

Chapitre : \_\_\_\_\_

**CORRIGÉ**

**Exercice 1 :**

Un embrayage composé de deux disques est représenté ci-dessous. L'effort presseur est appliqué sur le disque 2, et 1 est animé d'une rotation de vitesse  $\bar{\omega}_{(0/1)} = \omega \vec{z}$  ( $\omega$  : positive).

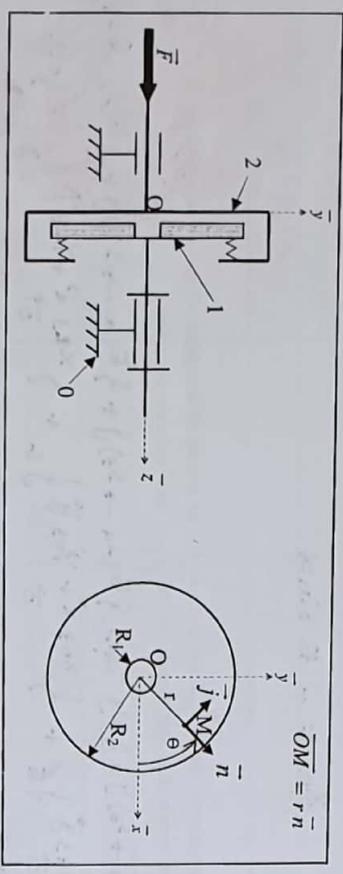
Pour permettre l'embrayage, le système doit transmettre un couple  $C\vec{z}$  donné.

La résultante générale du torseur de l'action mécanique exercée par 2 sur 1 est  $\vec{F}_z$ . Le but de l'exercice est de choisir la nature des matériaux des surfaces en contact afin d'assurer un fonctionnement correct de l'embrayage.

On pose  $k$  : coefficient de frottement entre les deux disques en contact sur une couronne de rayon extérieur  $R_2$  et intérieur  $R_1$ .

La densité surfacique de contact entre 1 et 2 est de la forme :

$$\vec{f}(M) = p\vec{z} + t\vec{j} \quad (p : \text{constante})$$



1. En se plaçant à la limite du glissement, écrire une relation entre  $t$  et  $p$ .

$\vec{p}$  : densité Normale } lois de Coulomb  
 $t\vec{j}$  : tangentielle }  
 $|t| = k|p|$

2. Exprimer  $|F|$  en fonction de  $p$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

$$|F| = \left( \int_{(S)} f(M) \cdot ds \right) \cdot \vec{z} = \int_{(S)} (p\vec{z} + k|p|\vec{j}) \cdot ds \cdot \vec{z} = \int_{(S)} p \cdot ds$$

$$|F| = \pi p (R_2^2 - R_1^2)$$

3. Déterminer le couple  $|C|$  en fonction de  $p$ ,  $k$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

$$|C| = \vec{z} \cdot \int_{(S)} \vec{OM} \wedge \vec{f}(M) \cdot ds = \int_{(S)} \vec{z} \cdot [r\vec{n} \wedge (p\vec{z} + t\vec{j})] \cdot ds = \int_{(S)} r t \cdot ds$$

$$= k \int_{(S)} r \cdot ds = k \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = k \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr \cdot 2\pi$$

$$|C| = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot 2\pi \cdot k$$

$$|C| = \frac{2\pi}{3} k p (R_2^3 - R_1^3)$$

4. Déduire le coefficient de frottement  $k$ , en fonction de  $|C|$ ,  $|F|$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .  
 Des équations précédentes, on trouve :

$$k = \frac{3 \cdot |C| \cdot (R_2^2 - R_1^2)}{2 \cdot |F| \cdot (R_2^3 - R_1^3)}$$

**Exercice 2 :**

La cisaille représentée sur la figure permet d'amplifier l'effort  $\vec{F}$  exercé par l'opérateur, afin de faciliter la coupe des tôles.

L'objectif de l'étude est de déterminer l'effort de coupe au point E. Le mécanisme est constitué de :

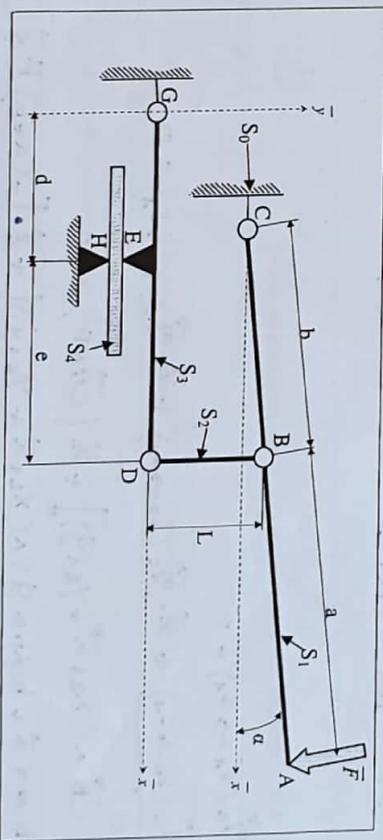
- Bâti  $S_0$  auquel est lié le repère  $R_0(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  supposé galiléen ;
- Bras  $S_1$  : l'action mécanique exercée par l'opérateur sur  $S_1$  est représentée par un glisseur en A de résultante  $\vec{F}$  (de module  $F$ ).
- Bielle  $S_2$  supportée verticalement la coupe ;  $DB = l \cdot \vec{y}$ .
- Mâchoire  $S_3$  comportant la lame de coupe.
- Tôle à découper  $S_4$ .

Les liaisons en B, C, D et G sont des pivots parfaits d'axe  $\vec{z}$ .

Les liaisons en E et H sont supposées ponctuelles parfaites de normale  $\vec{y}$ .

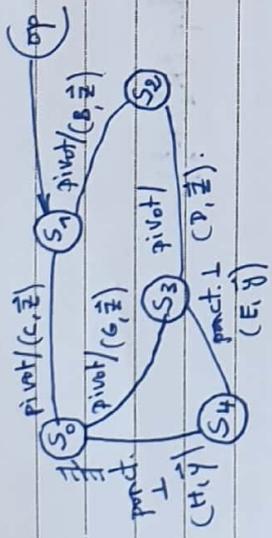
Les poids des différents solides sont négligés.

Notation :  $\{ \tau_{(S_i - S_j)} \} = \begin{cases} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{cases}$  Torseur de l'action mécanique du solide  $S_i$  sur  $S_j$  réduit au centre  $A_{ij}$  de leur liaison



On demande :

1. Dresser le schéma d'analyse de la cisaille.



2. Donner la forme du torseur de l'action mécanique de  $S_2$  sur  $S_1$  au point B, et celle de du torseur de l'action mécanique de  $S_3$  sur  $S_1$  au point E.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}(S_2 \rightarrow S_1) \\ \vec{T}(S_3 \rightarrow S_1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l|l} \begin{matrix} X_{21} & b_{21} \\ Y_{21} & m_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \gamma_{34} \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} B(-1, \vec{z}) \\ E(-1, \vec{y}) \end{matrix} \end{array} \right\}$$

3. Le problème étant plan, réécrire les torseurs précédents.

$$\left\{ \vec{T}(S_2 \rightarrow S_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{l|l} \begin{matrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \gamma_{34} \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} B(-1, \vec{z}) \\ E(-1, \vec{y}) \end{matrix} \end{array} \right\}$$

4. Isoler le solide  $S_1$  :

4.1. Ecrire le T.R.S en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}(S_0 \rightarrow S_1) + \vec{R}(S_2 \rightarrow S_1) + \vec{F} = \vec{0}$$

$$X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} + X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} - F \cos \alpha \vec{y} + F \sin \alpha \vec{x} = \vec{0}$$

$$\text{T.R.S}/\vec{x} : X_{01} + X_{21} + F \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\text{T.R.S}/\vec{y} : Y_{01} + Y_{21} - F \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

4.2. Ecrire le T.M.S au point C en projection sur  $\vec{z}$ .

$$\vec{z} \cdot \vec{M}_C(S_1 \rightarrow S_1) = 0$$

$$\vec{z} \cdot \vec{M}_C(S_0 \rightarrow S_1) + \vec{z} \cdot \vec{M}_C(S_2 \rightarrow S_1) + \vec{z} \cdot \vec{M}_C(OP \rightarrow S_1) = 0$$

$$\vec{z} \cdot (CB \wedge (X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y})) + \vec{z} \cdot (CA \wedge \vec{F}) = 0$$

$$\vec{z} \cdot [(b \cos \alpha \vec{x} + b \sin \alpha \vec{y}) \wedge (X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y})] + \vec{z} \cdot [-(a+b) \vec{F}] = 0$$

$$b [\gamma_{21} \cos \alpha - X_{21} \sin \alpha] - F(a+b) = 0 \quad (3)$$

5. En étudiant l'équilibre de  $S_2$ , montrer que  $X_{12} = 0$ , et trouver la relation liant  $\{r_{01}, r_{02}\}$  et  $\{r_{03}, r_{04}\}$ .

$$\left\{ \vec{T}(S_2 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{T}(S_3 \rightarrow S_2) + \vec{T}(S_4 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

Donc:  $\left\{ \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} = - \left\{ \vec{T}(S_3 \rightarrow S_2) + \vec{T}(S_4 \rightarrow S_2) \right\}$

T.M.S au pt. D au proj.  $\vec{z}$  :

$$\vec{z} \cdot \vec{M}_D(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{z} \cdot \vec{M}_D(S_3 \rightarrow S_2) = 0$$

$$\vec{z} \cdot (DB \wedge (X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y})) = 0 \Leftrightarrow \vec{z} \cdot (L \vec{y} \wedge (X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y})) = 0$$

$$\Rightarrow L X_{12} = 0 \text{ soit } X_{12} = 0$$

6. Exprimer alors  $X_{01}$ ,  $Y_{01}$  et  $Y_{12}$  en fonction de  $F$  et des dimensions géométriques.

Des eq. précédentes, on tire :

$$Y_{21} = \frac{a+b}{b \cos \alpha} \cdot F ; Y_{01} = F \left( \cos \alpha - \frac{a+b}{b \cos \alpha} \right)$$

$$X_{01} = -F \sin \alpha$$

7. Appliquer le P.F.S au solide  $S_3$  au point G et déterminer l'expression de l'effort de coupe  $Y_{43}$ , en fonction de  $F$  et des autres données.

$$\left\{ \vec{T}(S_3 \rightarrow S_3) \right\} = \left\{ 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \vec{T}(S_1 \rightarrow S_3) \right\} + \left\{ \vec{T}(S_2 \rightarrow S_3) \right\} + \left\{ \vec{T}(S_4 \rightarrow S_3) \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{43} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} X_{03} \vec{x} + Y_{03} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\text{T.R.S}/\vec{x} : X_{03} + X_{23} = 0$$

$$\text{T.R.S}/\vec{y} : \gamma_{43} + Y_{03} + Y_{23} = 0$$

$$\text{T.M.S au G}/\vec{z} : (GE \wedge \gamma_{43} \vec{y}) \cdot \vec{z} + (GO \wedge (X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y})) \cdot \vec{z} = 0$$

$$[(R \vec{y} + d \vec{x}) \wedge \gamma_{43} \vec{y}] \cdot \vec{z} + [(d+c) \vec{x} \wedge (X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y})] \cdot \vec{z} = 0$$

$$d \gamma_{43} + (d+c) \gamma_{23} = 0 \Rightarrow \gamma_{43} = -\frac{d+c}{d} \gamma_{23}$$

$$\text{or. } \gamma_{23} = -\gamma_{32} \text{ et } \gamma_{32} = \gamma_{12}$$

$$\text{donc. } \gamma_{23} = \gamma_{12} = -\frac{a+b}{b \cos \alpha} \cdot F$$

$$\text{soit alors. } \gamma_{43} = \frac{(d+c)(a+b)}{d \cdot b \cdot \cos \alpha} \cdot F$$

**Exercice 3 : (Extrait adapté du C.N.C 98)**

Les manipulateurs MANUMAX exécutent des mouvements combinés et répétitifs selon un cycle déterminé. Ils sont adaptables à plusieurs tâches : chargement et déchargement d'une machine, assemblage de pièces.

La figure donne la schématisation adoptée pour l'étude de l'ensemble automatique de manipulation.

Le mécanisme est constitué de 4 solides : 0, 1, 2 et 3.

0 : Socle (Bâti) : Repère lié  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ .

1 : Corps : Repère lié  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ , masse  $m_1$ , centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\vec{OG}_1 = a\vec{z}_1$ . Le mouvement de 1/0 est une rotation d'axe  $(O_1, \vec{z}_1)$  et de paramètre  $\alpha$ .

2 : Bras : Repère lié  $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{z}_2)$ ; masse  $m_2$ , centre d'inertie  $G_2$ , tel que  $\vec{OG}_2 = -d\vec{x}_2$ . Le mouvement de 2/1 est une translation d'axe  $(O_2, \vec{z}_2)$  et de paramètre  $z$  tel que :  $\vec{OO}_2 = z\vec{z}_2 + l_1\vec{x}_2$

3 : Main avec la pièce qu'elle tient : Repère lié  $R_3(G_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$ ; masse  $m_3$ , centre d'inertie  $G_3$ , tel que  $\vec{OG}_3 = x\vec{x}_3$ .

Le mouvement de 3/2 est une translation et rotation d'axe  $(O_3, \vec{x}_3)$  de paramètres  $\beta$  et  $x$ .

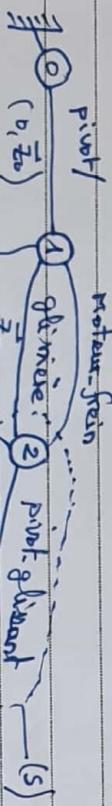
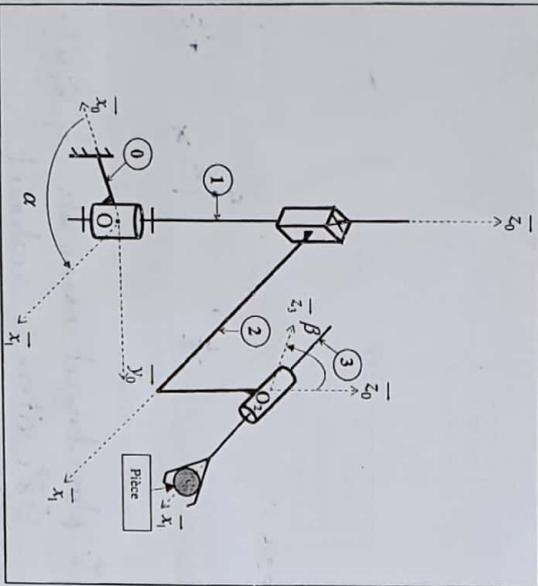
L'ensemble est au repos et le moteur frein installé entre 1 et 2 applique sur ce dernier un glisseur de résultante  $F\vec{z}$  au centre de la liaison 1-2.

