Planche n° 37. Dénombrements : corrigé

Exercice n° 1

1) Le nombre de mains est le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Il y en a

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 8 \times 31 \times 29 \times 28 = 201\,376.$$

$$\boxed{\text{Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a } 201\,376 \text{ mains de cinq cartes.}}$$

2) Il y a quatre couleurs (carreau, cœur, pique trèfle) et quatre hauteurs (à l'as, au roi, à la dame et au valet). Au total, il y a $4 \times 4 = 16$ quintes floches.

$$\boxed{\text{Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a } 16 \text{ quintes floches (dont quatre royales).}}$$

La probabilité d'avoir une quinte floche est donc $\dfrac{16}{201\,376} = \dfrac{1}{12\,586} = 0,000079\ldots$

3) Chaque carré d'as peut être accompagné d'une carte choisie parmi les 28 qui ne sont pas des as. Il y a donc 28 carrés d'as. Comme il y a 8 hauteurs possibles, il y a $28 \times 8 = 224$ mains contenant un carré.

$$\boxed{\text{Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a } 224 \text{ mains contenant un carré.}}$$

La probabilité d'avoir un carré est donc $\dfrac{224}{201\,376} = \dfrac{1}{899} = 0,0011\ldots$

4) Il y a 4 couleurs (carreau, cœur, pique ou trèfle). Le nombre de mains contenant 5 carreaux est le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble à 8 éléments. Il y en a

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56,$$

et donc au total, $4 \times 56 = 224$ mains contenant 5 cartes de couleurs identiques. On doit enlever à ces mains les quintes floches au nombre de 16 (qui sont à ranger dans la catégorie des quintes floches et pas la catégorie des couleurs). Il reste $224 - 16 = 208$ couleurs.

$$\boxed{\text{Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a } 208 \text{ couleurs.}}$$

La probabilité d'avoir une couleur est donc $\dfrac{208}{201\,376} = \dfrac{13}{12\,586} = 0,00103\ldots$

5) Comptons le nombre de mains contenant un full aux as par les rois (brelan d'as et paire de roi). Il y a 4 brelans d'as et $\binom{4}{2} = 6$ paires de rois. Il y a donc $4 \times 6 = 24$ mains contenant un full aux as par les rois. Maintenant, il y a 8 hauteurs possibles pour le full et pour chacune de ces hauteurs, il y a 7 hauteurs pour la paire soit au total $8 \times 7 = 56$ hauteurs pour le full. Il y a donc $24 \times 56 = 1344$ mains contenant un full.

$$\boxed{\text{Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a } 1\,344 \text{ mains contenant un full.}}$$

La probabilité d'avoir un full est donc $\dfrac{1\,344}{201\,376} = \dfrac{6}{899} = 0,0066\ldots$

6) Comptons le nombre de suites à l'as. Il y a 4 as, 4 rois, 4 dames, 4 valets et 4 dix et donc 4^5 mains contenant la séquence As, roi, dame, valet, dix. Une suite peut commencer à l'as, au roi, à la dame ou au valet et donc il y a $4 \times 4^5 = 4^6$ mains contenant 5 cartes qui se suivent. On doit retirer de ces mains celles qui fournissent une quinte floche et il reste $4^6 - 16 = 4080$ mains contenant une suite.

$$\boxed{\text{Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a } 4\,080 \text{ mains contenant une suite.}}$$

La probabilité d'avoir une suite est donc $\dfrac{4\ 080}{201\ 376} = \dfrac{255}{12856} = 0,019\ldots$

7) Il y a 8 hauteurs possibles du brelan et pour chaque hauteur $\dbinom{4}{3} = 4$ brelans possibles. Donc, $8 \times 4 = 32$ brelans possibles. On a 28 possibilités de compléter ce brelan par une quatrième carte puis 24 possibilités de compléter par une cinquième carte. L'ordre dans lequel on a reçu les deux dernières cartes n'a pas d'importance et donc il y a $32 \times \dfrac{28 \times 24}{2} = 10\ 752$ mains contenant un brelan.

Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a 10 752 mains contenant un brelan.

La probabilité d'avoir un brelan est donc $\dfrac{10\ 752}{201\ 376} = 0,053\ldots$

8) Il y a $\dbinom{8}{2} = 28$ hauteurs possibles des deux paires et pour chaque hauteur $\dbinom{4}{2} = 6$ doubles paires possibles. Donc, $\dbinom{8}{2} \times \dbinom{4}{2} \times \dbinom{4}{2} = 28 \times 6 \times 6 = 1\ 008$ doubles paires possibles. On a ensuite 24 possibilités de compléter ces deux paires par une cinquième carte. Il y a $1\ 008 \times 24 = 24\ 192$ mains contenant deux paires.

Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a 24 192 mains contenant deux paires.

La probabilité d'avoir deux paires est donc $\dfrac{24\ 192}{201\ 376} = 0,12\ldots$

9) Il y a $8 \times \dbinom{4}{2} = 48$ paires. On complète par une 3ème, 4ème et 5ème carte soit $28 \times 24 \times 20$ possibilités. L'ordre dans lequel on reçoit ces cartes n'a pas d'importance et il y a donc $48 \times \dfrac{28 \times 24 \times 20}{3 \times 2} = 107\ 520$.

Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a 107 520 mains contenant une paire.

La probabilité d'avoir une paire est donc $\dfrac{107\ 520}{201\ 376} = 0,53\ldots$

Exercice n° 2

Le nombre de mains est le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Il y en a

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 8 \times 31 \times 29 \times 28 = 201\ 376.$$

1) On prend une carte parmi les 4 rois et 4 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des rois. Au total,

$$\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 4 \times \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25}{4 \times 3 \times 2} = 4 \times 7 \times 9 \times 13 \times 25 = 81\ 900$$

mains contenant exactement un roi.

2) On prend 2 cartes parmi les 8 piques et 3 cartes parmi les 24 qui ne sont pas des piques. Au total,

$$\binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{24 \times 23 \times 22}{3 \times 2} = 4 \times 7 \times 4 \times 23 \times 22 = 56\ 672$$

mains contenant exactement deux piques.

3) On prend 2 cartes parmi les 8 piques et 2 cartes parmi les 8 cœurs et 1 cartes parmi les 16 qui ne sont ni des piques, ni des cœurs. Au total,

$$\binom{8}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{16}{1} = 28 \times 28 \times 16 = 12\ 544$$

mains contenant exactement deux piques et deux cœurs.

4) Le nombre de mains contenant 0 carreau est $\dbinom{24}{5} = \dfrac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 4 \times 23 \times 22 \times 21 = 42\ 504$ et le nombre de mains contenant 1 carreau est $\dbinom{8}{1} \times \dbinom{24}{4} = 8 \times \dfrac{24 \times 23 \times 22 \times 21}{4 \times 3 \times 2} = 8 \times 23 \times 22 \times 21 = 85\ 008$. Le nombre de mains contenant aux moins deux carreaux est le nombre total de mains auquel on retranche le nombre de mains contenant au plus un carreau. Au total, il y a

$$\binom{32}{8}-\binom{24}{5}-\binom{8}{1}\times\binom{24}{4}=201\ 376-42\ 504-85\ 008=73\ 864$$

mains contenant au moins deux carreaux.

5) Il y a $32-11=21$ cartes qui ne sont ni des rois, ni des trèfles. Le nombre de mains contenant deux trèfles et un roi qui n'est pas le roi de trèfles est

$$\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times\binom{21}{2}=3\times 21\times 21\times 10=13\ 230$$

et le nombre de mains contenant exactement deux trèfles et un roi qui est le roi de trèfle est

$$\binom{1}{1}\times\binom{7}{1}\times\frac{21}{3}=7\times\frac{21\times 20\times 19}{3\times 2}=7\times 7\times 10\times 19=9\ 310.$$

Au total, il y a $13\ 230+9\ 310=22\ 540$ mains contenant exactement un roi et deux trèfles.

Exercice n° 3

1) Il y a $\binom{49}{6}$ tirages possibles avec

$$\binom{49}{6}=\frac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44}{6\times 5\times 4\times 3\times 2}=49\times 47\times 46\times 3\times 44=13\ 983\ 816.$$

2) On choisit un numéro parmi les six bons numéros et les cinq autres parmi les $49-6=43$ mauvais numéros. Au total, il y a

$$\binom{6}{1}\times\binom{43}{5}=6\times\frac{43\times 42\times 41\times 40\times 39}{5\times 4\times 3\times 2}=6\times 43\times 14\times 41\times 39=5\ 775\ 588$$

tirages avec exactement 1 bon numéro. La probabilité d'avoir exactement un bon numéro est donc $\dfrac{5\ 775\ 588}{13\ 983\ 816}=0,41\ldots$

3) Deux bons numéros : $\binom{6}{2}\times\binom{43}{4}=1\ 851\ 150$. Probabilité : $\dfrac{1\ 851\ 150}{13\ 983\ 816}=0,13\ldots$.

