrie des rôles  $D(-c) = 0$ . De ce qui précède, on déduit que si  $b \neq c$ ,  $D(x) = 4(b+c)(x+b)(x+c)$  (même si  $b+c=0$  car alors  $D$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul).

Ainsi, si  $b \neq c$  (ou par symétrie des rôles, si  $a \neq b$  ou  $a \neq c$ , on a :  $\Delta = 4(b+c)(a+b)(a+c)$ ). Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où  $a = b = c$ . Dans ce cas,

$$D(a) = \begin{vmatrix} -2a & 2a & 2a \\ 2a & -2a & 2a \\ 2a & 2a & -2a \end{vmatrix} = 8a^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3 = 4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour  $a$  et  $b$  fixés, la fonction  $\Delta$  est une fonction continue de  $c$  et on obtient la valeur de  $\Delta$  pour  $c = b$  en faisant tendre  $c$  vers  $b$  dans l'expression de  $\Delta$  déjà connue pour  $c \neq b$ ).

### Exercice n° 2 :

Soit  $P = \begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$ .  $P$  est un polynôme unitaire de degré 4.

En remplaçant  $C_1$  par  $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  et par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que  $P$  est divisible par  $(X + a + b + c)$ . Mais aussi, en remplaçant  $C_1$  par  $C_1 - C_2 - C_3 + C_4$  ou  $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$  ou  $C_1 + C_2 - C_3 - C_4$ , on voit que  $P$  est divisible par  $(X - a - b + c)$  ou  $(X - a + b - c)$  ou  $(X + a - b - c)$ .

Si les quatre nombres  $-a - b - c$ ,  $-a + b + c$ ,  $a - b + c$  et  $a + b - c$  sont deux à deux distincts,  $P$  est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas,  $P = (X + a + b + c)(X + a + b - c)(X + a - b + c)(X - a + b + c)$ .

Notons alors que  $-a - b - c = a + b - c \Leftrightarrow b = -a$  et que  $-a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow a = b$ . Par symétrie des rôles, deux des quatre nombres  $-a - b - c$ ,  $-a + b + c$ ,  $a - b + c$  et  $a + b - c$  sont égaux si et seulement si deux des trois nombres  $a$ ,  $b$  ou  $c$  sont égaux en valeur absolue ce qui n'est pas le cas.

### Exercice n° 3 :

1) Pour  $n \geq 2$ , posons  $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ . Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1.

$$\Delta_n = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & & \vdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis, on fait apparaître un déterminant triangulaire en constatant que  $\det(L_1, L_2, \dots, L_n) = \det(L_1, L_2 + L_1, \dots, L_{n-1} + L_1, L_n + L_1)$ , ce qui fournit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 0 & -2 & \times & & \times \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

2)  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\sin(\alpha_i + \alpha_j) = \sin \alpha_i \cos \alpha_j + \cos \alpha_i \sin \alpha_j$  et donc si on pose  $C = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \vdots \\ \cos \alpha_n \end{pmatrix}$  et  $S = \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 \\ \vdots \\ \sin \alpha_n \end{pmatrix}$ ,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j = \cos \alpha_j S + \sin \alpha_j C.$$

En particulier,  $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \text{Vect}(C, S)$  et le rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\forall n \geq 3, \det(\sin(\alpha_i + \alpha_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0.$$

Si  $n = 2$ ,  $\det(\sin(\alpha_i + \alpha_j))_{1 \leq i, j \leq 2} = \sin(2\alpha_1) \sin(2\alpha_2) - \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)$ .

3) L'exercice n'a de sens que si le format  $n$  est pair. Posons  $n = 2p$  où  $p$  est un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \quad (\text{pour } 1 \leq j \leq p, C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j}) \\ &= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \quad (\text{par linéarité par rapport aux colonnes } C_1, C_2, \dots, C_p) \\ &= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad (\text{pour } p+1 \leq i \leq 2p, L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}). \end{aligned}$$

$$\text{et } \Delta_n = (a+b)^p (a-b)^p = (a^2 - b^2)^p.$$

4) On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

5) Pour  $1 \leq i \leq p$ ,

$$L_{i+1} - L_i = (C_{n+i}^0 - C_{n+i-1}^0, C_{n+i}^1 - C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i}^p - C_{n+i-1}^p) = (0, C_{n+i-1}^0, C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i-1}^{p-1}).$$

On remplace alors dans cet ordre  $L_p$  par  $L_p - L_{p-1}$  puis  $L_{p-1}$  par  $L_{p-1} - L_{p-2}$  puis ... puis  $L_2$  par  $L_2 - L_1$  pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \times \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite,  $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = \dots = \det(A_2) = 1$ .