Toutes les liaisons sont parfaites

$\vec{z}_0$  : vertical ascendant.

On demande :

1. Tracer le schéma d'analyse (graphe des actions mécaniques).



2. Isoler l'ensemble S = 2+3 puis déterminer F en fonction des données.

$$\begin{aligned} \{G_1(\vec{x} \rightarrow \vec{y})\} &= \int G_1(\vec{x} \rightarrow \vec{y}) + \int G_1(\text{main} \rightarrow \vec{y}) + \int G_1(\vec{g} \rightarrow \vec{y}) = \int G_1 \vec{y} \\ \text{RS}/\vec{z}_0 &: \vec{z}_0 \cdot \vec{R}(\vec{x} \rightarrow \vec{z}_1) + \vec{z}_0 \cdot \vec{R}(\text{main} \rightarrow \vec{z}_1) + \vec{z}_0 \cdot \vec{R}(\vec{g} \rightarrow \vec{z}_1) = 0 \\ &F - (m_2 + m_3)g = 0 \end{aligned}$$

$$F = (m_2 + m_3)g$$

**Exercice 4 :**

Le semi remorque proposé se compose d'un tracteur 1 et d'une benne 2 articulée en C sur le châssis 3.

Le levage de la benne est réalisé par l'intermédiaire d'un vérin hydraulique 4+5.

Le vérin est articulé en B sur la benne et en A sur le châssis.

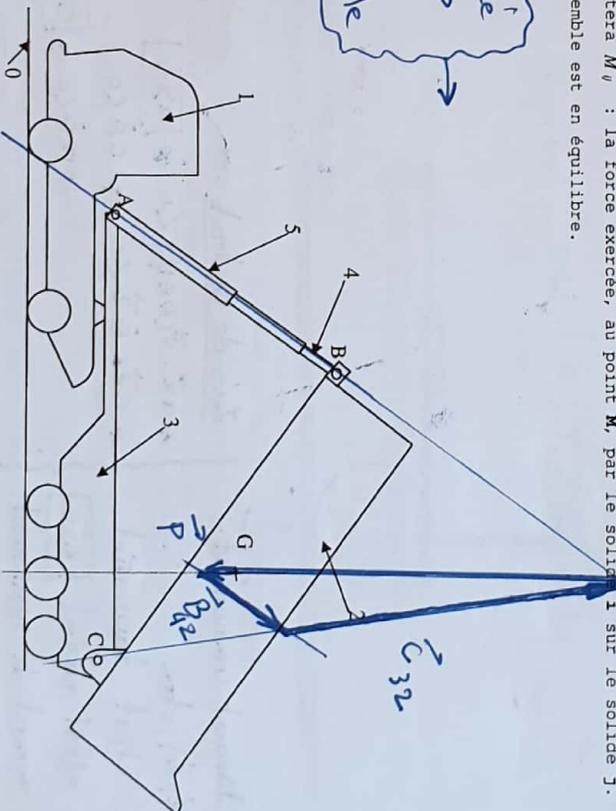
Le poids de la benne est de 20000 dan et G son centre de gravité.

Le poids du vérin ainsi que les frottements sont négligés.

On notera  $\vec{M}^j$  : la force exercée, au point M, par le solide i sur le solide j.

L'ensemble est en équilibre.

Ce choc n'est pas à la pelle



1. Isoler le vérin 4+5 et déduire le support de la force  $\vec{B}_{21}$ .

(4+5) est en eq. avec l'action de 2 forces:  $\vec{A}_{15}$  et  $\vec{B}_{24}$

Les deux forces, ont alors le même support:  $E$  est la droite (AB).

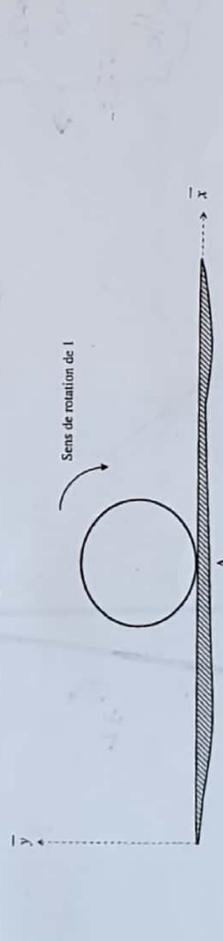
2. Isoler 2, puis déterminer, graphiquement, la force  $\vec{B}_2$ .  
 (2) est en éq. sous l'action de 3 forces:  $\vec{B}_{42}$ ,  $\vec{C}_{32}$  et  $\vec{P}$   
 Les supports des 3 forces sont concourants en un pt. I /:

$I = (AB) \cap (\vec{C}_{32} \text{ passant par } G)$ .  
 D'où: Le support de  $\vec{C}_{32}$  est (CI).  
 $\vec{B}_{42} + \vec{C}_{32} + \vec{P} = \vec{0}$ , traçons cette somme: en trouvant  $B_{42} \approx 500$  DAN

3. Sachant que la section utile du piston est  $S = 315 \text{ mm}^2$ , déterminer la pression  $p$  du fluide injecté dans le vérin.  
 $\|\vec{B}_{42}\| = P \cdot S \Rightarrow P = \frac{B_{42}}{S}$   
 $A \cdot \vec{N}: P \approx 159,73 \text{ DAN} \cdot \text{mm}^{-2}$

Exercice 5:  
 Une roue 1 roule et glisse sur un plan horizontal 0.  
 A : point de contact entre la roue et le sol.

On pose:  $\left\{ \begin{matrix} \tau_{(0 \rightarrow 1)} \\ \vec{v}_{(1/0)} \end{matrix} \right\}_A$  et  $\left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}_z \\ \vec{v}_{(A \in 1/0)} \end{matrix} \right\}_A$  avec  $\vec{v}_{(A \in 1/0)}$  porté par  $-\vec{x}$



1. Donner le signe de a, b et c.  
 Le plan tangent commun est:  $(A, \vec{x}, \vec{z})$  donc:  $\vec{a} \cdot \vec{x}, \vec{b} \cdot \vec{y}, \vec{c} \cdot \vec{z}$   
 \*  $\vec{a} \cdot \vec{x}: \vec{v}_{(A \in 1/0)} < 0 \Rightarrow a > 0$   
 \*  $\vec{c} \cdot \vec{z}: \dot{\theta}_z < 0 \Rightarrow c < 0$   
 or  $\dot{\theta}_z < 0 \Rightarrow c > 0$   
 Lois de Coulomb:  
 \*  $\vec{a} \cdot \vec{x}: \vec{v}_{(A \in 1/0)} < 0 \Rightarrow a > 0$   
 \*  $\vec{c} \cdot \vec{z}: \dot{\theta}_z < 0 \Rightarrow c < 0$   
 or  $\dot{\theta}_z < 0 \Rightarrow c > 0$

2. Soit f : coefficient de frottement entre 0 et 1 ;  
 g : paramètre de résistance au roulement ;  
 Quelles relations existent-elles entre a, b, c, f et g ?

$|a| = f/|b|$  a et b > 0 donc:  $a = f \cdot b$   
 et:  $|c| = \eta/|b|$  c et b > 0 donc:  $c = \eta \cdot b$

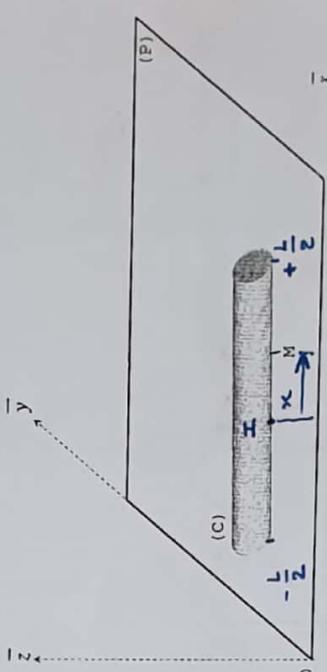
3. Que seront ces relations si  $\{v_{(1/0)}\} = \{0\}$ : Pas de mouvement, donc:  
 $a < f \cdot b$   
 $c < \eta \cdot b$

Exercice 6:

Un cylindre (C) est en mouvement sur un plan (P). Les deux solides sont en contact selon une ligne (L). M : point de (L).

Soit:  $\{d_{(C/M)}\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} \right\}$  avec y positif

f : coefficient de frottement entre (C) et (P).



1. Donner la vitesse de rotation de roulement et de pivotement de (C) / (P).  
 Le plan tangent commun est:  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .  
 $\dot{\theta}_x$ : vitesse de roulement  
 $\dot{\theta}_y$ : " " pivotement.

2. La pression de contact de (P) sur (C), au point M, est:  $\vec{f}_{(M)} = \frac{mg}{L} \vec{z}$   
 Avec: m masse de (C); L longueur de (L) et g accélération de la pesanteur.  
 Donner l'expression de la densité linéique tangentielle  $\vec{f}_{(M)}$  en fonction de m, g, L et f.

Posons:  $\vec{f}_{(M)} = \delta_x \vec{x} + \delta_y \vec{y}$  \*  $\dot{y} \cdot \delta_y < 0 \Rightarrow \delta_y < 0$   
 Soit de Coulomb: \*  $|\delta_x \vec{x}| = f |\delta_y \vec{y}|$   
 \*  $\dot{y} \cdot \delta_y = 0 \Rightarrow \delta_y = 0$   
 $\delta_x \vec{x} = -f \frac{mg}{L} \vec{y}$

3. Montrer alors que :  $\int_I \vec{r}(\vec{x}) = \begin{cases} m\vec{c}(-/y) \\ 0 \end{cases}$

I : milieu de (L).

Posons :  $\int_I \vec{r}(\vec{x}) = \int_I \frac{\vec{R}}{m} \frac{dx}{L}$

$$\vec{R} = \int \vec{f}(\vec{r}(x)) dx = \int (\vec{f}_x + \vec{f}_y) dx$$

$$= \frac{m\theta}{L} \int (\vec{z} - f\vec{y}) dx$$

$$= mg(\vec{z} - f\vec{y})$$

$\Rightarrow \vec{D} = \text{C.R.F.D}$

Exercice 7 de synthèse : Appareil de sport (Adapté du C.N.C 2009)

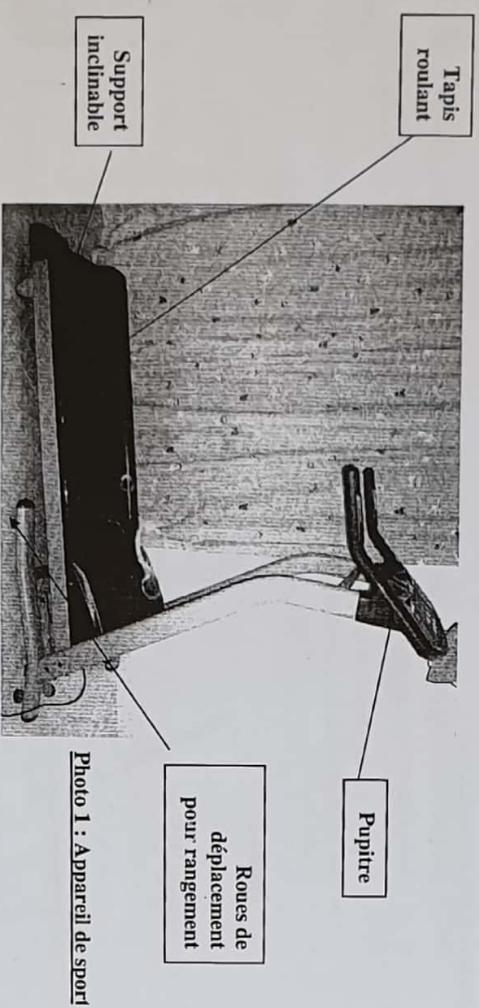


Photo 1 : Appareil de sport

L'appareil, objet de notre étude, fait partie des équipements des établissements de fitness et des domiciles pour un usage personnel. Il permet à un utilisateur de réaliser une séance de sport. Son tapis roulant, dont la vitesse linéaire de déplacement peut varier, à volonté, entre 0 et 12 km/h, est monté sur un support inclinable verticalement.



Photo 2 : support (inclinaison minimale)



Photo 3 : support (inclinaison maximale)

**PARTIE A : ETUDE STATIQUE DU CONTACT « APPAREIL-SOL »**

Le contact entre l'appareil et le sol est réalisé grâce à deux galets et deux pieds (Les roues de déplacement qu'on distingue sur la photo 1, ne sont pas en contact avec le sol).



Photo 4 : galet



Photo 5 : pied

Notre étude vise à déterminer le coefficient de frottement minimal à assurer dans le contact « Appareil - Sol », pour éviter tout glissement sur le sol lors de sa mise en service.

On se placera dans le plan de symétrie vertical de l'appareil. Le contact « Appareil - Sol » est modélisé par le schéma de la figure 1.

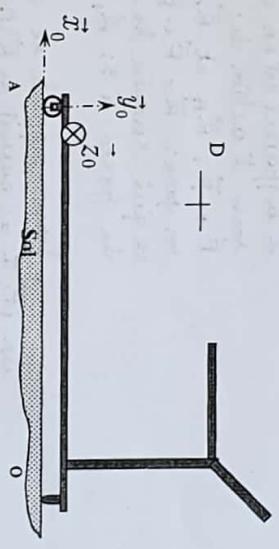


Figure 1

**Données et hypothèses de l'étude :**

- Le support est supposé horizontal.
- L'effort exercé par l'utilisateur sur l'appareil est modélisé, au point D, par le glisseur :  $\vec{F} = 80 \vec{x}_0 - 700 \vec{y}_0$  (En N)
- Le poids de l'appareil est  $\vec{P} = -400 \vec{y}_0$  ( $E_H N$ ), passant par le point D;
- Le contact en A est supposé parfait; celui en O est avec frottement.
- On notera la force en A du sol sur appareil :  $\vec{A}$  et celle en O :  $\vec{O}$

Les tracés et les commentaires sont à reporter sur le document-réponse (page suivante).

**1. Etudier graphiquement l'équilibre de l'appareil :**

- évaluer le coefficient de frottement minimal  $f$ , nécessaire au contact en O, pour assurer la stabilité de l'appareil sur le sol.
- Donner les modules des actions en A et en O.

**Partie B: Mécanisme de rangement de l'appareil**

Après exploitation, l'utilisateur pourra plier puis verrouiller l'appareil pour diminuer son volume de rangement.



**Photo 6 : appareil en cours de pli**



**Photo 7 : appareil plié et rangé**



**Photo 8 : liaison pivot S0-S1**

Lors de cette opération manuelle, l'opérateur fait tourner le bloc pivotant en le relevant de son extrémité. Nous nous intéresserons dans la suite à l'étude statique de ce mécanisme, dont l'objet est la détermination des efforts dans la liaison au point M entre S1 et S0 pour son dimensionnement éventuel.