Trois bons numéros : $\binom{6}{3}\times\binom{43}{3}=246\ 820$. Probabilité : $\dfrac{246\ 820}{13\ 983\ 816}=0,01\ldots$.

Quatre bons numéros : $\binom{6}{4}\times\binom{43}{2}=13\ 545$. Probabilité : $\dfrac{13\ 545}{13\ 983\ 816}=0,0009\ldots$.

Cinq bons numéros : $\binom{6}{5}\times\binom{43}{1}=258$. Probabilité : $\dfrac{258}{13\ 983\ 816}\approx 1,8\times 10^{-5}$.

Six bons numéros : $\binom{6}{6}\times\binom{43}{0}=1$. Probabilité : $\dfrac{1}{13\ 983\ 816}\approx 7\times 10^{-8}$.

Exercice n° 4

• Avec les accents : il y a $5!=120$ anagrammes du mot ÉLÈVE.

Sans les accents : le mot ELEVE est l'un des anagrammes. Il fournit $3!=6$ anagrammes deux à deux distincts en tenant compte des accents, 3! étant le nombre de permutations des 3 E dans leurs trois positions à savoir ÉLÈVE, ÉLEVÈ, ÈLEVÉ, ÈLÉVE, ELÈVÉ et ELÉVÈ.
Plus généralement, chacun des n anagrammes du mot ELEVE fournit 6 anagrammes deux à deux distincts du mot ÉLÈVE. Donc $6n=120$ ou encore $n=\dfrac{120}{6}=20$. Il y a 20 anagrammes du mot ELEVE.

Le mot MATHÉMATIQUES est constitué de 13 lettres à savoir 2 M, 2 A, 2 T, 1 H, 1 É, 1 I, 1 Q, 1 U, 1 E et 1S.
On compte d'abord les anagrammes en différenciant les deux M, les deux A et les deux T, par exemple en les notant M_1 et M_2. Il y en a 13!. Maintenant, l'anagramme MATHÉMATIQUES fournit $2!\times 2!\times 2!=8$ anagrammes deux à deux distincts où les M, les A et les T sont différenciés à savoir $M_1A_1T_1$HÉ$M_2A_2T_2$IQUES, $M_2A_1T_1$HÉ$M_1A_2T_2$IQUES, ...
Le nombre d'anagrammes cherché est donc

$$\frac{13!}{2!\times 2!\times 2!}=13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2=778\ 377\ 600.$$

Exercice n° 5

1) Soit E un ensemble à n éléments, $n \geqslant 1$, et a un élément fixé de E. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} A \setminus \{a\} \text{ si } a \in A \\ A \cup \{a\} \text{ si } a \notin A \end{array} \right. \end{array}$.

Montrons que f est involutive (et donc bijective). Soit A un élément de $\mathscr{P}(E)$.

- Si $a \notin A$, $f(A) = A \cup \{a\}$ et donc, puisque $a \in A \cup \{a\}$, $f(f(A)) = (A \cup \{a\}) \setminus \{a\} = A$.
- Si $a \in A$, $f(A) = A \setminus \{a\}$ et $f(f(A)) = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$.

Ainsi, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f \circ f(A) = A$ ou encore, $f \circ f = Id_{\mathscr{P}(E)}$.

Maintenant clairement, en notant $\mathscr{P}_p(E)$ (resp. $\mathscr{P}_i(E)$) l'ensemble des parties de E de cardinal pair (resp. impair), $f(\mathscr{P}_p(E)) \subset \mathscr{P}_i(E)$ et $f(\mathscr{P}_i(E)) \subset \mathscr{P}_p(E)$. Donc, puisque f est bijective

$$\text{card}(\mathscr{P}_p(E)) = \text{card}(f(\mathscr{P}_p(E))) \leqslant \text{card}(\mathscr{P}_i(E))$$

et de même $\text{card}(\mathscr{P}_i(E)) \leqslant \text{card}(\mathscr{P}_p(E))$. Finalement, $\text{card}(\mathscr{P}_i(E)) = \text{card}(\mathscr{P}_p(E))$.

2) Soient $E = \{a_1, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ parties à k éléments qui contiennent a. Donc, $n\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + ... + \binom{n-1}{k-1}$ est la somme du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_1 et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_2 ... et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_n.
Dans cette dernière somme, chaque partie à k éléments de E a été comptée plusieurs fois et toutes les parties à k éléments (en nombre égal à $\binom{n}{k}$) ont été comptés un même nombre de fois. Combien de fois a été comptée $\{a_1, a_2 ... a_k\}$? Cette partie a été comptée une fois en tant que partie contenant a_1, une fois en tant que partie contenant a_2... et une fois comme partie contenant a_k et donc a été comptée k fois.