6) En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

$$\text{où } \Delta_k = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & & \\ 0 & \ddots & 1 & & \\ 0 & 0 & -X & & \\ \hline 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & -X & 1 \end{vmatrix} = (-1)^k X^k \text{ et donc}$$

$$D_n = (-1)^n \left( X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right).$$

#### Exercice n° 4 :

Si deux des  $b_j$  sont égaux,  $\det(A)$  est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les  $b_j$  sont deux à deux distincts.

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $n$  nombres complexes tels que  $\lambda_n \neq 0$ .

$$\det(A) = \frac{1}{\lambda_n} \det \left( C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \right) = \det(B),$$

où la dernière colonne de  $B$  est de la forme  $(R(a_i))_{1 \leq i \leq n}$  avec  $R = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{X + b_j}$ .

On prend  $R = \frac{(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})}{(X + b_1) \dots (X + b_n)}$ .  $R$  ainsi définie est irréductible (car  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $a_i \neq -b_j$ ). Les pôles de  $R$  sont simples et la partie entière de  $R$  est nulle. La décomposition en éléments simples de  $R$  a bien la forme espérée.

Pour ce choix de  $R$ , puisque  $R(a_1) = \dots = R(a_{n-1}) = 0$ , on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n) \Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z \rightarrow -b_n} (z + b_n) R(z) = \frac{(-b_n - a_1) \dots (-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1) \dots (-b_n + b_{n-1})} = \frac{(a_1 + b_n) \dots (a_{n-1} + b_n)}{(b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) (b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1) (a_n + b_2) \dots (a_n + b_n) \dots (a_2 + b_n) (a_1 + b_n)} \Delta_{n-1}.$$

En réitérant et compte tenu de  $\Delta_1 = 1$ , on obtient

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)} = \frac{\text{Van}(a_1, \dots, a_n) \times \text{Van}(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

Dans le cas particulier où  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_i = b_i = i$ , en notant  $H_n$  le déterminant (de HILBERT) à calculer :

$$H_n = \frac{\text{Van}(1, 2, \dots, n)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)}.$$

Mais,

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) = \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^n (i + j) \right) = \prod_{i=1}^n \frac{(n + i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k!}{\left( \prod_{k=1}^n k! \right)^2},$$

et d'autre part,

$$\text{Van}(1, 2, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = \prod_{i=1}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^n (j - i) \right) = \prod_{i=1}^{n-1} (n - i)! = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n k!.$$

Donc,  $\forall n \geq 1$ ,  $H_n = \frac{\left( \prod_{k=1}^n k! \right)^3}{n!^2 \prod_{k=1}^{2n} k!}$ .

### Exercice n° 5 :

On procède par récurrence sur  $n \geq 1$ .

- Pour  $n = 1$ , c'est clair.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que tout déterminant  $\Delta_n$  de format  $n$  et du type de l'énoncé soit un entier divisible par  $2^{n-1}$ . Soit  $\Delta_{n+1}$  un déterminant de format  $n + 1$ , du type de l'énoncé. Si tous les coefficients  $a_{i,j}$  de  $\Delta_{n+1}$  sont égaux à 1, puisque  $n + 1 \geq 2$ ,  $\Delta_{n+1}$  a deux colonnes égales et est donc nul. Dans ce cas,  $\Delta_{n+1}$  est bien divisible par  $2^n$ . Sinon, on va changer petit à petit tous les  $-1$  en 1. Soit  $(i, j)$  un couple d'indices tel que  $a_{i,j} = -1$  et  $\Delta'_{n+1}$  le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de  $\Delta_{n+1}$  sauf le coefficient ligne  $i$  et colonne  $j$  qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) - \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_j - C'_j, \dots, C_n),$$