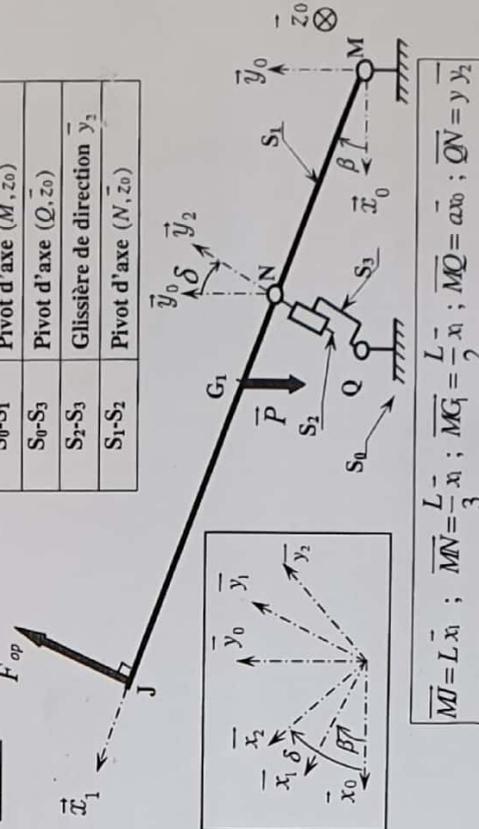
Pour des raisons de symétrie, l'étude sera effectuée dans le plan  $(M, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , plan médian de l'appareil. Le schéma cinématique plan simplifié, est celui de la figure 2.

**Données et hypothèses de l'étude:**

- Le mécanisme est au repos ; avec  $\beta, \epsilon, \delta$  sont des données constantes ;
- L'effort exercé par l'opérateur est de module  $F_{op}$  ;
- Le poids du bloc pivotant S1 est  $\vec{P}$ . Son centre de gravité est G1.
- Les poids des autres éléments sont négligés ;
- Toutes les liaisons sont parfaites ;

Solides liés	Nature de la liaison
S0-S1	Pivot d'axe $(M, \vec{z}_0)$
S0-S3	Pivot d'axe $(Q, \vec{z}_0)$
S2-S3	Glissière de direction $\vec{y}_2$
S1-S2	Pivot d'axe $(N, \vec{z}_0)$

**Figure 2**

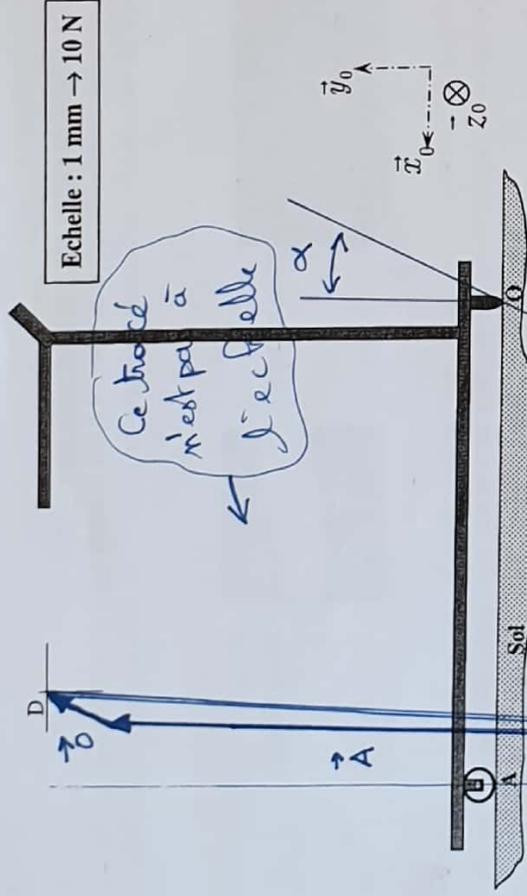


$$\vec{M} = L \vec{x}_1 ; \vec{M}\vec{N} = \frac{L}{3} \vec{x}_1 ; \vec{M}\vec{G} = \frac{L}{2} \vec{x}_1 ; \vec{M}\vec{Q} = \alpha \vec{x}_0 ; \vec{Q}\vec{N} = \vec{y}_2$$

**N.B :** le mécanisme est plan, par conséquent le torseur statique de la liaison Lij réalisée entre les solides Si et Sj lorsque cette liaison est pivot sera noté sous la forme :

$$\{f \rightarrow j\} = \begin{Bmatrix} R_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A_{ij}} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A_{ij}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Aij : centre de la liaison Lij.



Echelle : 1 mm → 10 N

Ce tracé n'est pas à l'échelle

L'appareil est en équilibre sans l'action de  $F, P, \vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  on pose:  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{P}$  ce qui donne le nombre de forces à 3:  $\vec{R}_1, \vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$

Leurs supports se coupent en un pt. I = (support de  $\vec{R}$ )  $\cap$  (A,  $\vec{y}_0$ ).

donc:  $\vec{R}_B$  est porté par (OI).

l'angle de frottement est:  $\alpha = (\vec{OI}, \vec{y}_0) \approx 30^\circ$

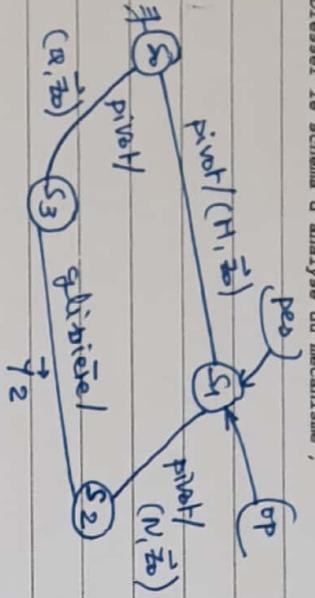
soit:  $f = \tan \alpha \approx 0,57$

$\vec{R}_B + \vec{R}_O + \vec{R}_A = \vec{0}$

Le tracé graphique de cette somme donne:

$$f = \dots 0,57 ; \|\vec{O}\| = \dots 1,70 \text{ N} ; \|\vec{A}\| = \dots 2,50 \text{ N}$$

2. Dresser le schéma d'analyse du mécanisme ;



3. Isoler l'ensemble E=(S2 + S3), et en déduire :

- La direction de la force  $\vec{R}_{12}$  ;
- La relation entre  $X_{12}$ ,  $Y_{12}$  et  $\delta$  ;

E est en équilibre sous l'action de  $\vec{R}_{12}$  et  $\vec{R}_{03}$ . Elles ont alors la même direction. C'est la droite  $(Q, N) = (Q, \vec{y}_2)$

On pose :  $\vec{R}_{12} = R_{12} \vec{y}_2 = X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0$   
 $\Leftrightarrow R_{12} \cos \delta \vec{y}_0 = X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0$   
 Donc :  $X_{12} = -Y_{12} \tan \delta \quad (A)$

4. Isoler S1 et écrire les 3 équations scalaires qui découlent du P.F.S (Réduire les torseurs au point M) :

$$\sum \vec{L}_{01} = \sum \vec{L}_{12} + \sum \vec{L}_{op} + \sum \vec{L}_{po} = \vec{0}$$

réduisons les torseurs au pt M :

$$\sum \vec{L}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sum \vec{L}_{op} = \begin{pmatrix} -F_{op} \sin \beta \\ F_{op} \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sum \vec{L}_{po} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L F_{op} \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \sum \vec{L}_{po} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sum \vec{L}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{TR}_S / \vec{x}_0 : X_{01} - X_{12} - F_{op} \sin \beta = 0 \quad (2)$$

$$\text{TR}_S / \vec{y}_0 : Y_{01} - Y_{12} + F_{op} \cos \beta = 0 \quad (3)$$

$$\text{TR}_S / \vec{z}_0 : \frac{L}{2} (X_{12} \sin \beta - Y_{12} \cos \beta) + L F_{op} = \frac{L}{2} p \cos \beta = 0 \quad (4)$$

5. Peut-on déterminer en fonction des données, les inconnues statiques de la liaison  $L_{01}$  ? Justifier.

On a 4 équations (1), (2), (3) et (4), pour 4 inconnues  $X_{01}$ ,  $X_{12}$ ,  $Y_{01}$  et  $Y_{12}$ . Donc 13 on peut résoudre le pb.

## Devoir Surveillé en S.I

Durée : 1h 45mn

## EXERCICE 1

Reproduire sur votre copie, puis compléter le tableau suivant :

Liaison	Torseur statique spatial	Torseur statique plan $(\vec{x}, \vec{z})$
Rotule de centre O		
Linéaire rectiligne d'axe $(A, \vec{x})$ et de normale $\vec{y}$		
Sphère-plan de normale $(A, \vec{x})$		
Glissière d'axe $(A, \vec{z})$		

## EXERCICE 2 :

Cet exercice concerne la modélisation du comportement d'un véhicule à l'arrêt sur une pente, et la détermination des couples de freinage exercés sur les roues.

R  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sera considéré comme galiléen et l'étude est faite dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  : plan de symétrie du véhicule.

Le véhicule est modélisé par trois solides (voir figure) :

- **Solide 1** : ensemble des deux roues avant avec leurs disques de frein. De masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de gravité  $C_1$ .
  - En liaison pivot sans frottement d'axe  $(C_1, \vec{z})$  avec le châssis  $\underline{3}$ .
  - En contact ponctuel en  $I_1$  avec le sol  $\underline{0}$ , tel que l'action mécanique de  $\underline{0}$  sur  $\underline{1}$  est modélisée par le torseur :

$$\{F_{(0 \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(0 \rightarrow 1)} \\ \vec{O} \end{Bmatrix}_{I_1} \quad \text{Avec : } \vec{R}_{(0 \rightarrow 1)} = N_{01} \vec{y} + T_{01} \vec{x}$$

$f_r$  : coefficient de frottement roue/sol.

- Soumis à l'action du cylindre du frein lié à  $\underline{3}$  dont le torseur réduit en  $C_1$  est :

$$\{T_{(3 \xrightarrow{\text{Frein}} 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{f1} \\ C_{f1} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{C_1} \quad C_{f1} : \text{algébrique.}$$

- **Solide 2** : ensemble des deux roues arrière avec leurs disques de frein. De masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de gravité  $C_2$ .
  - En liaison pivot sans frottement d'axe  $(C_2, \vec{z})$  avec le châssis  $\underline{3}$ .
  - En contact ponctuel en  $I_2$  avec le sol  $\underline{0}$ , tel que l'action mécanique de  $\underline{0}$  sur  $\underline{2}$  est modélisée par le torseur :

$$\{F_{(0 \rightarrow 2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(0 \rightarrow 2)} \\ \vec{O} \end{Bmatrix}_{I_2} \quad \text{Avec : } \vec{R}_{(0 \rightarrow 2)} = N_{02} \vec{y} + T_{02} \vec{x}$$

$f_r$  : coefficient de frottement roue/sol.

- Soumis à l'action du cylindre du frein lié à  $\underline{3}$  dont le torseur réduit en  $C_2$  est :

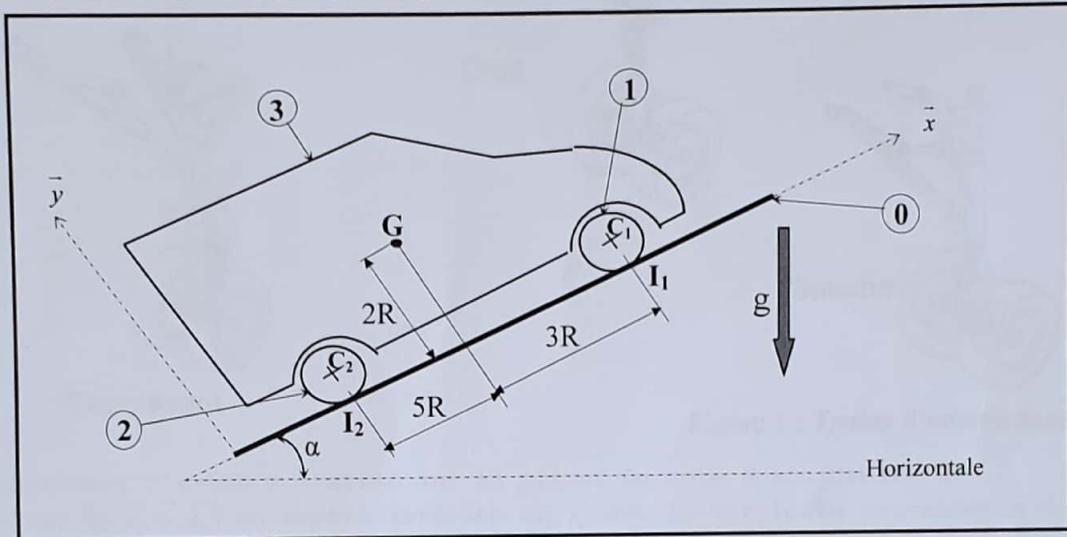
$$\{T_{(3 \xrightarrow{\text{Frein}} 2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{f2} \\ C_{f2} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{C_2} \quad C_{f2} : \text{algébrique.}$$

- Châssis 3 : de masse  $M$ , de centre de gravité  $G$  de coordonnées  $(x, 2R, 0)$  dans le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

D'autres dimensions sont données sur la figure.

On demande :

- 1- dresser le graphe des actions mécaniques.
- 2- Isoler le système matériel  $\Sigma = 1 + 2 + 3$  :
  - Ecrire le TRS en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .
  - Ecrire le TMS au point  $I_2$  en projection sur  $\vec{z}$ .
- 3- On se place à la limite du glissement du véhicule par rapport au sol, écrire deux équations liant les  $T_{01}$  et les  $N_{01}$  et  $f_r$ .
- 4- Déduire  $T_{01}$  et  $T_{02}$  en fonction de  $M$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$  et  $f_r$ .
- 5- Isoler 1, et écrire le T.M.S en  $C_1$ , en projection sur  $\vec{z}$ .  
En déduire l'expression de  $C_{f1}$  en fonction de  $M$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $f_r$  et  $R$ .
- 6- Déterminer  $C_{f2}$  en fonction des mêmes paramètres que  $C_{f1}$ . (Explicitement toutes les étapes de votre réponse).



### EXERCICE 3 : ETUDE DU SYSTEME DE FREINAGE DE L'A318



Le freinage est une des fonctions vitales d'un avion, au même titre que la propulsion ou la sustentation. C'est grâce à lui que l'avion peut s'immobiliser après l'atterrissage, circuler au sol en toute sécurité.

On retiendra le cas de l'Airbus A318. Pour les atterrisseurs, on distingue (voir Figure 1) :

- le train avant qui, en dehors de l'appui, est orientable ce qui lui permet d'agir sur les trajectoires au sol mais qui n'est pas équipé de freins,
- les deux trains principaux au niveau des ailes, chacun portant deux roues freinées indépendamment.