Conclusion : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3) Soit $E = \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n\}$ un ensemble à $2n$ éléments. Il y a $\binom{2n}{n}$ parties à n éléments de E. Une telle partie a k éléments dans $\{a_1, ..., a_n\}$ et $n-k$ dans $\{b_1, ..., b_n\}$ pour un certain k de $\{0, ..., n\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de k éléments dans $\{a_1, ..., a_n\}$ et $\binom{n}{n-k}$ choix possibles de $n-k$ éléments dans $\{b_1, ..., b_n\}$ pour k donné dans $\{0, ..., n\}$. Quand k varie de 0 à n, on obtient :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice n° 6

Il y a $\binom{pq}{q}$ choix possibles d'une première classe. Cette première classe étant choisie, il y a $\binom{pq-q}{q} = \binom{(p-1)q}{q}$ choix possibles de la deuxième classe... et $\binom{q}{q}$ choix possibles de la p-ème classe. Au total, il y a $\binom{pq}{q}\binom{(p-1)q}{q}\cdots\binom{q}{q}$ choix possibles d'une première classe, puis d'une deuxième ...puis d'une p-ème.

Maintenant dans le nombre $\binom{pq}{q}\binom{(p-1)q}{q}\cdots\binom{q}{q}$, on a compté plusieurs fois chaque partition, chacune ayant été compté un nombre égal de fois.
On a compté chaque partition autant de fois qu'il y a de permutations des p classes à savoir $p!$. Le nombre cherché est donc :

$$\frac{1}{p!}\binom{pq}{q}\binom{(p-1)q}{q}\cdots\binom{q}{q} = \frac{1}{p!}\frac{(pq)!}{q!((p-1)q)!}\frac{((p-1)q)!}{q!((p-2)q)!}\cdots\frac{(2q)!}{q!q!}\frac{q!}{q!0!} = \frac{(pq)!}{p!(q!)^p}.$$

Exercice n° 7

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n,0} = 1$ (unique solution : $0 + 0 + ... + 0 = 0$) et $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{1,k} = 1$ (unique solution : $k = k$).

Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$. $a_{n+1,k}$ est le nombre de solutions en nombre entiers positifs x_i de l'équation $x_1 + ... + x_n + x_{n+1} = k$. Il y a $a_{n,k}$ solutions telles que $x_{n+1} = 0$ puis $a_{n,k-1}$ solutions telles que $x_{n+1} = 1$ ... puis $a_{n,0}$ solutions telles que $x_{n+1} = k$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1} + ... + a_{n,0}$ (et on rappelle $a_{n,0} = a_{1,k} = 1$).

Montrons alors par récurrence sur n, entier naturel non nul, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

- Pour $n = 1$, on a pour tout naturel k, $a_{1,k} = 1 = \binom{1+k-1}{k}$.
- Soit $n \geqslant 1$, supposons que $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = C_{n+k-1}^{k}$. Soit $k \geqslant 1$.

$$a_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i-1}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{n+i}{i+1} - \binom{n+i-1}{i} \right) = 1 + \binom{n+k}{k+1} - 1 = \binom{n+k}{k+1},$$

ce qui reste vrai pour $k = 0$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Exercice n° 8

On place le 0 soit au chiffre des unités, soit au chiffre des dizaines, soit au chiffre des centaines, soit au chiffre des milliers (mais pas au chiffre des dizaines de milliers) et le 0 étant placé, on n'y a plus droit.

Réponse : $4 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 4 \times 9^4 = 4 \times (80+1)^2 = 4 \times 6561 = 26244$.

Exercice n° 9

Si $n \geqslant 366$, on a $p_n = 1$ (Principe des tiroirs : si 366 personnes sont à associer à 365 dates d'anniversaire, alors 2 personnes au moins sont à associer à la même date d'anniversaire).

Si $2 \leqslant n \leqslant 365$, on a $p_n = 1 - q_n$ où q_n est la probabilité que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Il y a $(365)^n$ répartitions possibles des dates d'anniversaires (cas possibles) et parmi ces répartitions, il y en a $365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365 - (n-1))$ telles que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Finalement

$$p_n = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365 - (n-1))}{(365)^n} = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \frac{365-k}{365} = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

Ensuite,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{365}\right) \leqslant \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} -\ln\left(1 - \frac{k}{365}\right) \geqslant \ln 2.$$

Maintenant, soit $x \in [0, 1[$. On a

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \geqslant \int_0^x \frac{1}{1-0}\,dt = x.$$

Pour k élément de $[\![1, n-1]\!] \subset [\![1, 364]\!]$, $\frac{k}{365}$ est un réel élément de $[0, 1[$. En appliquant l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} -\ln\left(1 - \frac{k}{365}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{365} = \frac{n(n-1)}{730}.$$

Ainsi,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{n(n-1)}{730} \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 730\ln 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1 + \sqrt{1 + 2920\ln 2}}{2} = 22,9\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 23.$$

Finalement, dans un groupe d'au moins 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux que deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire.