où  $C_j - C'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $-2$  en ligne  $i$ ). En développant ce dernier déterminant suivant sa  $j$ -ème colonne, on obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

où  $\Delta_n$  est un déterminant de format  $n$  et du type de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence,  $\Delta_n$  est divisible par  $2^{n-1}$  et donc  $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$  est divisible par  $2^n$ . Ainsi, en changeant les  $-1$  en 1 les uns après les autres, on obtient

$$\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \pmod{2^n}. \text{ Ce dernier déterminant étant nul, } \Delta_{n+1} \text{ est un entier divisible par } 2^n.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

### Exercice n° 6 :

$\det(M) = \text{Van}(1, 2, \dots, n) \neq 0$  et le système est de CRAMER. Posons  $\Delta = \det M$ . Les formules de CRAMER fournissent alors pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$  où

$$\Delta_k = \text{Van}(1, \dots, k-1, 0, k+1, \dots, n) = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ 1 & & (k-1)^2 & (k+1)^2 & & n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(en développant par rapport à la  $k$ -ème colonne). Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a

$$\begin{aligned} \Delta_k &= (-1)^{k+1} 1 \times 2 \dots \times (k-1) \times (k+1) \dots \times n \times \text{Van}(1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{n!}{k} \times \frac{\text{Van}(1, 2, \dots, n)}{(k-(k-1)) \dots (k-1)((k+1)-k) \dots (n-k)} = (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \Delta. \end{aligned}$$

Donc,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k = (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ .

**Exercice n° 7 :**

En remplaçant les colonnes  $C_1, \dots, C_n$  par respectivement  $C_1 + iC_{n+1}, \dots, C_n + iC_{2n}$ , on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{pmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes  $L_{n+1}, \dots, L_{2n}$  de la nouvelle matrice par respectivement  $L_{n+1} - iL_1, \dots, L_{2n} - iL_n$ , on obtient :

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

**Exercice n° 8 :**

**1ère solution.**

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\dots+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \quad (\text{car } 1 + \sigma(1) + 2 + \sigma(2) + \dots + n + \sigma(n) = 2(1 + 2 + \dots + n) \in 2\mathbb{N}) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

**2ème solution.** On multiplie par  $-1$  les lignes 2, 4, 6... puis les colonnes 2, 4, 6... On obtient  $\det B = (-1)^{2p} \det A = \det A$  (où  $p$  est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

**Exercice n° 9 :**

On suppose  $n \geq 2$ . La matrice nulle est solution du problème.

Soit  $A$  un élément de  $M_n(\mathbb{C})$  tel que  $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\det(A+B) = \det A + \det B$ . En particulier,  $2\det(A) = \det(2A) = 2^n \det A$  puis  $\det A = 0$  car  $n \geq 2$ . Donc,  $A \notin GL_n(\mathbb{C})$ .

Si  $A \neq 0$ , il existe une certaine colonne  $C_j$  qui n'est pas nulle. Puisque la colonne  $-C_j$  n'est pas nulle, on peut compléter la famille libre  $(-C_j)$  en une base  $(C'_1, \dots, -C_j, \dots, C'_n)$  de  $M_{n,1}(\mathbb{C})$ . La matrice  $B$  dont les colonnes sont justement  $C'_1, \dots, -C_j, \dots, C'_n$  est alors inversible de sorte que  $\det A + \det B = \det B \neq 0$ . Mais,  $A + B$  a une colonne nulle et donc  $\det(A + B) = 0 \neq \det A + \det B$ .

Ainsi, seule la matrice nulle peut donc être solution du problème. Réciproquement  $A = 0$  est solution.

