

Planche n° 5. Le binôme de NEWTON : corrigé

Exercice n° 1.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1 = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (car } n \geq 1),$$

et donc $S_1 = S_2$. Puis $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, et donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

3) a) Posons $j = e^{2i\pi/3}$.

$$j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{\frac{2i\pi}{3} \times 3} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi).$$

Ensuite, puisque $j \neq 1$,

$$1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = \frac{1-1}{1-j} = 0.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k} = (1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

Maintenant,

- si $k \in 3\mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^3)^p + (j^3)^{2p} = 3$ car $j^3 = 1$.
- si $k \in 3\mathbb{N} + 1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p + 1$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j(j^3)^p + j^2(j^3)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0$
- si $k \in 3\mathbb{N} + 2$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p + 2$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2(j^3)^p + j^4(j^3)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0$.

Finalement, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} &= \frac{1}{3} (2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3} (2^n + 2 \operatorname{Re}((1+j)^n)) \\ &= \frac{1}{3} (2^n + 2 \operatorname{Re}((-j^2)^n)) = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right).$$

4) Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = k \binom{n-1}{k-1}.$$

5) $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ ou encore $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

6) a) **1ère solution.** Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

Pour tout x réel,

$$P(x) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.}$$

2ème solution. D'après 4),

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

b) **1ère solution.** Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t) dt = \int_0^x (1+t)^n dt = \frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1).$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.}$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1) \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} ((1+1)^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

7) Pour $1 \leq k \leq n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k=0$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1} = 0$).
Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-p} \left(\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} \right) \\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 \text{ (somme télescopique)} \\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de PASCAL. Quand on descend dans le triangle de PASCAL, le long de la colonne p , du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

Exercice n° 2. La formule du binôme de NEWTON fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (a-b)^k (2c)^{9-k} = (a-b)^9 + \dots + \binom{9}{6} (a-b)^6 (2c)^3 + \dots + (2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} a^k (-b)^{6-k} = a^6 - \dots + \binom{6}{4} a^4 (-b)^2 - \dots + (-b)^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6} \binom{6}{4} 2^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times 2^3 = 3 \times 4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 8 = 10080.$$

Exercice n° 3.

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

et

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) + 6abc.$$

Exercice n° 4.

Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1}}{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \times \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (ce qui équivaut à $n < \frac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n .

2ème cas. Si $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$ (ce qui équivaut à $n \leq \frac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n .

3ème cas. Si $0 < \frac{na-b}{a+b} \leq n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\frac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale).

Si $\frac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$, on pose $k_0 = E\left(\frac{na-b}{a+b}\right) + 1$, la suite u croit strictement jusqu'à ce rang puis décroît strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k , atteint une et une seule fois.

Si $\frac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice $k_0 - 1$ et à l'indice k_0 .

Exercice n° 5.

Pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} &= 5n \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \\ &\Leftrightarrow n(-24 + 3(n-1) + (n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

D'autre part, $1 + 0 + 0 \neq 5$ et $2 + 1 + 0 \neq 10$ et donc 1 et 2 ne sont pas solution de l'équation. L'équation proposée admet une solution et une seule dans $\mathbb{N}^*$ à savoir 5.

Exercice n° 6.

Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k 1^{n-k} \right) \\ &= \operatorname{Re} ((e^{i\theta} + 1)^n) = \operatorname{Re} \left(\left(e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) \right)^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left(2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^n e^{in\theta/2} \right) \\ &= 2^n \cos^n \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{n\theta}{2} \right). \end{aligned}$$