Exercice n° 10 (C'est long à lire et inutile pour Sup et Spé)

1) Notre calendrier est 400 ans périodique (et presque $4 \times 7 = 28$ ans périodique). En effet,

a) la répartition des années bissextiles est 400 ans périodique (1600 et 2000 sont bissextiles mais 1700, 1800 et 1900 ne le sont pas (entre autre pour regagner 3 jours tous les 400 ans et coller le plus possible au rythme du soleil))

b) il y a un nombre entier de semaines dans une période de 400 ans. En effet, sur 400 ans, le quart des années, soit 100 ans, moins 3 années sont bissextiles et donc sur toute période de 400 ans il y a 97 années bissextiles et 303 années non bissextiles.

Une année non bissextile de 365 jours est constituée de $52 \times 7 + 1$ jours ou encore d'un nombre entier de semaines plus un jour et une année bissextile est constituée d'un nombre entier de semaine plus deux jours.
Une période de 400 ans est donc constituée d'un nombre entier de semaines auquel on ajoute

$$97 \times 2 + 303 \times 1 = 194 + 303 = 497 = 7 \times 71$$

jours qui fournit encore un nombre entier de semaines.

2) Deux périodes consécutives de 28 ans ne contenant pas d'exception (siècles non bissextiles) reproduisent le même calendrier. En effet, les 7 années bissextiles fournissent un nombre entiers de semaines plus 2×7 jours $= 2$ semaines et les 21 années non bissextiles fournissent un nombre entier de semaines plus 21×1 jours $= 3$ semaines.

3) D'après ce qui précède, il suffit de compter les 1ers de l'an qui tombe un dimanche ou un samedi sur une période de 400 ans donnée, par exemple de 1900 à 2299 (inclus).

On décompose cette période comme suit :

$$\boxed{1900},\ 1901 \to 1928,\ 1929 \to 1956,\ 1957 \to 1984,\ 1985 \to 2012,\ 2013 \to 2040,\ 2041 \to 2068,\ 2069 \to 2096,$$
$$\boxed{2097 \to 2100},\ 2101 \to 2128,\ 2129 \to 2156,\ 2157 \to 2184,\ \boxed{2185 \to 2200},\ 2201 \to 2228,\ 2229 \to 2256,$$
$$2257 \to 2284,\ \boxed{2285 \to 2299}.$$

4) On montre ensuite que sur toute période de 28 ans sans siècle non bissextile, le premier de l'an tombe un même nombre de fois chaque jour de la semaine (lundi, mardi,..). Quand on passe d'une année non bissextile à l'année suivante, comme une telle année contient un nombre entier de semaines plus un jour, le 1er de l'an tombe un jour plus tard l'année qui suit et deux jours plus tard si l'année est bissextile. Par exemple,
1er janvier 1998 : jeudi, 1er janvier 1999 : vendredi, 1er janvier 2000 : samedi, 1er janvier 2001 : Lundi, 1er janvier 2002 : Mardi, 1er janvier 2003 : Mercredi, 1er janvier 2004 : Jeudi, 1er janvier 2005 : samedi...

Notons A,B,C,D,E,F,G les jours de la semaine. Sur une période de 28 ans sans siècle non bissextile finissant par exemple une année bissextile, on trouve la séquence suivante :
ABCD FGAB DEFG BCDE GABC EFGA CDEF (puis çà redémarre ABCD...) soit 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 4F, et 4G.

5) Il reste à étudier les périodes à exception (encadrées dans le 3)).
Détermination du 1er janvier 1900. Le 1er janvier 2015 était un jeudi . Il en est donc de même du 1er janvier 2015-28 = 1987 et des premiers janvier 1959, 1931 et 1903 puis on remonte : 1903 Jeudi 1902 Mercredi 1901 Mardi 1900 Lundi (1900 n'est pas bissextile). Le premier de l'an 1900 était un Lundi.

Les premiers de l'an 2000, 2028 , 2056 et 2084 sont des samedis, 2088 un jeudi, 2092 un mardi, 2096 un dimanche et donc 2097 mardi 2098 mercredi 2099 jeudi 2100 vendredi.