**Exercice n° 10 :**

Le coefficient ligne  $k$ , colonne  $l$  de  $P^2$  vaut :

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^n \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^n \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=1}^n (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or,  $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$ . Mais,  $0 \leq k+l-2 \leq 2n-2 < 2n$  et donc,  $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0, n\} \Leftrightarrow k+l=2$  ou  $k+l=n+2$ . Dans ce cas,  $\alpha_{k,l} = n$ . Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1 - (\omega^{k+l-2})^n}{1 - \omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}} = 0.$$

$$\text{Ainsi, } P^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient ligne  $k$ , colonne  $l$  de  $P\bar{P}$  vaut :

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^n \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^n (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or,  $\omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z}$ . Mais,  $-n < -(n-1) \leq k-l \leq n-1 < n$  et donc  $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k=l$ . Dans ce cas,  $\beta_{k,l} = n$ .

Sinon,  $\beta_{k,l} = 0$ . Ainsi,  $P\bar{P} = nI_n$  (ce qui montre que  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $P^{-1} = \frac{1}{n}\bar{P}$ ).

Calculons enfin  $PA$ . Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de  $A$ . Le coefficient ligne  $k$ , colonne  $l$  de  $A$  peut s'écrire  $a_{l-k+1}$  si l'on adopte la convention commode  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$  et plus généralement pour tout entier relatif  $k$ ,  $a_{n+k} = a_k$ .

Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne  $k$ , colonne  $l$  de  $PA$  vaut

$$\sum_{u=1}^n \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par  $a_1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{v=l-n+1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v &= \sum_{v=1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{v=l-n+1}^0 \omega^{(k-1)(l-v)} a_v \\ &= \sum_{v=1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^n \omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} \text{ (en posant } w = v+n) \\ &= \sum_{v=1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^n \omega^{(k-1)(l-w)} a_w \\ &= \sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(l-v)} a_v = \omega^{(k-1)(l-1)} \sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(1-v)} a_v \end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites  $a_k$  et  $\omega_k$  ont même période  $n$  ce qui s'est traduit par  $\omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} = \omega^{(k-1)(l-v)} a_v$ ).

Posons alors  $S_k = \sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(1-v)} a_v$  pour  $k$  élément de  $[[1, n]]$ . On a montré que  $PA = (\omega^{(k-1)(l-1)} S_k)_{1 \leq k, l \leq n}$ .

$$\det(PA) = \det(\omega^{(k-1)(l-1)} S_k)_{1 \leq k, l \leq n} = \prod_{k=1}^n S_k \det(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n} = \left( \prod_{k=1}^n S_k \right) \det P.$$

Donc  $\det P \det A = \left( \prod_{k=1}^n S_k \right) \det P$ . Finalement, puisque  $\det P \neq 0$ ,

$$\det A = \prod_{k=1}^n \left( \sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(1-v)} a_v \right).$$

Par exemple, pour  $n=3$ ,  $\det A = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + ja_2 + j^2 a_3)(a_1 + j^2 a_2 + ja_3)$ .

### Exercice n° 11 :

On a toujours  $A \times {}^t \text{com} A = (\det A) I_n$  et donc

$$(\det A)(\det(\text{com} A)) = (\det A)(\det({}^t \text{com} A)) = \det((\det A) I_n) = (\det A)^n.$$

Si  $\det A \neq 0$ , on obtient  $\det(\operatorname{com}A) = (\det A)^{n-1}$ .

Si  $\det A = 0$ , alors  $A^t \operatorname{com}A = 0$  et  $\operatorname{com}A$  n'est pas inversible car sinon,  $A = 0$  puis  $\operatorname{com}A = 0$  ce qui est absurde.

Donc,  $\det(\operatorname{com}A) = 0$ . Ainsi, dans tous les cas,

$$\det(\operatorname{com}A) = (\det A)^{n-1}.$$

Si  $\operatorname{rg}A = n$ , alors  $\operatorname{com}A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$  (car  $\det(\operatorname{com}A) \neq 0$ ) et  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}A) = n$ .

Si  $\operatorname{rg}A \leq n - 2$ , soit  $A'$  une matrice de format  $n - 1$  extraite de  $A$  c'est-à-dire obtenue en supprimant dans  $A$  une ligne et une colonne. Alors  $\operatorname{rg}(A') \leq \operatorname{rg}(A) \leq n - 2 < n - 1$ . Puisque  $A'$  est de format  $n - 1$ ,  $A'$  n'est pas inversible et donc  $\det(A') = 0$ . Ainsi, tous les coefficients de la matrice  $\operatorname{com}(A)$  sont nuls et donc  $\operatorname{com}A = 0$ . Dans ce cas,  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}A) = 0$ .