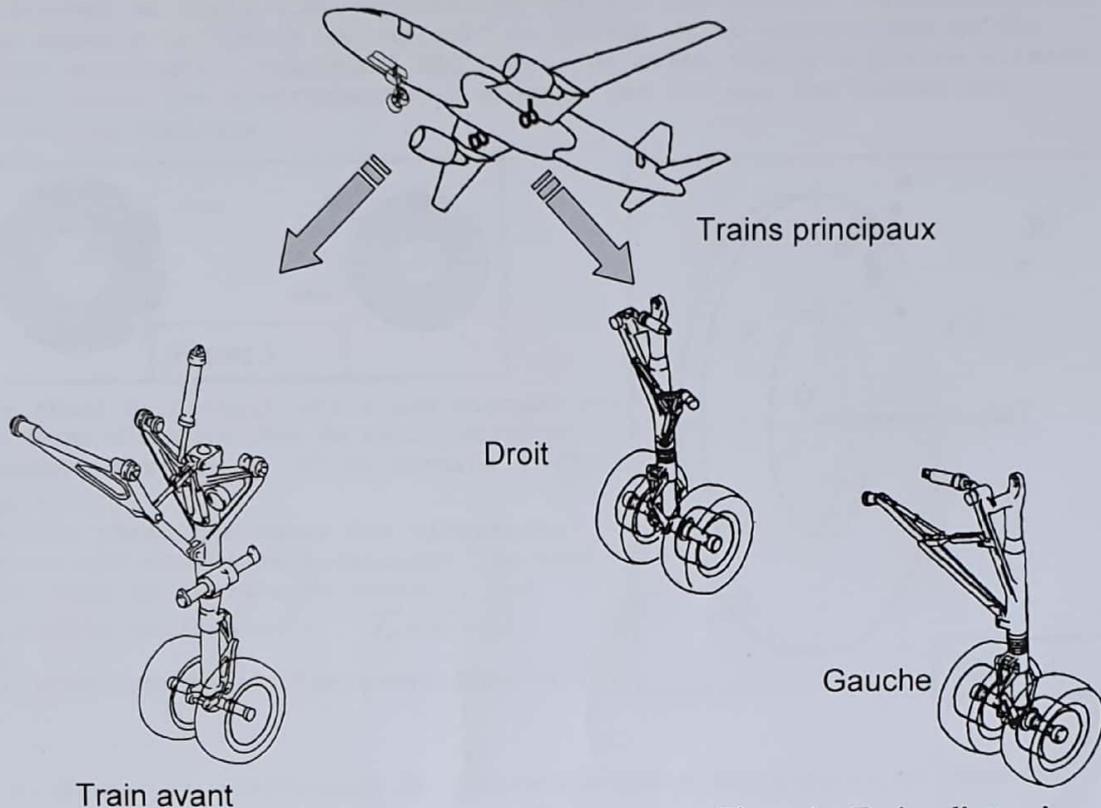
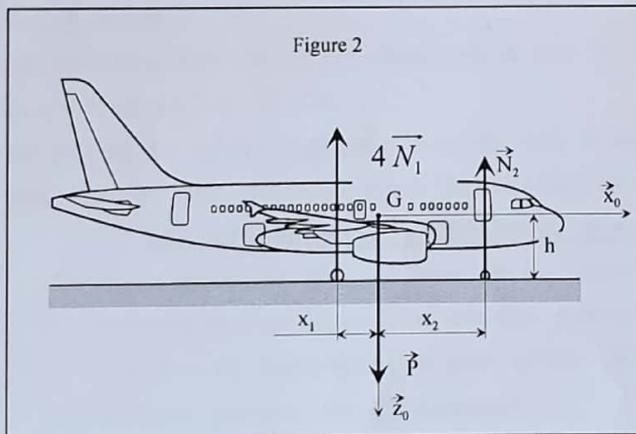


Figure 1 : Trains d'atterrissage

On considère l'avion à l'arrêt sur la piste. On note  $G$  son centre de gravité,  $(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère galiléen où  $\vec{z}_0$  est la verticale descendante du lieu,  $4\vec{N}_1$  l'action de contact au niveau des trains principaux (les actions de contact  $\vec{N}_1$  sont supposées égales au niveau de chacune des quatre roues des trains principaux),  $\vec{N}_2$  l'action de contact au niveau du train avant.



On donne :

- masse de l'avion  $M = 60 \cdot 10^3 \text{ kg}$  et  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$
- $x_1 = 2 \text{ m}$ ,  $x_2 = 8 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$
- diamètre des roues du train principal :  $D = 1 \text{ m}$

1. En appliquant le TRS à l'avion en projection sur  $\vec{z}_0$ , écrire l'équation scalaire qui en découle ;

2. Ecrire l'équation issue de TMS appliqué à l'avion au point G en projection sur l'axe  $\vec{y}_0$  ;
3. Des équations précédentes, déduire les expressions littérales de  $\vec{N}_1$  et  $\vec{N}_2$  ;
4. Faire les applications numériques.

Les disques de frein sont empilés les uns sur les autres, constituant ce qu'on appelle un "puits de chaleur" en raison de la température qu'ils peuvent atteindre : jusqu'à 3 000°C pour un avion freiné à pleine vitesse! Ce sont ainsi les frottements des disques les uns sur les autres qui assurent le freinage.

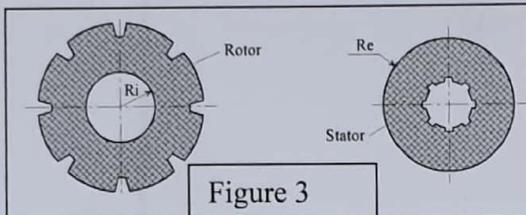


Figure 3

La surface de contact entre les disques est sous forme d'une couronne de rayon intérieur  $R_i$ , de rayon extérieur  $R_e$  et de normale  $\vec{y}$  (Voir figure 4).

L'action mécanique entre les disques en contact est modélisée localement, en tout point M de la surface de contact, par la densité surfacique :  $\vec{f}_M = p\vec{y} + f_i\vec{\tau}$ .

$(\vec{n}, \vec{y}, \vec{\tau})$  est une base orthonormée directe.

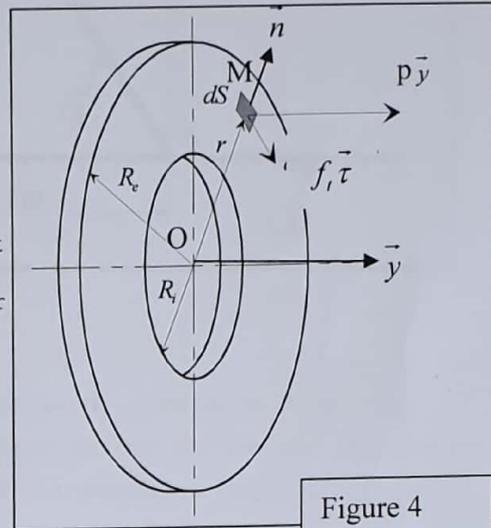


Figure 4

5. Soit  $f$  le coefficient de frottement entre les disques en contact. Donner la relation entre  $p$ ,  $f_i$  et  $f$ .
6. Déterminer le couple de freinage donné par :  $C = \vec{y} \cdot \vec{M}_O$  en fonction de  $p$ ,  $f$ ,  $R_i$  et  $R_e$ .

#### EXERCICE 4 :

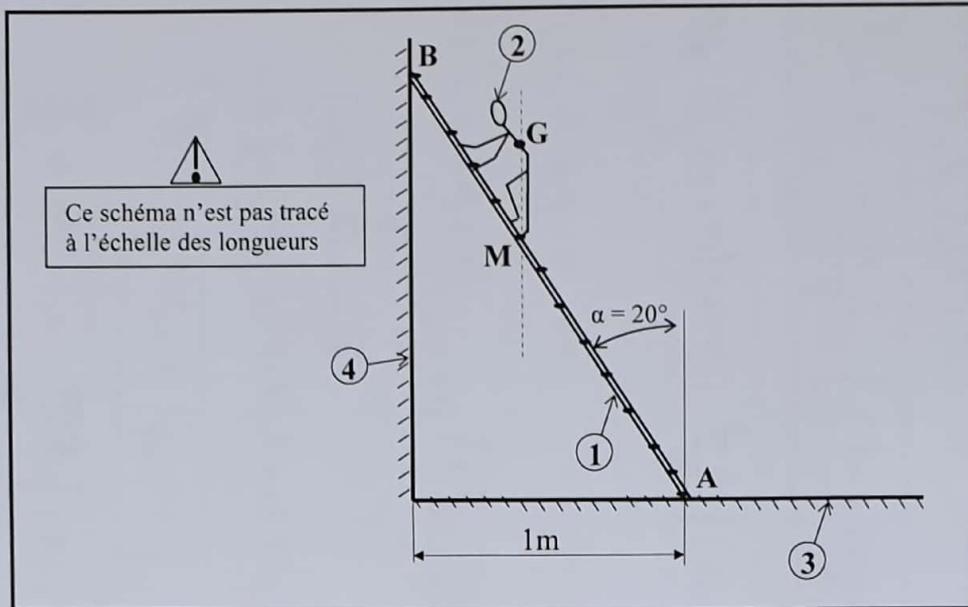
On considère une échelle simple 1 en contact avec le sol 3 en **A**, et avec le mur 4 en **B**.

Le coefficient de frottement en **A** est  $f_1 = \tan 10^\circ = 0,17$  et en **B** est  $f_2 = \tan 11^\circ = 0,19$ .

Le poids de l'utilisateur est de 800 N et le poids propre de l'échelle est négligé et ses marches sont distantes de 0,20 m.

Les tracés sont à effectuer sur la copie ( Echelle : 1cm  $\rightarrow$  0,2 m )

- 1- En admettant que le centre de gravité **G** de l'utilisateur passe par la marche **M** sur laquelle repose son pied, trouver graphiquement à quel marche (à numéroter à partir de la première marche située en **A**) il y'aura danger de glissement .
- 2- Quel serait l'angle  $\alpha$  minimal dont il faudrait incliner l'échelle pour pouvoir utiliser toutes ses marches en sécurité? (On suppose que la dernière marche est en **B**)



**EXERCICE 5 :**

Une planche  $S_2$  de masse  $m$ , inclinée d'un angle  $\alpha$ , repose en A sur un cylindre  $S_1$  tournant à une vitesse constante  $\omega$  autour de son axe propre et en B sur une barre fixe  $S_0$ . Le contact en B est parfait, celui en A est avec frottement de coefficient  $f$ .

On suppose que le contact est toujours maintenu en A et B.

On note  $X_e$  la position d'équilibre strict de la planche.

On pose :

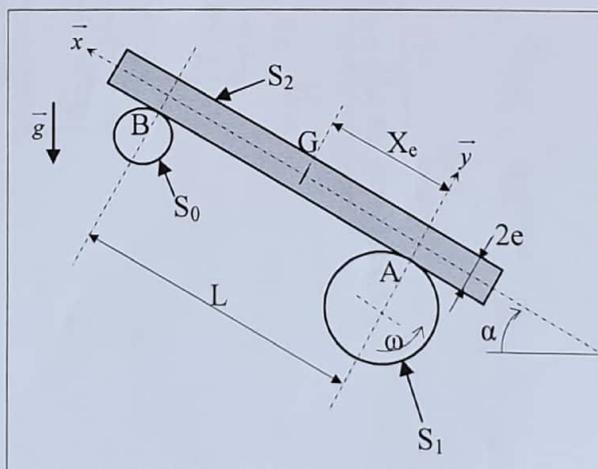
$$\{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \begin{Bmatrix} x_{12}\bar{x} + y_{12}\bar{y} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_A$$

Torseur de l'action mécanique de  $S_1$  sur  $S_2$

$$\{\tau_{(S_0 \rightarrow S_2)}\} = \begin{Bmatrix} y_{02}\bar{y} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_B$$

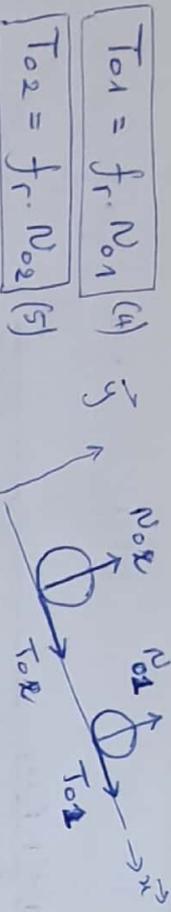
Torseur de l'action mécanique de  $S_0$  sur  $S_2$

1. Appliquer le P.F.S à  $S_2$  et écrire les équations qui en découlent.
2. Donner une relation entre  $x_{12}$  et  $y_{12}$ .
3. Déterminer  $X_e$  en fonction de  $L$ ,  $e$ ,  $f$  et  $\alpha$ .