2101 est un samedi de même que 2129, 2157, 2185 ce qui donne de 2185 à 2200 inclus la séquence :
S D L Ma J V S D Ma Me J V D L Ma Me

2201 est un jeudi de même que 2285 ce qui donne de 2285 à 2299 inclus la séquence : J V S D Ma Me J V D L Ma Me V S D
Le décompte des Lundis , mardis ... des périodes à exceptions est : 6D 4L 6Ma 5Me 5J 6V 4S. Dans toute période de 400 ans, le 1er de l'an tombe 2 fois de plus le dimanche que le samedi et donc plus souvent le dimanche que le samedi.

Exercice n° 11

On pose « H = vers le haut » et « D = vers la droite ». Un exemple de chemin de $(0, 0)$ à (p, q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est le nombre d'anagrammes du mot précédent. Il y en a $\binom{p+q}{q}$ (nombre de choix de l'emplacement du D).

Exercice n° 12

On note respectivement x, y et z le nombre de pièces de 10, 20 et 50 centimes. Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation $10x + 20y + 50z = 10000$ ou encore $x + 2y + 5z = 1000$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $x+2y = k \Leftrightarrow x = k-2y$ et donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$ de cette équation est $\left\{(k-2y, y),\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{k}{2}\right\}$ ou encore $\left\{(k-2y, y),\ 0 \leqslant y \leqslant E\left(\frac{k}{2}\right)\right\}$. Le nombre de solutions de cette équation est $E\left(\frac{k}{2}\right) + 1$.

Pour $0 \leqslant z \leqslant 200$ donné, le nombre de solutions de l'équation $x + 2y = 1000 - 5z$ est $E\left(\frac{1000 - 5z}{2}\right) + 1$. Le nombre de solutions en nombres entiers de l'équation $x + 2y + 5z = 1000$ est donc

$$\sum_{z=0}^{200}\left(E\left(\frac{1000-5z}{2}\right)+1\right)=\sum_{z=0}^{200}\left(E\left(\frac{-5z}{2}\right)+501\right)=201\times 501+\sum_{z=0}^{200}E\left(\frac{-5z}{2}\right)=100701+\sum_{z=0}^{200}E(\frac{-5z}{2}).$$

Enfin

$$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{200}E\left(\frac{-5z}{2}\right)&=\sum_{k=1}^{100}\left(E\left(\frac{-5(2k-1)}{2}\right)+E\left(\frac{-5(2k)}{2}\right)\right)=\sum_{k=1}^{100}\left(E\left(-5k+\frac{5}{2}\right)-5k\right)=\sum_{k=1}^{100}(-10k+2)\\&=200-10\frac{100\times 101}{2}.\end{aligned}$$

Le nombre de solutions cherché est donc $100701-50300=50401$. Il y a 50401 façons de payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes.

Exercice n° 13

1)

$$\begin{aligned}\chi_{A_1\cup\ldots\cup A_n}&=1-\chi_{\overline{A_1\cup\ldots\cup A_n}}=1-\chi_{\overline{A_1}\cap\ldots\cap\overline{A_n}}=1-\chi_{\overline{A_1}}\times\ldots\times\chi_{\overline{A_n}}\\&=1-(1-\chi_{A_1})\ldots(1-\chi_{A_n})=1-\left(1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\chi_{A_{i_1}}\ldots\chi_{A_{i_k}}\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\chi_{A_{i_1}}\ldots\chi_{A_{i_k}}\right),\end{aligned}$$

et en sommant sur les x éléments de E, on obtient le résultat.

2) Pour $1\leqslant k\leqslant n$, posons $A_k=\{\sigma\in S_n/\ \sigma(k)=k\}$. L'ensemble des permutations ayant au moins un point fixe est $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$. L'ensemble des permutations sans point fixe est le complémentaire dans $\mathscr{S}_n$ de $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$.

D'après 1), leur nombre est

$$\begin{aligned}\text{card}(S_n)-\text{card}(A_1\cup A_2\ldots\cup A_n)=\text{card}(S_n)&-\sum_{i=1}^{n}\text{card}(A_i)+\sum_{i<j}\text{card}(A_i\cap A_j)\\&-\ldots+(-1)^k\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k}\text{card}(A_{i_1}\cap\ldots A_{i_k})+\ldots\\&+(-1)^n\text{card}(A_1\cap\ldots\cap A_n).\end{aligned}$$

A_i est l'ensemble des permutations qui fixent i. Il y en a $(n-1)!$ (nombre de permutations de $\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}$). $A_i\cap A_j$ est l'ensemble des permutations qui fixent i et j. Il y en a $(n-2)!$. Plus généralement, $\text{card}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})=(n-k)!$.