Si  $\operatorname{rg}A = n - 1$ , il existe  $n - 1$  colonnes de  $A$  constituant une famille libre. Soit  $A'$  la matrice de format  $(n, n - 1)$  constituée de ces colonnes. On a  $\operatorname{rg}(A') = n - 1$ . Donc, il existe  $n - 1$  lignes de  $A'$  constituant une famille libre. Soit  $A''$  la matrice de format  $(n - 1, n - 1)$  constituée de ces lignes. On a  $\operatorname{rg}(A'') = n - 1$ . Donc  $A''$  est une matrice carrée inversible. On en déduit que  $\det(A'') \neq 0$ . Mais  $\det(A'')$  est, au signe près l'un des coefficients de la matrice  $\operatorname{com}(A)$ . Donc,  $\operatorname{com}(A) \neq 0$ . Par suite,  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}A) \geq 1$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} A \times {}^t(\operatorname{com}A) = 0 &\Rightarrow \operatorname{com}A \times {}^tA = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}({}^tA) \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{com}A) \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{com}A)) \geq \operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}A = n - 1 \\ &\Rightarrow n - \operatorname{rg}(\operatorname{com}A) \geq n - 1 \\ &\Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}A) \leq 1, \end{aligned}$$

et finalement si  $\operatorname{rg}A = n - 1$ ,  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}A) = 1$ .

### Exercice n° 12 :

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$  et donc la fonction  $x \mapsto \det(A(x))$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . De plus, en notant  $C_1, \dots, C_n$ , les colonnes de  $A$ ,

$$\begin{aligned} (\det A)' &= \left( \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \right)' = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{k=1}^n a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(k),k} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(k),k} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{k=1}^n \det(C_1, \dots, C'_k, \dots, C_n) \end{aligned}$$

### Applications.

1) Soit  $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$ .  $\Delta_n$  est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui précède,

$\Delta'_n = \sum_{k=1}^n \delta_k$  où  $\delta_k$  est le déterminant déduit de  $\Delta_n$  en remplaçant sa  $k$ -ème colonne par le  $k$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . En développant  $\delta_k$  par rapport à sa  $k$ -ème colonne, on obtient  $\delta_k = \Delta_{n-1}$  et donc  $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$ .

On a déjà  $\Delta_1 = X + 1$  puis  $\Delta_2 = (X + 1)^2 - 1 = X^2 + 2X \dots$

Montrons par récurrence que pour  $n \geq 1$ ,  $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$ .

C'est vrai pour  $n = 1$  puis, si pour  $n \geq 1$ ,  $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$  alors  $\Delta'_{n+1} = (n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1}$  et, par intégration,  $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n + \Delta_{n+1}(0)$ . Mais, puisque  $n \geq 1$ , on a  $n+1 \geq 2$  et  $\Delta_{n+1}(0)$  est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques. Par suite,  $\Delta_{n+1}(0) = 0$  ce qui montre que  $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n$ .

Le résultat est démontré par récurrence.

2) Soit  $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$ .  $\Delta_n = \det(a_1 e_1 + xC, \dots, a_n e_n + xC)$  où  $e_k$  est le  $k$ -ème vecteur de

la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $C$  est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. Par linéarité par rapport à

chaque colonne,  $\Delta_n$  est somme de  $2^n$  déterminants mais dès que  $C$  apparaît deux fois, le déterminant correspondant est nul. Donc,  $\Delta_n = \det(a_1 e_1, \dots, a_n e_n) + \det(a_1 e_1, \dots, xC, \dots, a_n e_n)$ . Ceci montre que  $\Delta_n$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

La formule de TAYLOR fournit alors :  $\Delta_n = \Delta_n(0) + X\Delta'_n(0)$ . Immédiatement,  $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^n a_k = \sigma_n$  puis

$$\Delta'_n(0) = \sum_{k=1}^n \det(a_1 e_1, \dots, C, \dots, a_n e_n) = \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} a_i = \sigma_{n-1}.$$

Donc,  $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$ .