30]

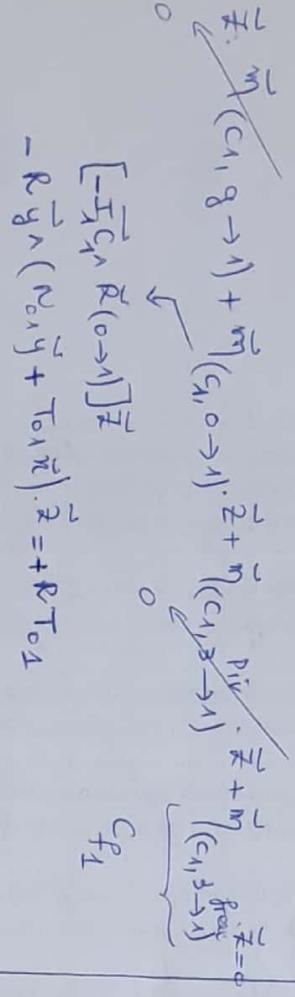


40] Des eq. (3), (4) et (1), on tire :

$$T_{02} = - \frac{f_r \cdot g}{g} \left[ (8m+5M) \cos \alpha - 2(m+M) \sin \alpha \right]$$

$$T_{02} = (2m+M)g \sin \alpha - \frac{f_r \cdot g}{g} \left[ (8m+5M) \cos \alpha - 2(m+M) \sin \alpha \right]$$

50]  $\vec{m} (c_1, \tau \rightarrow 1) \cdot \vec{z} = 0$



Donc l'éq. :

$$R T_{01} + C_{f1} = 0$$

$$* C_{f1} = -R T_{01} = \frac{f_r \cdot g}{g} \left[ (8m+5M) \cos \alpha - 2(m+M) \sin \alpha \right]$$

60] on applique la T.M.S à 2 en C2 / z :

$$R T_{02} + C_{f2} = 0 \quad \text{donc : } C_{f2} = -R T_{02}$$

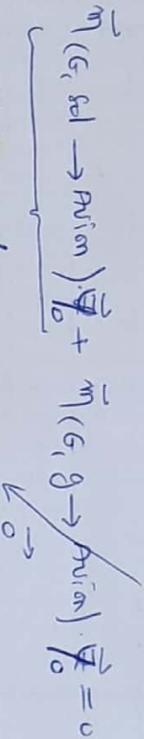
2/4

Exercice 3

$$C_{f2} = -R \left( (2m+M)g \sin \alpha - \frac{f_r \cdot g}{g} \left[ (8m+5M) \cos \alpha - 2(m+M) \sin \alpha \right] \right)$$

10]  $Mg - 4N_1 - N_2 = 0 \quad (1)$

20]  $\vec{m} (G, N_{union} \rightarrow N_{union}) \cdot \vec{r}_0 = 0$



Donc l'éq. :  $4N_1 x_1 - N_2 x_2 = 0 \quad (2)$

30] Des eq. (1) et (2), on tire :

$$N_1 = \frac{x_2}{4(x_1+x_2)} \cdot M \cdot g$$

$$N_2 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \cdot M \cdot g$$

$$N_1 = 120 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$N_2 = 120 \cdot 10^3 \text{ N}$$

50]  $f_T = P \cdot f$

60]  $C = \vec{y} \cdot \vec{m}_0 = \vec{y} \cdot \int_{(S)} \vec{\omega} \wedge \vec{r}_M \cdot \vec{f}_M \cdot ds$

$$= \vec{y} \cdot \int_{(S)} \vec{r} \wedge (P \vec{y} + f \cdot P \vec{E}) \cdot ds$$

$$C = - \int_{(CS)} n f \cdot p \cdot ds = - \int_{(CS)} f \cdot p \cdot \int r \cdot ds$$

$$= - \int_{R_i}^{R_e} f \cdot p \cdot \int_0^{2\pi} r^2 \cdot dr \cdot \int d\theta$$

$$C = - \frac{2\pi}{3} f \cdot p \cdot (R_e^3 - R_i^3)$$

**Exercice 4**

10] Etape 1:

Retracer le schéma à l'échelle des longueurs: 1 cm  $\rightarrow$  0,2 m sachant que:  $\alpha = 20^\circ$

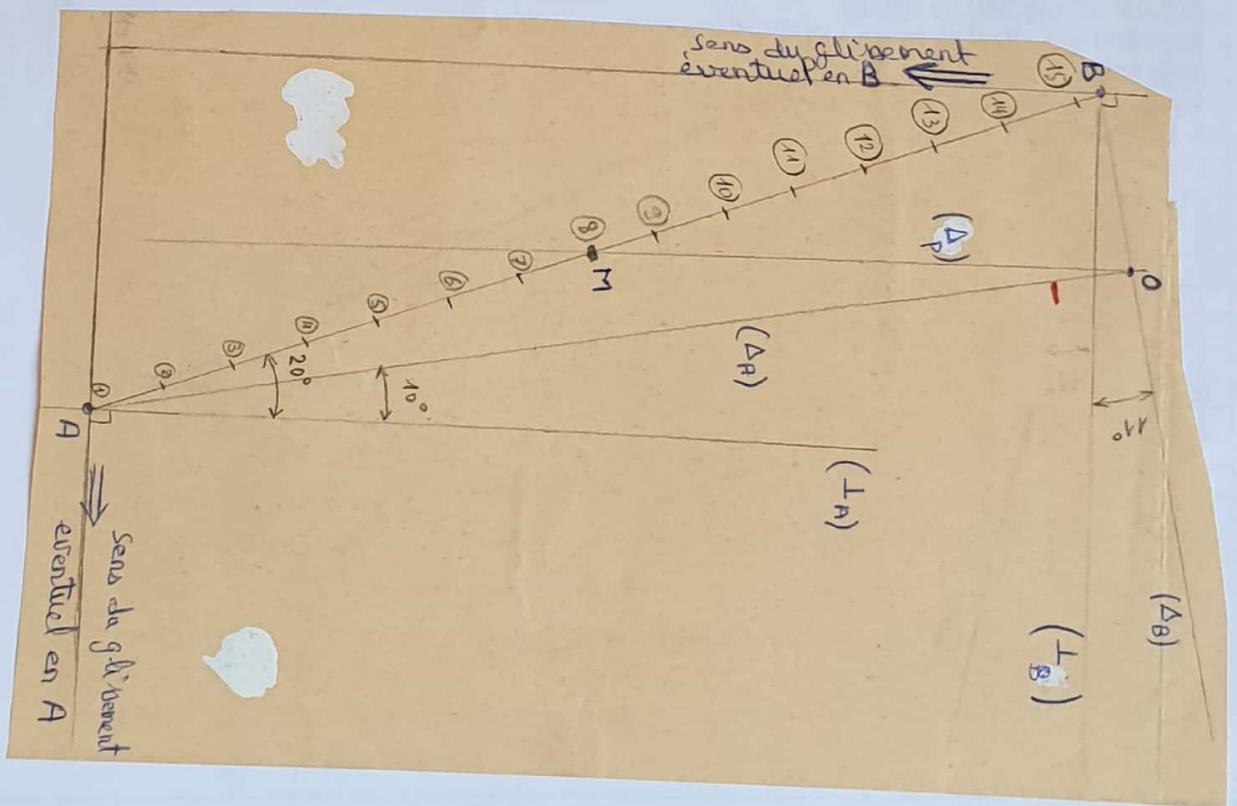
Etape 2: Repérer toutes les marches de l'échelle en commençant par A.

Donnée: distance entre deux marches  $\equiv$  1 cm  
 courbure = 9,80 m  $\Rightarrow$  1 cm

Etape 3: Tracer la normale au contact en A: ( $\perp A$ ), et la normale au contact en B: ( $\perp B$ ).

Etape 4: on se place à la limite du glissement l'effort en A est porté par ( $\Delta A$ ) et celui en B est porté par ( $\Delta B$ ).

(Tracer ( $\Delta A$ ) et ( $\Delta B$ ), en indiquant les angles de frottement).



• Etape 5: analyser l'équilibre de l'échelle:

Elle est en eq. sous l'action de 3 forces:

- $\vec{F}_A$  portée par (A).
- $\vec{F}_B$  " " (B).
- $\vec{P}$  portée par la verticale passant par G et M (M à déterminer)

Les 3 supports se comptent en un pt; ce sera

$$O = (\Delta A) \cap (\Delta B).$$

Donc le poids est porté par la verticale passant par O.

D'où:  $M = (\text{verticale passant par O}) \cap (\text{échelle})$

• Etape 5: compter le nombre de marches en commençant par celle qui se trouve en A

Résultat: Huitième marche

20]

Le point M qui on a déterminé dans la question 1, devra être maintenu en B.

C'est à dire que O doit aussi être en B.

Autrement dit: ( $\Delta A$ ) confondue avec la direction de l'échelle.

$\alpha = 10^\circ$

4/4

Exercice 5 (Voir TD - statique)

Résultats:

10]

$$-mg \cdot \sin \alpha + X_{12} = 0$$

$$-mg \cos \alpha + Y_{12} + Y_{02} = 0$$

$$-mg X_e \cos \alpha + L Y_{02} = 0$$

20]

$$X_{12} = f \cdot Y_{12}$$

30]

$$X_e = L \left( 1 - \frac{f g \alpha}{f} \right)$$

T. DE STATIQUE - CORRIGÉ

# Devoir Surveillé Commun des Sciences Industrielles pour l'ingénieur

## Exercice 1 : ELEVATEUR DE RACK

(Petites Mines - 08)

Le schéma cinématique (figure 1 - page 3) représente le système d'élevateur de rack. Un moteur (non représenté) monté entre 0 et l'axe 10, exerce sur ce dernier un couple moteur  $C_m$  inconnu. La rotation de 10 entraîne, par un système vis-écrou comportant un pas à droite, la translation du rack 11 qui supporte une charge  $P_c$  connue.

Les poids sont négligés. Le système est considéré comme spatial.

Le mouvement étant très lent, on peut supposer que l'ensemble est à l'équilibre par rapport au repère galiléen  $R_0$

Le but est de valider le couple moteur choisi par le constructeur : couple nominal de  $1 N.m$  pour  $P_c = 100N$ .

Les liaisons sont supposées parfaites.

Les torseurs couple moteur et charge sont les suivants :

$$\{F_{mot \rightarrow 10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{F_{charge \rightarrow 11}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0 \text{ de base } (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

**Notation** : le torseur statique des actions d'une pièce i sur une pièce j écrit au point M en projection dans le

repère  $R_0$  s'écrit :

$$\{F_{i \rightarrow j}\}_M = \begin{Bmatrix} X_{i,j} & L_{i,j} \\ Y_{i,j} & M_{i,j} \\ Z_{i,j} & N_{i,j} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

1. Identifier chaque liaison puis écrire son torseur statique.

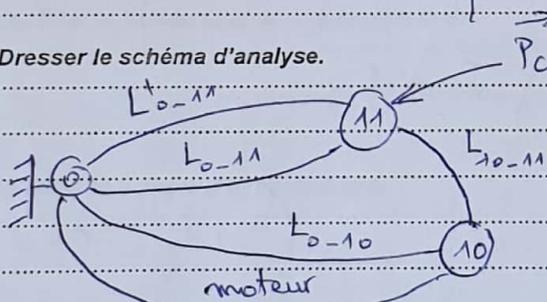
Identification des liaisons : voir schéma de structure page 3.

$$\{F_{0 \rightarrow 11}\}_B = \begin{Bmatrix} X_{0-11} & L_{0-11} \\ 0 & 0 \\ Z_{0-11} & N_{0-11} \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{F_{10 \rightarrow 11}\}_O = \begin{Bmatrix} X_{10-11} & L_{10-11} \\ Y_{10-11} & M_{10-11} \\ Z_{10-11} & N_{10-11} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

avec  $M_{10-11} = + \frac{P}{2\pi} \gamma_{10-11}$

$$\{F'_{0 \rightarrow 11}\}_C = \begin{Bmatrix} X'_{0-11} & L'_{0-11} \\ 0 & 0 \\ Z'_{0-11} & N'_{0-11} \end{Bmatrix}_{R_0} \quad \{F_{0 \rightarrow 10}\}_O = \begin{Bmatrix} X_{0-10} & L_{0-10} \\ X_{0-10} & 0 \\ Z_{0-10} & N_{0-10} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

2. Dresser le schéma d'analyse.



3. Déterminer les 6 équations d'équilibre du solide 10 (moments en O).

$$\{F_{10 \rightarrow 10}\} = \{0\}$$

$$\{F_{0 \rightarrow 10}\} + \{F_{mot \rightarrow 10}\} + \{F_{11 \rightarrow 10}\} = \{0\}$$

$$= -\{F_{10 \rightarrow 11}\}$$

TR S

$\vec{x}_0 : x_{0-10} - x_{10-11} = 0 \quad (1)$ 
 $\vec{y}_0 : y_{0-10} - y_{10-11} = 0 \quad (2)$ 
 $\vec{z}_0 : z_{0-10} - z_{10-11} = 0 \quad (3)$

D'où les équations :

Les développements calculatoires ne sont pas exigés. Seuls les passages importants sont à reproduire

T.M.S en 0

$$\vec{1} \cdot \vec{x} = L_{210} - L_{10-11} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{1} \cdot \vec{y}_0 = M_{10-11} + C_m = 0 \quad (5)$$

$$\vec{1} \cdot \vec{z}_0 = N_{210} - N_{10-11} = 0 \quad (6)$$

4. Appliquer le T.R.S à 11 en projection sur  $\vec{y}_0$ .

$$\vec{y}_0 \cdot \vec{R}(\vec{11} \rightarrow 11) = 0$$

ce qui donne :

~~$$\vec{y}_0 \cdot \vec{R}(\vec{0} \rightarrow 11) + \vec{y}_0 \cdot \vec{R}'(\vec{0} \rightarrow 11) + \vec{y}_0 \cdot \vec{R}(\vec{10} \rightarrow 11)$$~~

$$y_{10-11} - P_c = 0 \quad (7)$$

5. Déterminer le couple moteur  $C_m$  en fonction de la charge  $P_c$ , du pas  $p$  et des autres données.

$$(7) \Rightarrow y_{10-11} = P_c$$

$$(5) \Rightarrow C_m = M_{10-11}$$

$$\text{d'où : } C_m = \frac{p}{2\pi} P_c$$

$$\text{or : } M_{10-11} = \frac{p}{2\pi} y_{10-11}$$

6. Calculer  $C_m$  pour  $p = 6,28 \text{ mm}$  et  $P_c = 100 \text{ N}$ . Conclure quant au choix du constructeur.

\* A.N :  $C_m = \frac{6,28 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \cdot 100 \approx 0,1 \text{ m.N}$

\* Le couple prévu par le constructeur est de  $1 \text{ m.N} > 0,1 \text{ m.N}$

Donc : choix valide.

7. Déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme.

$$m_c - h = N_c - 6\gamma$$

$$m_c = m_{cu} + m_{ci} = 1 + 0 = 1$$

avec :  $N_c = 6$

$\gamma = 2$

Donc :  $h = 1 - 6 + 12 \Rightarrow h = 7$

8. Identifier la liaison équivalente entre 0 et 11.

glissière /  $\vec{y}_0$

9. Calculer son degré d'hyperstatisme.

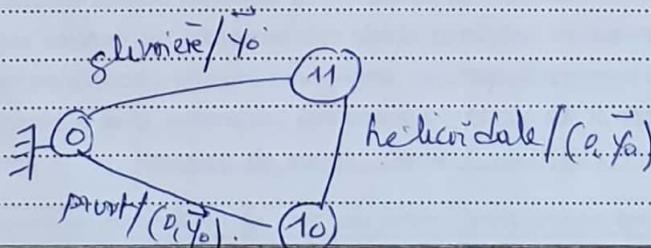
$$m_c - h = N_c - 6\gamma$$

ddl : leq

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & \end{matrix}$$

$$h = 1 - 4 + 6 \Rightarrow h = 3$$

10. Tracer le schéma de structure minimal.



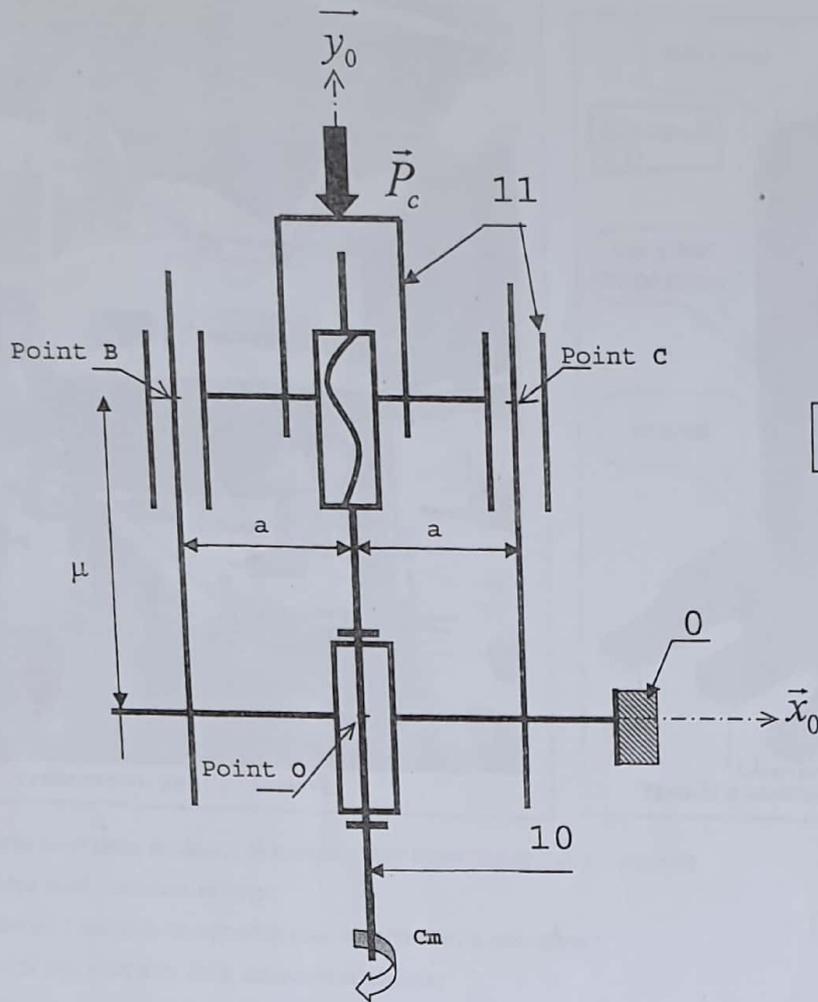
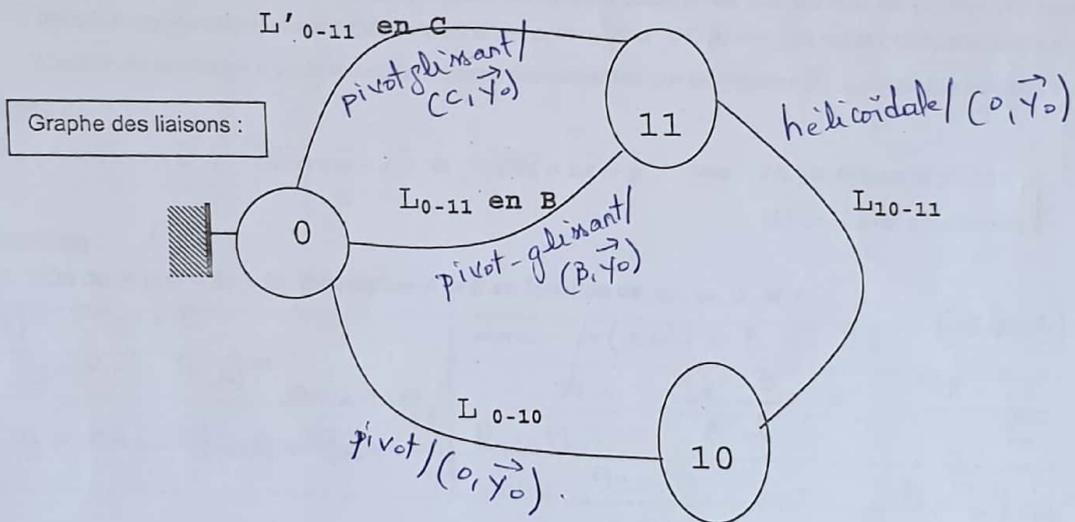


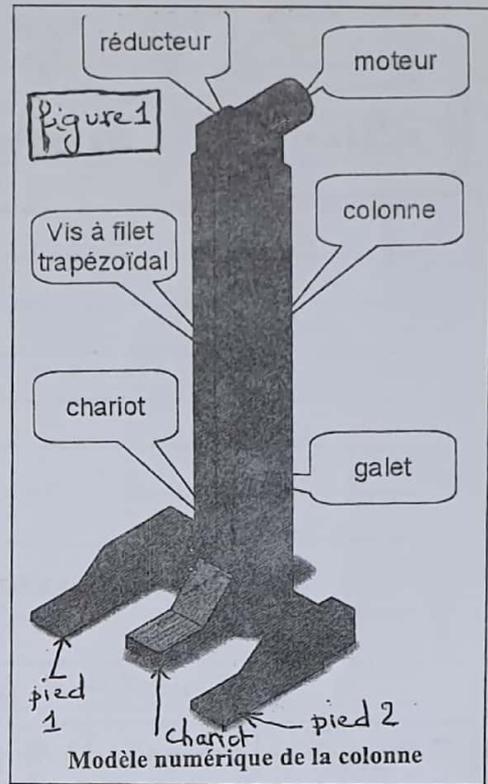
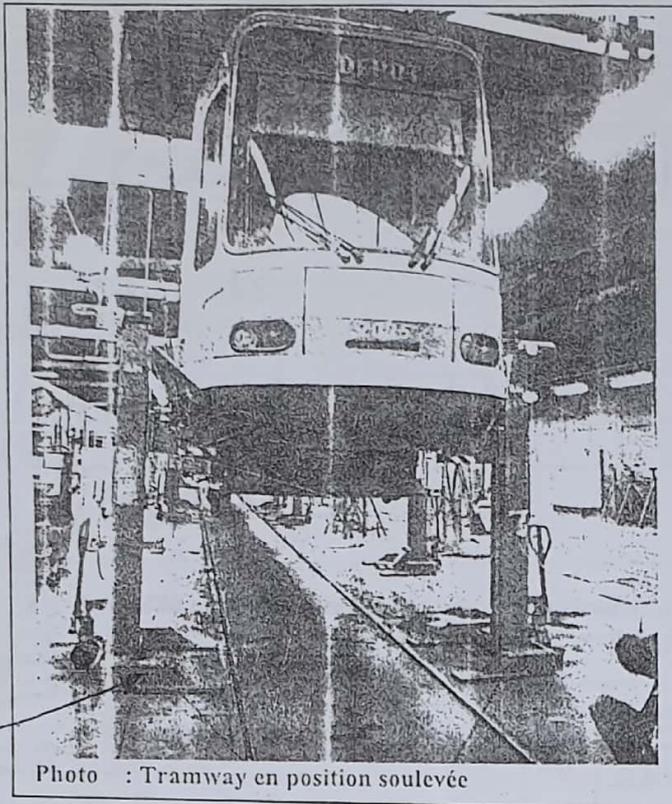
Figure 1



**Exercice 2 : COLONNE DE LEVAGE DE TRAMWAY (C.C.P - 2011)**

Pour soulever un tramway de 48 tonnes et de 30 m de long, le service de maintenance utilise 8 colonnes de levage d'une capacité unitaire maximale de 8,2 tonnes commandées simultanément (voir photos et figure 1 - page 4). Chaque colonne est constituée d'un chariot translatant verticalement. L'entraînement se fait par un moto-réducteur-frein associé à un système vis-écrou. Le contact colonne-sol est assuré par deux pieds 1 et 2. La stabilité mécanique de la colonne doit être assurée, quel que soit la charge à soulever, afin de respecter la condition suivante : **Pression de contact pied-sol maximale :  $P_{max} < 8 \text{ Mpa}$ .**

Les développements calculatoires ne sont pas exigés. Seuls les passages importants sont à reproduire 3



Le modèle retenu pour cette étude est le suivant : (voir aussi figure 2 et 3 – page 6)

- Système isolé : colonne entière ;
- Le plan  $yOz$  est plan de symétrie pour les efforts et la géométrie ;
- Le poids des éléments de la colonne est négligé ;
- L'action de contact sol-colonne est modélisée en chaque point  $M$  de leur surface de contact par une pression  $q(y)$  (en Mpa) variant linéairement entre  $q_1$  et  $q_2$  pour  $y \in [e, e+L]$ , et restant uniforme selon  $x$  ;
- L'action de la charge à soulever sur la colonne est modélisée par un glisseur  $\vec{F}_{T \rightarrow C}$  appliqué au point  $P$ .

On donne :

$$\vec{OP} = (d-e)\vec{y} + h\vec{z} ; \quad \vec{OH} = a\vec{x} - e\vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{HM} = x\vec{x} + y\vec{y} \quad \text{avec} : \quad x \in [-b, 0] \text{ pour le pied 1}$$

$$\text{et } [-2a, -2a+b] \text{ pour le pied 2 ;}$$

On demande :

1. On pose  $q(y) = Ay + B$ . Déterminer  $A$  et  $B$  en fonction de  $q_1, q_2, L$  et  $e$ .

$$q(y) = Ay + B$$

pour  $y = e$  :  $q(e) = Ae + B = q_1$

pour  $y = e+L$  :  $q(e+L) = q_2$

donc :  $A(e+L) + B = q_2$  (~~\*\*\*~~)

$$A = \frac{q_2 - B}{e+L} = \frac{q_2 - q_1}{L}$$

Résultat :

$$A = \frac{q_2 - q_1}{e+L} \quad \text{et} \quad B = q_1 \left(1 + \frac{e}{L}\right) - \frac{e}{L} q_2$$

2. Déterminer  $\vec{R}_{S \rightarrow 1}$ , résultante de l'action du sol sur le pied 1, en fonction de  $A, B, e, b$  et  $L$ .

$$\vec{R}_{(S \rightarrow 1)} = \int_{(1)} q(y) \cdot dS \vec{z} = b \left[ \frac{Ay^2}{2} + By \right]_e^{e+L} \vec{z}$$

$$= \left( \int_{(1)} (Ay+B) b \cdot dy \right) \vec{z} \quad \left| \quad \vec{R}_{(S \rightarrow 1)} = bL \left[ \frac{A}{2} (L+2e) + B \right] \vec{z} \right.$$

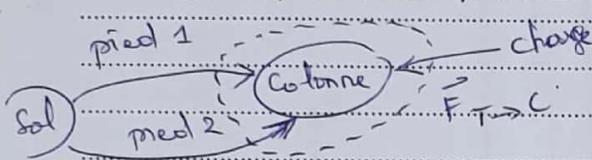
Les développements calculatoires ne sont pas exigés. Seuls les passages importants sont à reproduire

3. Déterminer  $\vec{x} \cdot \vec{M}_{H \rightarrow 1}$ , projection sur  $\vec{x}$  du moment en H de l'action du sol sur le pied 1.

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{M}_{H(s \rightarrow 1)} &= \vec{x} \cdot \int_{(1)}^{HP_1} q(y) \vec{z} ds \\ &= \int_{(1)}^{(1)} \vec{x} \cdot [(x\vec{x} + y\vec{y}) \wedge q(y) \vec{z}] ds \\ &= \int_{(1)}^{(1)} y \cdot q(y) \cdot ds \\ &= \int_{(1)}^{(1)} y(Ay + B) \cdot ds \quad (ds = b dy) \\ &= \int_{(1)}^{(1)} y(Ay + B) \cdot b dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= b \left[ \frac{Ay^3}{3} + \frac{By^2}{2} \right]_{e+L}^e \\ &= b \left[ \frac{A}{3} [(e+L)^3 - e^3] + \frac{B}{2} [(e+L)^2 - e^2] \right] \end{aligned}$$

4. Ecrire l'équation scalaire qui découle de l'application du T.R.S à la colonne.



T.R.S /  $\vec{z} \Rightarrow$

$$2 \vec{R}(s \rightarrow 1) \cdot \vec{z} - F_{T \rightarrow C} = 0$$

$$\Rightarrow 2bL \left[ \frac{A}{2} (L+2e) + B \right] - F_{T \rightarrow C} = 0 \quad (*)$$

5. Appliquer le T.M.S, en H en projection sur  $\vec{x}$ , à la colonne.

T.M.S en H /  $\vec{x}$  à la colonne :

$$\vec{x} \cdot \vec{M}_{H(s \rightarrow 1)} + \vec{x} \cdot \vec{M}_{H(F_{T \rightarrow C})} = 0$$

ou :

$$\vec{x} \cdot \vec{M}_{H(F_{T \rightarrow C})} = \vec{x} \cdot \left( \vec{m}_{P(F \rightarrow C)} + HP \wedge \vec{F}_{T \rightarrow C} \right)$$

$$= \vec{x} \cdot \left( (H\vec{0} + 0\vec{P}) \wedge (-F_{T \rightarrow C} \vec{z}) \right)$$

$$= \vec{x} \cdot \left[ (-a\vec{x} + d\vec{y} + h\vec{z}) \wedge (-F_{T \rightarrow C} \vec{z}) \right]$$

$$= -d F_{T \rightarrow C}$$

Soit la relation :

$$2b \left[ \frac{A}{3} ((e+L)^3 - e^3) + \frac{B}{2} ((e+L)^2 - e^2) \right] - d F_{T \rightarrow C} = 0 \quad (**)$$

6. Déduire alors l'expression de  $q_2$  en fonction de  $F_{T \rightarrow C}$  et des autres données géométriques.

on a les équations : (\*), (\*\*), et (\*\*\*)

On tire :

$$A = F_{T \rightarrow C} \frac{d}{2b} \frac{(e+L)^2 - e^2}{(e+L)^3 - e^3 - \frac{L+2e}{4} [(e+L)^2 - e^2]}$$

et :

$$B = F_{T \rightarrow C} \left[ \frac{1}{2bL} - \frac{A}{2} (L+2e) \right]$$

alors :

$$q_2 = A(e+L) + B$$

voir expressions

7. Sachant que :  $L = 600 \text{ mm}$  ;  $b = 200 \text{ mm}$  ;  $e = 110 \text{ mm}$  ;  $d = 450 \text{ mm}$  et  $F_{T \rightarrow C} = 60\,000 \text{ N}$ , la condition sus-citée est-elle vérifiée ?