D'autre part, il y a $n=\binom{n}{1}$ entiers i dans $\{1,\ldots,n\}$ puis $\binom{n}{2}$ couples (i,j) tels que $i<j$ et plus généralement, il y a $\binom{n}{k}$ k-uplets $(i_1,\ldots,i_k)$ tels que $i_1<i_2<\ldots<i_k$. Le nombre de dérangements est

$$n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\times(n-k)!=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ainsi le « problème des chapeaux » admet pour réponse

$$p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Montrons que cette suite tend très rapidement vers $\frac{1}{e}=0,36\ldots$ quand n tend vers l'infini.

La formule de TAYLOR-LAPLACE appliquée à la fonction $x\mapsto e^{-x}$ fournit $\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt$.

On en déduit que

$$\left|p_n - \frac{1}{e}\right| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ceci montre que p_n tend très rapidement vers $\dfrac{1}{e}$.

Exercice n° 14

Soit n un naturel non nul. Dire que f est une surjection de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ équivaut à dire que deux des entiers de $\{1, ..., n+1\}$ ont même image k par f et que les autres ont des images deux à deux distinctes et distinctes de k. On choisit ces deux entiers : $\dbinom{n+1}{2}$ choix et leur image commune : n images possibles ce qui fournit $n\dbinom{n+1}{2}$ choix d'une paire de $\{1, ..., n+1\}$ et de leur image commune. Puis il y a $(n-1)!$ choix des images des $n-1$ éléments restants. Au total, il y a $(n-1)! \times n\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n \times (n+1)!}{2}$ surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

Exercice n° 15

Soit $n \geqslant 5$. De chaque sommet part $n-1$ droites (vers les $n-1$ autres sommets) dont 2 sont des cotés et $n-3$ des diagonales. Comme chaque diagonale passe par 2 sommets , il y a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Ces diagonales se recoupent en $\dbinom{n(n-3)/2}{2}$ points distincts ou confondus. Dans ce décompte, chaque sommet a été compté autant de fois que l'on a choisi une paire de deux diagonales passant par ce sommet à savoir $\dbinom{n-3}{2}$. Maintenant, il y a n sommets.

Réponse :

$$\begin{aligned}\binom{n(n-3)/2}{2} - n\binom{n-3}{2} &= \frac{1}{2}\frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{n(n-3)}{2} - 1\right) - n\frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n(n-3)}{8}(n(n-3) - 2 - 4(n-4)) \\ &= \frac{n(n-3)}{8}(n^2 - 7n + 14)\end{aligned}$$

Les diagonales se recoupent en $\dfrac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points distincts ou confondus et distincts des sommets ou encore en $\dfrac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points au maximum.

Exercice n° 16

1) On a bien sûr $P(1) = 2$. Soit $n \geqslant 1$. On trace n droites vérifiant les conditions de l'énoncé. Elles partagent le plan en $P(n)$ régions. On trace ensuite D_{n+1}, une $(n+1)$-ème droite. Par hypothèse, elle coupe chacune des n premières droites en n points deux à deux distincts. Ces n points définissent $(n+1)$ intervalles sur la droite D_{n+1}. Chacun de ces $(n+1)$ intervalles partage une des $P(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $P(n+1) = P(n) + (n+1)$.

Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}P(n) &= P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(P(k+1) - P(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2}{2}\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ P(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}.}$$

2) On a bien sûr $Q(1) = 2$. Soit $n \geqslant 1$. On trace n plans vérifiant les conditions de l'énoncé. Ils partagent l'espace en $Q(n)$ régions. On trace ensuite P_{n+1}, un $(n+1)$-ème plan. Par hypothèse, il recoupe chacun des n premiers plans en n droites vérifiant les conditions du 1). Ces n droites délimitent $P(n) = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ régions sur le plan P_{n+1}. Chacune de ces régions partage une des $Q(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $Q(n+1) = Q(n) + P(n) = Q(n) + \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}Q(n) &= Q(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(Q(k+1) - Q(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k+2}{2}) = 2 + (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k \\ &= (n+1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^3+5n+6}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ Q(n) = \frac{n^3+5n+6}{6} = 1 + \frac{n\left(n^2+5\right)}{6}.}$$

Exercice n° 17

Soient n et k des entiers naturels tels que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
Soit E un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E.