### Exercice n° 13 :

1) Pour le deuxième déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est  $(-1)^{n-1}$ . Pour le premier, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met  $(n-1)$  en facteurs de la première colonne et on tombe sur le deuxième déterminant. Le premier déterminant vaut donc  $(-1)^{n-1}(n-1)$ .

2) Pour  $(i, j)$  élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $(i+j-1)^2 = j^2 + 2(i-1)j + (i-1)^2$ . Donc,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j = j^2(1)_{1 \leq i \leq n} + 2j(i-1)_{1 \leq i \leq n} + ((i-1)^2)_{1 \leq i \leq n}.$$

Les colonnes de la matrice sont donc éléments de  $\text{Vect}\left((1)_{1 \leq i \leq n}, (i-1)_{1 \leq i \leq n}, ((i-1)^2)_{1 \leq i \leq n}\right)$  qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang inférieur ou égal à 3. Donc, si  $n \geq 4$ ,  $\Delta_n = 0$ . Il reste ensuite

à calculer  $\Delta_1 = 1$  puis  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7$  puis  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (225 - 256) - 4(100 - 144) + 9(64 - 81) = -31 + 176 - 153 = -8$ .

3)

$$\Delta_n = \det(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1 + \dots + C_n, C_2, \dots, C_n) = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix},$$

par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros 2, ..., n, on retranche la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_n = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

4) Par  $n$  linéarité,  $D_n$  est somme de  $2^n$  déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il contient

au moins deux colonnes de  $x$ . Ainsi, en posant  $\Delta_n = \det(C_1 + xC, \dots, C_n + xC)$  où  $C_k = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \\ a_k \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$  et  $C = (1)_{1 \leq i \leq n}$ , on

obtient :

$$\Delta_n = \det(C_1, \dots, C_n) + \sum_{k=1}^n \det(C_1, \dots, C_{k-1}, xC, C_{k+1}, \dots, C_n),$$

ce qui montre que  $\Delta_n$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Posons  $\Delta_n = AX + B$  et  $P = \prod_{k=1}^n (a_k - X)$ . Quand  $x = -b$  ou  $x = -c$ , le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc :

**1er cas.** Si  $b \neq c$ .  $\Delta_n(-b) = P(b)$  et  $\Delta_n(-c) = P(c)$  fournit le système  $\begin{cases} -bA + B = P(b) \\ -cA + B = P(c) \end{cases}$  et donc  $A = -\frac{P(c) - P(b)}{c - b}$  et  $B = \frac{cP(b) - bP(c)}{c - b}$ . Ainsi, si  $b \neq c$ ,

$$\Delta_n = -\frac{P(c) - P(b)}{c - b}x + \frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} \text{ où } P = \prod_{k=1}^n (a_k - X).$$

**2ème cas.** Si  $b = c$ , l'expression obtenue en fixant  $x$  et  $b$  est clairement une fonction continue de  $c$  car polynomiale en  $c$ . On obtient donc la valeur de  $\Delta_n$  quand  $b = c$  en faisant tendre  $c$  vers  $b$  dans l'expression déjà connue de  $\Delta_n$  pour  $b \neq c$ .

Maintenant, quand  $b$  tend vers  $c$ ,  $-\frac{P(c) - P(b)}{c - b}$  tend vers  $-P'(b)$  et

$$\frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} = \frac{c(P(b) - P(c)) + (c - b)P(c)}{c - b},$$

tend vers  $-bP'(b) + P(b)$ . Si  $b = c$ ,

$$\Delta_n = -xP'(b) + P(b) - bP'(b) \text{ où } P = \prod_{k=1}^n (a_k - X).$$

5)  $\Delta_2 = 3$  et  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$ . Puis, pour  $n \geq 4$ , on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

D'où, pour  $n \geq 4$ ,  $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$  et la suite  $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n \geq 3}$  est constante. Par suite, pour  $n \geq 3$ ,  $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$  et donc la suite  $(\Delta_n)_{n \geq 2}$  est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour  $n \geq 2$ ,  $\Delta_n = \Delta_2 + (n - 2) \times 1 = n + 1$  (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = n + 1.$$