A.N :

$$q_2 \approx 6,325 \text{ MPa}$$

d'où la condition  $p_{\max} < 8 \text{ MPa}$  est vérifiée

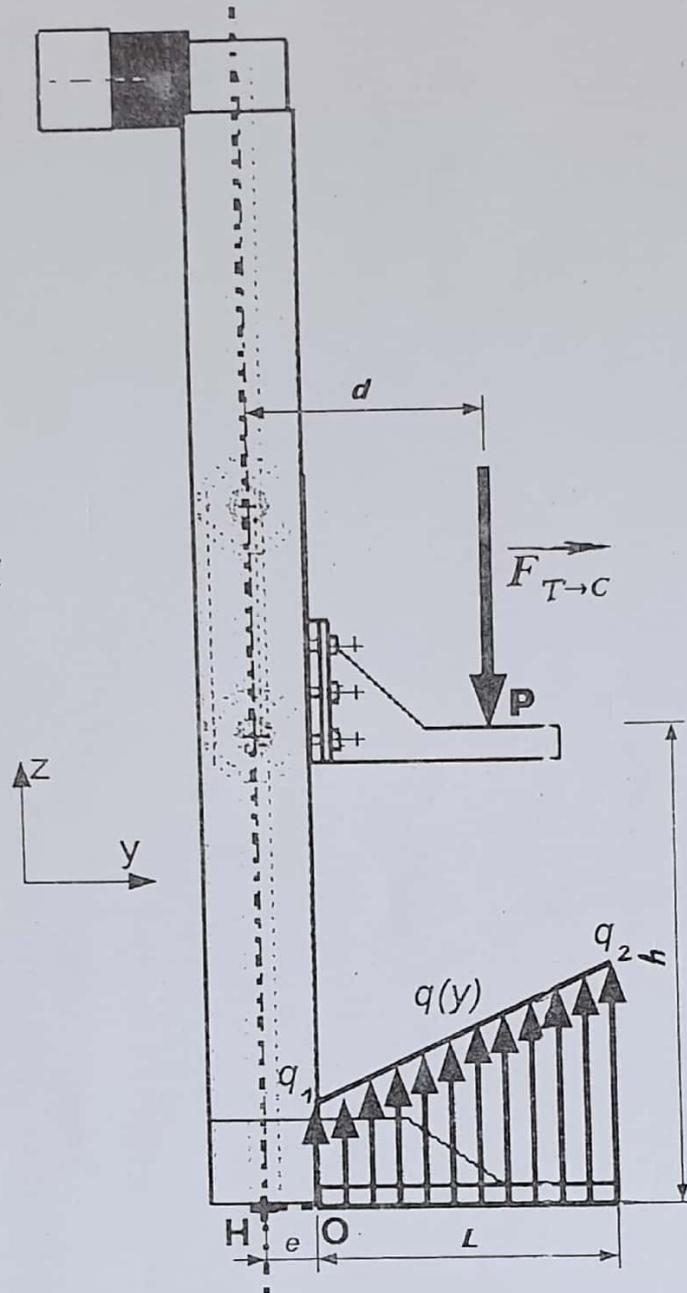


Figure 2 : Modélisation pour l'étude du basculement

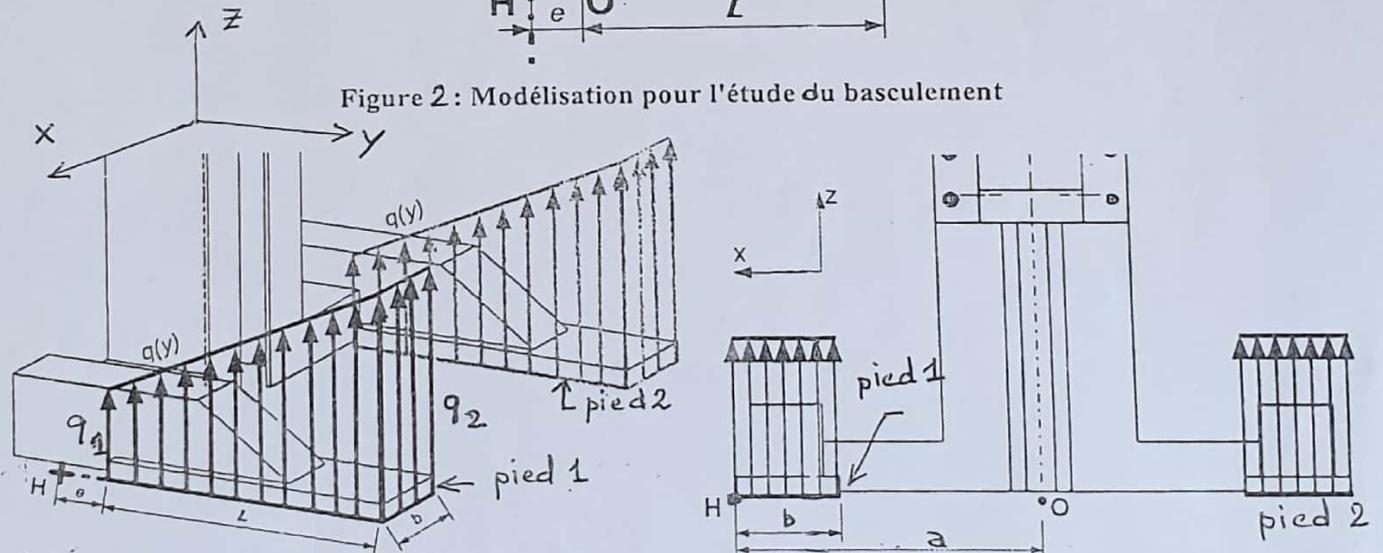


Figure 3 : Modélisation pour le calcul de la pression de contact

PREMIER PROBLEME : MOTO DE TRIAL EM 5.7



Electric-Motion étend la gamme des possibilités offertes aux amateurs de 2 roues en proposant un modèle trial aux adeptes de « green motorcycle ».

Après plusieurs réalisations pour des constructeurs établis, Electric Motion s'est lancé dans la conception de la EM 5.7, une moto de trial loisir électrique.

La conception d'une moto de trial entièrement électrique est une réalisation qui a permis de faire des prouesses d'adaptations en termes de poids, volume, puissance et d'autonomie dans l'environnement particulièrement exigeant qu'est un cadre de moto de trial. Les performances atteintes sont en adéquation avec les besoins d'utilisation et la EM 5.7 est un modèle technologique dans son domaine qui allie performances et respect de l'environnement devenant ainsi la première moto de trial électrique produite en série.

Aux Championnats de France de Trial 2014, catégorie Senior 2, Bastien Hieyte & son EM 5.7 a pris la première place.

**Problématique :** montrer l'intérêt d'un centre de gravité bas

Soit G le centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{moto + pilote\}$   
 Soit M la masse de l'ensemble  $\Sigma$ .

On donne  $\overrightarrow{A_1 A_2} = L \overrightarrow{x}_m$ ,  $\overrightarrow{A_1 G} = c \overrightarrow{x}_m + d \overrightarrow{y}_m$ ,  $\overrightarrow{O A_1} = a \overrightarrow{x}_m$

Soit l'angle  $\alpha = (\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_m) = (\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_m)$  l'inclinaison du sol par rapport à l'horizontale sur lequel la moto est posée.



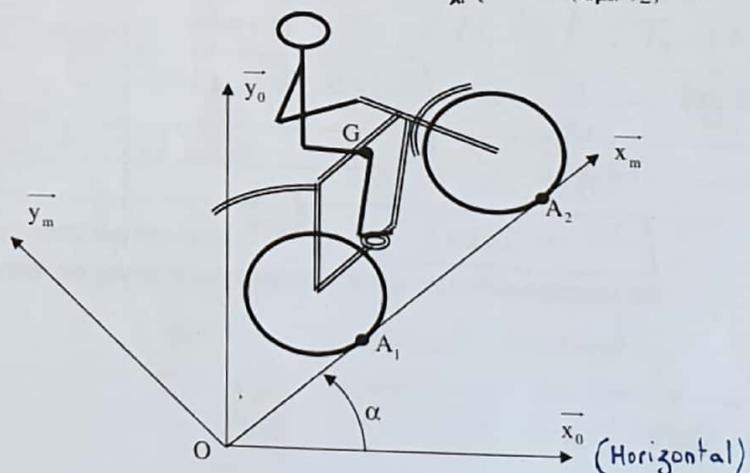
**Hypothèses :**

On suppose qu'il y aura basculement avant glissement de la roue arrière.

Le contact des roues avec le sol s'effectue avec adhérence. Le facteur de frottement est  $f = \tan \varphi$ . (en  $A_1$  et  $A_2$ ).

Les actions du sol sur les roues sont donc modélisées par le torseur suivant :

$$\{F_{(sol \rightarrow \Sigma)}\}_{A_i} = \begin{cases} R_{sol \rightarrow \Sigma} = T_i \overrightarrow{x}_m + N_i \overrightarrow{y}_m \\ M_{(A_i, sol \rightarrow \Sigma)} = \vec{0} \end{cases}$$

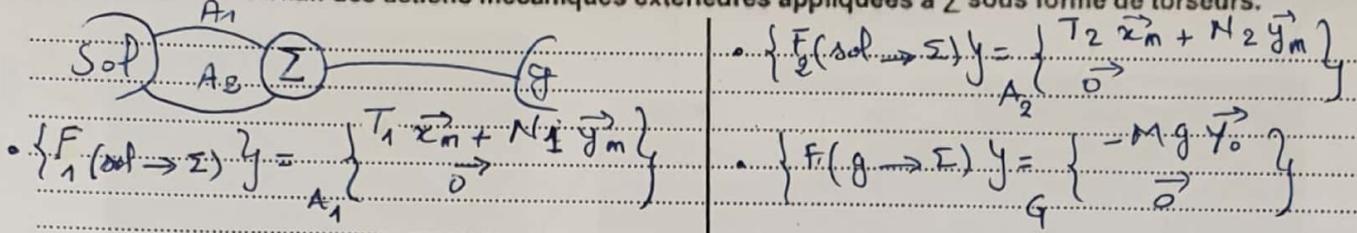


NOM : .....

CLASSE : .....

PAGE 1/7

Q1. Réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à  $\Sigma$  sous forme de torseurs.



Q2. Ecrire les 3 équations scalaires issues de l'application du PFS à  $\Sigma$  dans la base  $B_m = (\vec{x}_m, \vec{y}_m, \vec{z}_m)$ , on calculera les moments des forces en  $A_1$ .

Nota : le repère  $R_m(O, B_m)$  lié au sol est galiléen

$\{F(\bar{E} \rightarrow \Sigma)\}_G = \{0\}$

$\{F_1(\text{sol} \rightarrow \Sigma)\}_A + \{F_2(\text{sol} \rightarrow \Sigma)\}_B + \{F(g \rightarrow \Sigma)\}_G = \{0\}$

T.R.S :  $T_1 \vec{x}_m + N_1 \vec{y}_m + T_2 \vec{x}_m + N_2 \vec{y}_m - Mg \vec{y}_0 = \vec{0}$

on a :  $\vec{y}_0 = \sin \alpha \vec{x}_m + \cos \alpha \vec{y}_m$

T.R.S /  $\vec{x}_m$  :  $T_1 + T_2 - Mg \sin \alpha = 0$  (1)

T.R.S /  $\vec{y}_m$  :  $N_1 + N_2 - Mg \cos \alpha = 0$  (2)

T.M.S :  $\vec{M}_{A_1}(F_1) + \vec{M}_{A_1}(F_2) + \vec{M}_{A_1}(g \rightarrow \Sigma) = \vec{0}$

$\vec{M}_{A_1}(F_2) = A_1 A_2 \wedge (T_2 \vec{x}_m + N_2 \vec{y}_m)$   
 $\vec{M}_{A_1}(g \rightarrow \Sigma) = A_1 G \wedge (-Mg \vec{y}_0) = Mg(d \sin \alpha - c \cos \alpha) \vec{z}_m$

T.M.S /  $\vec{z}_m$  :  $LN_2 + Mg(d \sin \alpha - c \cos \alpha) = 0$  (3)

Q3. Déterminer à la limite du basculement (rupture du contact en  $A_2$ ), une relation exprimant  $\tan \alpha = f(c, d)$ .

Rupture du contact en  $A_2 \Rightarrow T_2 = N_2 = 0$

Les 3 eq. deviennent :

$d \sin \alpha - c \cos \alpha = 0$  (3')

$T_1 - Mg \sin \alpha = 0$  (1')

$N_1 - Mg \cos \alpha = 0$  (2')

(3')  $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{c}{d}$

Q4. Calculer dans ce cas le produit scalaire :  $\vec{A}_1 \vec{G} \cdot \vec{x}_0$  et conclure.

$\vec{A}_1 \vec{G} \cdot \vec{x}_0 = (c \vec{x}_m + d \vec{y}_m) \cdot \vec{x}_0 = c \cos \alpha - d \sin \alpha$

Cela veut dire que G est sur  $(A_1 \vec{y}_0)$ .

Q5. Quelle est la valeur minimale de  $\varphi$  dans cette situation pour assurer l'adhérence ?

Adhérence  $\Rightarrow |E_f \cdot \text{Tang}| < |E \cdot N| \cdot \tan \varphi$  donc :  $T_1 < N_1 \cdot \tan \varphi$  ( $T_1$  et  $N_1 > 0$ )

or (1') et (2')  $\Rightarrow \frac{T_1}{N_1} = \tan \alpha$

d'où :  $\tan \varphi > \tan \alpha$

soit  $\varphi_{\min} = \alpha$

Dans le cas d'une moto de trial, le centre de gravité est très bas.

Q6. Expliquer l'intérêt d'abaisser le centre de gravité par rapport à un franchissement où l'inclinaison  $\alpha$  est grande.

on a :  $\tan \alpha = \frac{c}{d}$

Abaisser G  $\Rightarrow$  d : faible

donc :  $\alpha$  serait grand. Ce qui permet à la moto de franchir des pentes très raides sans risque de basculement.

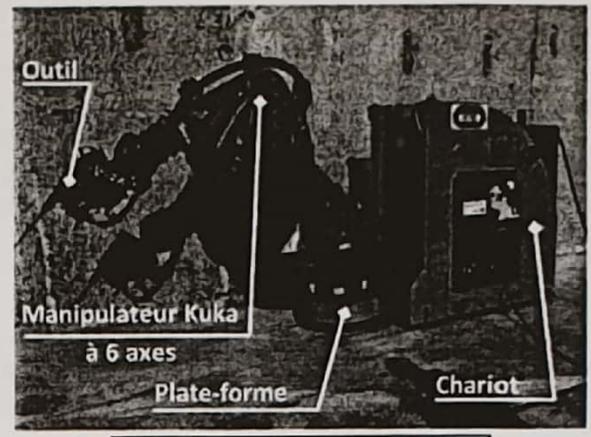
**DEUXIEME PROBLEME : ROBOT « ROBY »**

Le ROBOT ROBY est utilisé par des entreprises œuvrant dans le secteur économique du Bâtiment et des Travaux Publics (BTP) et plus particulièrement dans les chantiers de construction des bâtiments. Il réalise ainsi des opérations automatisées de perçage ou de ponçage des sols, murs et plafonds sur un chantier.

Il est constitué (voir figure1) :

- d'un chariot mobile ;
- d'une plate-forme élévatrice ;
- d'un manipulateur Kuka à six axes ;
- d'un outil (une perceuse ou une ponceuse).

Un aspirateur peut être utilisé en option, pour pouvoir évacuer les poussières lors d'un travail de ponçage.