Il y a P_n^k partitions de E en k classes. Parmi ces partitions, il y a celles dans lesquelles a est dans un singleton. Elles s'identifient aux partitions en $k-1$ classes de $E\setminus\{a\}$ et sont au nombre de P_{n-1}^{k-1}. Il y a ensuite les partitions dans lesquelles a est élément d'une partie de cardinal au moins 2. Une telle partition est obtenue en partitionnant $E\setminus\{a\}$ en k classes puis en adjoignant à l'une de ces k classes au choix l'élément a. Il y a $k \times P_{n-1}^k$ telles partitions. Au total, $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$.

Valeurs de P_n^k pour $1 \leqslant k, n \leqslant 5$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Exprimons maintenant en fonction des P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments. Soient E_n et E_p désignent des ensembles à n et p éléments respectivement.
Si $p > n$, il n'y a pas de surjections de E_n dans E_p.
On suppose dorénavant $p \leqslant n$. La donnée d'une surjection f de E_n sur E_p équivaut à la donnée d'une partition de l'ensemble E_n en p classes (chaque élément d'une même classe ayant même image par f) puis d'une bijection de l'ensemble des parties de la partition vers E_p.
Au total, il y a donc $p!P_n^p$ surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

Exercice n° 18

Soit Y_0 une partie fixée de E. Notons k le cardinal de Y_0. k est un élément de $[\![0,n]\!]$. Le nombre de couples $(X, Y_0) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \subset Y_0$ est encore le nombre de parties X de Y_0 à savoir 2^k.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$ fixé. Il y a $\dbinom{n}{k}$ parties Y de E de cardinal k et pour chaque partie Y de E de cardinal k, il y a 2^k couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \subset Y$. Au total, il y a $\dbinom{n}{k} \times 2^k$ couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \subset Y$ et $\mathrm{card}(Y) = k$.

Le nombre de couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \subset Y$ est donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (1+2)^n = 3^n.$$

$$\boxed{\text{Il y a } 3^n \text{ couples } (X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2 \text{ tels que } X \subset Y.}$$

Exercice n° 19

L'application $\varphi\ :\ X \mapsto C_E(X) = \overline{X}$ est une permutation de $\mathscr{P}(E)$ car φ est involutive. Donc,

$$\begin{aligned}2S_1 &= \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}(X\cap Y) + \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}\left(X\cap \overline{Y}\right)\\ &= \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \left(\text{card}(X\cap Y) + \text{card}\left(X\cap \overline{Y}\right)\right) = \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}(X),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}2\times 2S_1 &= \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}(X) + \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}\left(\overline{X}\right) = \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}(E)\\ &= \text{card}(E)\times\text{card}\left(\mathscr{P}(E)^2\right) = n\times(2^n)^2,\end{aligned}$$

et donc $S_1 = \dfrac{n2^{2n}}{4} = n2^{2n-2}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}S_2 &= \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}(X\cup Y) = \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}\left(\overline{X}\cup \overline{Y}\right) = \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \text{card}\left(\overline{X\cap Y}\right)\\ &= \sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} (n - \text{card}\,(X\cap Y)) = n2^{2n} - S_2 = n2^{2n} - n2^{2n-2} = 3n2^{2n-2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{S_1 = n2^{2n-2} \text{ et } S_2 = 3n2^{2n-2}.}$$

Exercice n° 20

1) Une loi de composition interne sur E est une application de $E\times E$ dans E (et réciproquement). Le nombre de lois de composition interne sur E est donc

$$\text{card}\left(E^{E\times E}\right) = n^{(n^2)}.$$

2) Posons $E = \{a_1,\ldots,a_n\}$. La donnée d'un ldci $*$ commutative équivaut à la donnée des $a_i * a_j$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$. Il y a n valeurs possibles pour chaque $a_i * a_j$ et $\dfrac{n(n+1)}{2}$ couples (i,j) tels que $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$. Le nombre de lois de composition interne sur E, commutatives est donc

$$n^{(n(n+1)/2)}.$$

3) Il y a n choix possibles de l'élément neutre. Pour chaque choix i tel que a_i soit élément neutre, les valeurs des $a_i * a_j$, $1\leqslant j\leqslant n$ et des $a_j * a_i$, $1\leqslant j\leqslant n$, sont imposées. Sinon, le nombre de choix pour les $a_j * a_k$, $j\neq i$, $k\neq i$, est encore le nombre d'applications de $(\{a_1,\ldots,a_n\}\setminus\{a_i\})^2$ vers $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Le nombre de lois de composition interne sur E possédant un élément neutre est donc

$$n\times n^{((n-1)^2)} = n^{n^2-2n+2}.$$