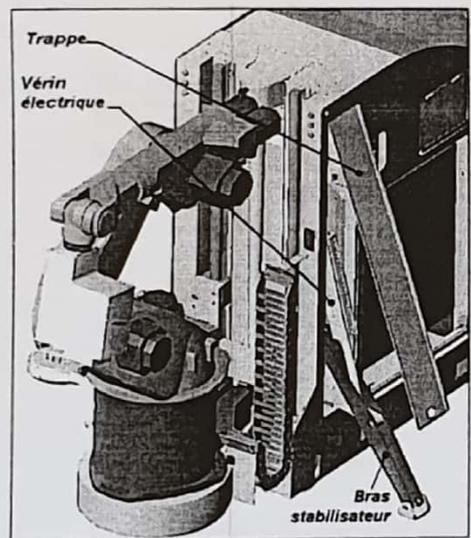


**Figure 1: ROBOT ROBY**

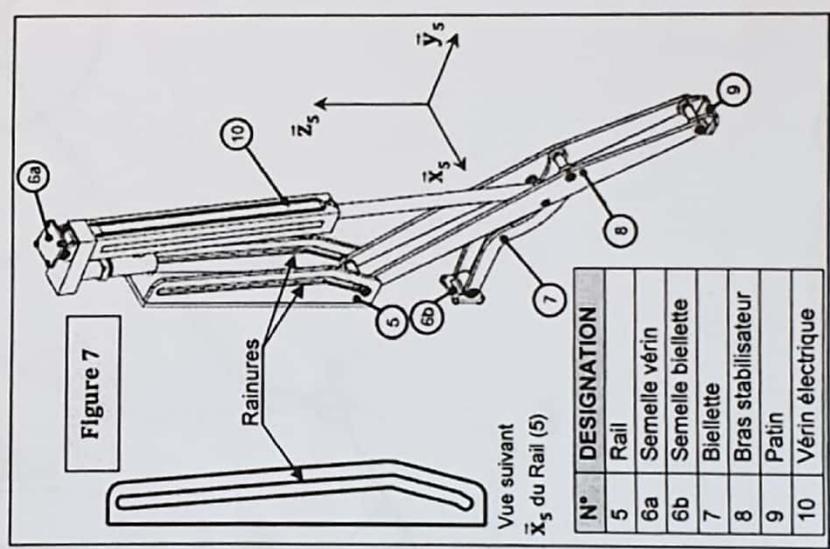
L'interface homme-machine du système est de type écran tactile, l'opérateur peut choisir via cet écran de commander ROBY en mode *semi-automatique* ou *automatique*.

❖ Etude du mécanisme de stabilisation du Robot :

La solution retenue pour limiter les risques de basculement de ROBY dans le cas de certains travaux particuliers est d'intégrer deux stabilisateurs latéraux à l'arrière du chariot (revoir la figure 3 ). Ces stabilisateurs sont déployés à l'aide de vérins électriques réversibles et permettent chacun de remplacer le contact roue arrière-sol par un contact patin-sol. L'ensemble du dispositif doit pouvoir être logé derrière une trappe à l'intérieur du chariot pour ne pas modifier l'encombrement du ROBOT ROBY lors des déplacements. On donne ci-après le diagramme des exigences des stabilisateurs.



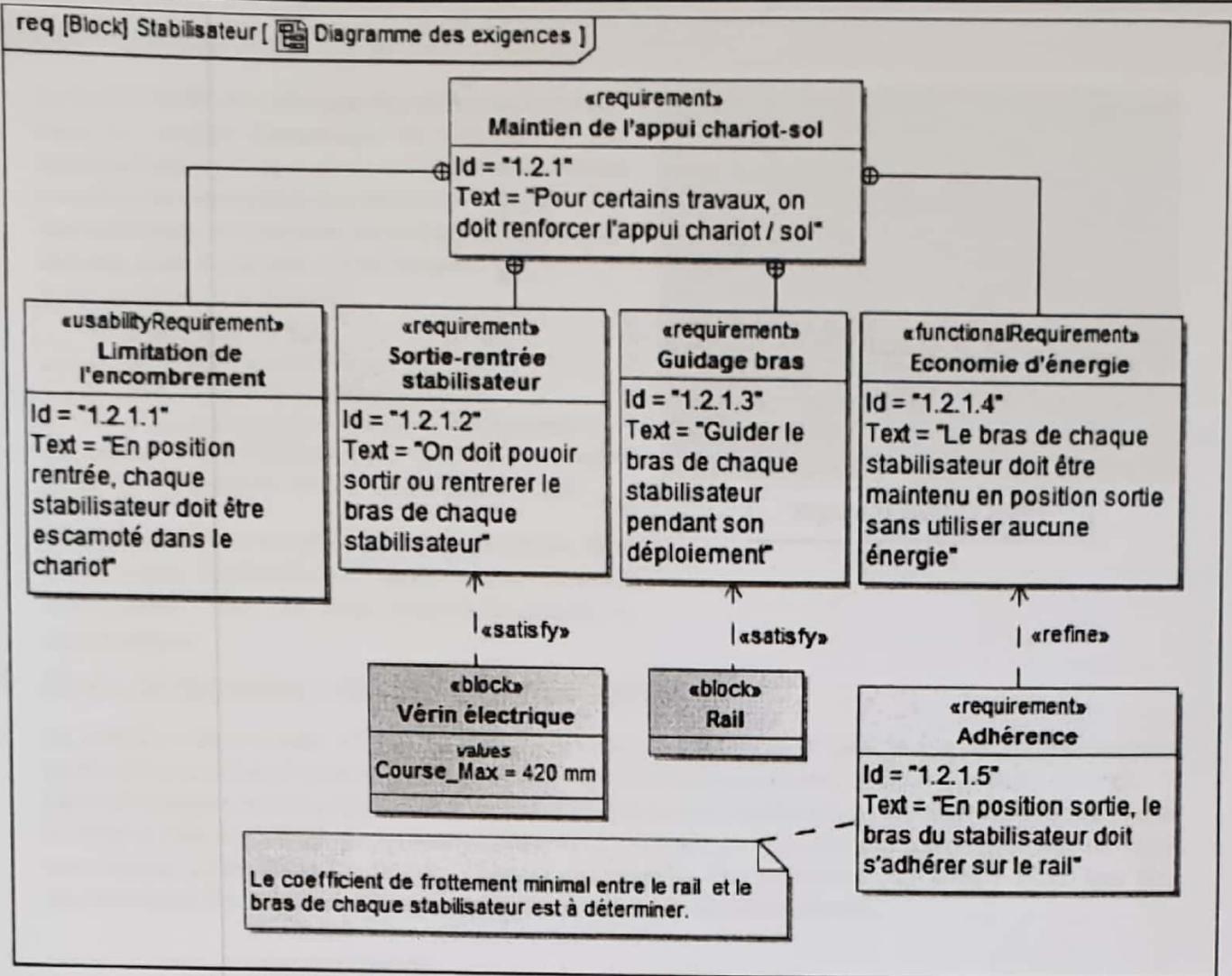
**Figure 3 : Stabilisateurs**



Pendant la sortie ou la rentrée du bras (8) du stabilisateur (figure 7 ) celui-ci est guidé par deux rainures symétriques réalisées sur le rail (5) : Un cylindre faisant partie de (8) glisse à l'intérieur des deux rainures. On adoptera le schéma cinématique plan du document réponse page 5/7.

Le vérin électrique (10) est modélisé simplement par deux pièces : Le corps (10a) et la tige (10b). Les liaisons sont listées ainsi :

- L(10b/10a) : pivot glissant (E,  $\bar{x}_{10}$ );
- L(10a/5) : pivot (E,  $\bar{x}_5$ );
- L(10b/8) : pivot (D,  $\bar{x}_8$ );
- L(8/5) : ponctuelle au point H;
- L(8/7) : pivot (B,  $\bar{x}_7$ );
- L(7/5) : pivot (A,  $\bar{x}_5$ ).



L'objet de cette étude est de déterminer le coefficient de frottement minimal entre le bras (8) du stabilisateur et le rail (5) pour garantir l'exigence d'identité « . . . . » (voir diagramme des exigences page 4). Pour respecter des contraintes de sécurité et limiter la consommation énergétique, la solution retenue doit assurer que le stabilisateur, une fois déployé, remplit sa fonction d'appui sur le sol sans que soit mis à contribution l'effort de sortie de la tige du vérin. Le stabilisateur est représenté par le schéma cinématique plan du document réponse, en position complètement sorti. Le vérin (10) d'après ce qui précède n'intervient pas pendant cette phase, il n'est donc pas représenté.

Le problème est supposé plan donc le torseur d'action mécanique dans une liaison pivot parfaite  $(M_{ij}, \vec{x}_s)$

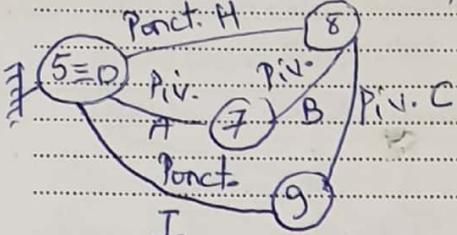
entre deux solides (i) et (j) sera noté :  $\{\tau(i \rightarrow j)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(i \rightarrow j) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{M_{ij}}$ . Toutes les liaisons sont parfaites sauf la

liaison ponctuelle au point H entre (8) et (5). On néglige l'action de pesanteur sur l'ensemble des pièces du stabilisateur et on note  $f$  le coefficient de frottement entre (8) et (5).

Q1 :

- Etudier l'équilibre de (7) et déduire le support des forces mises en jeu ;
- Etudier graphiquement l'équilibre de l'ensemble  $\Sigma = \{8, 9\}$ . En déduire la direction de  $\vec{R}(5 \rightarrow 8)$ .
- Quelle est alors la valeur du coefficient de frottement minimal  $f_{\min}$  entre (8) et (5) pour garantir le non glissement de (8) par rapport à (5) ?
- Donner l'identifiant de l'exigence que vous avez validé par cette étude.

a) Schema d'analyse:



(7) est en eq. sous l'action de 2 forces:

- $\vec{R}(5 \rightarrow 7)$  en A.
- $\vec{R}(8 \rightarrow 7)$  en B.

Les deux forces sont alors portées par (AB).

b) (8+9) est en eq. sous l'action de 3 forces:

- $\vec{R}(5 \rightarrow 8)$  en H;
- $\vec{R}(7 \rightarrow 8)$  en B;
- $\vec{R}(0 \rightarrow 9)$  en I.

on a:  $\times \vec{R}(7 \rightarrow 8)$ : Portée par (AB);

\*  $\vec{R}(0 \rightarrow 9)$  portée par (IC) (Pas de frottement);

Les 3 support se coupent en un m pt:  $J = (AB) \cap (IC)$   
d'où:

Le support de  $\vec{R}(5 \rightarrow 8)$  est (HJ)

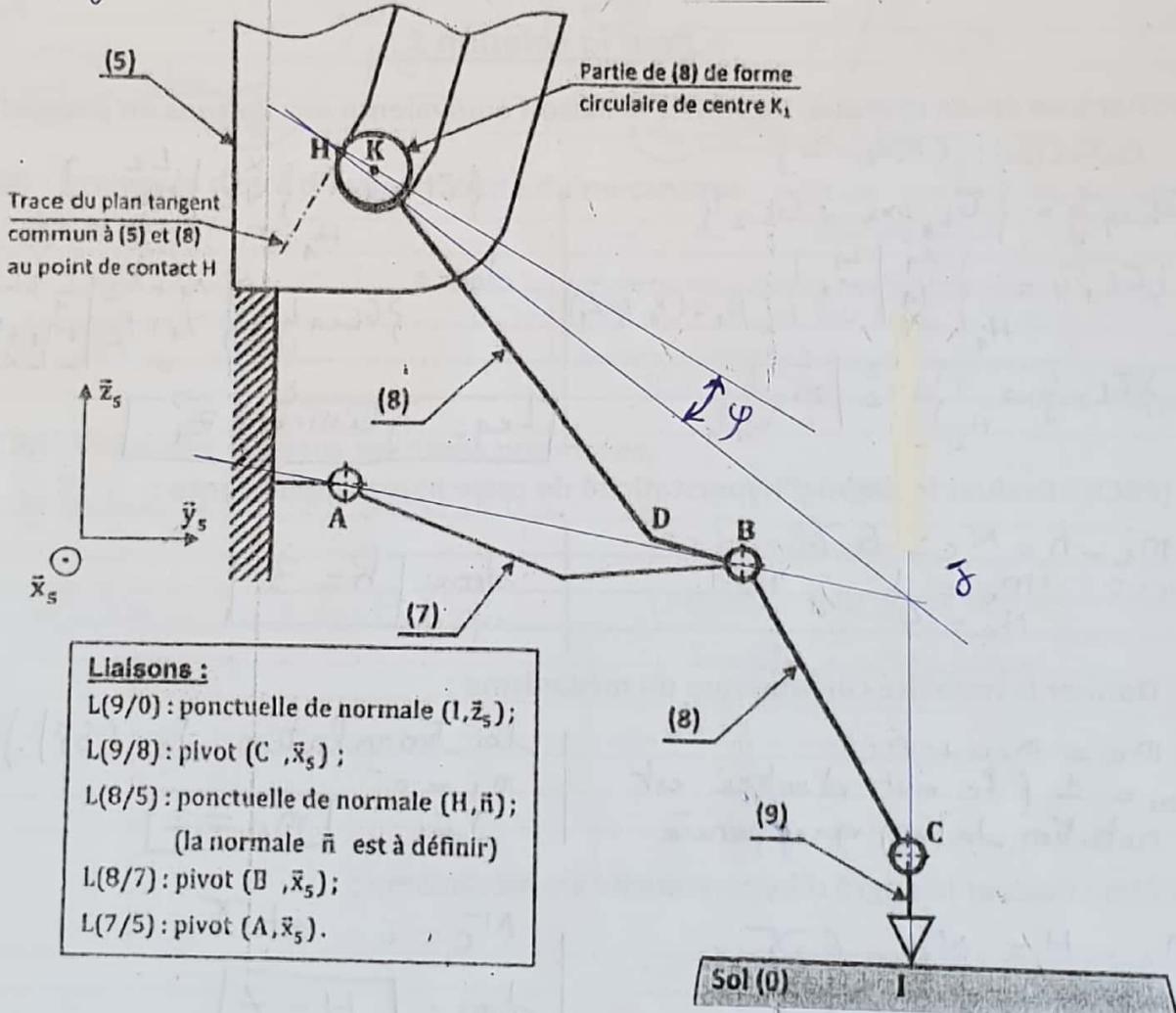
c) L'angle de frottement est:

$$\varphi = [\widehat{(HJ); (HK)}]$$

on mesure:

$$\boxed{\tan \varphi \approx 0,15}$$

d) L'Exigence: i.d. "1.2-1.5"



NOM: CORRIGE

CLASSE:

PAGE 5/7