

CORRIGÉ DU CONCOURS NATIONAL COMMUN  
SESSION 2009  
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II  
FILIÈRE TSI

Par K. Chaira

**1<sup>ère</sup> partie : Étude de l'application  $f_m$**

1.  $R$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $n$  et admet  $n+1$  racines  $x_0, x_1, \dots, x_n$  distinctes deux à deux, donc  $R$  est le polynôme nul.

2. Soit  $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_m^2$ .

$$f_m(\lambda.P+Q) = ((\lambda.P + Q)(x_0), \dots, (\lambda.P + Q)(x_n)) = ((\lambda.P(x_0) + Q(x_0), \dots, (\lambda.P(x_n) + Q(x_n))) \\ = \lambda.f_m(P) + f_m(Q).$$

3. (a)  $P \in \text{Ker } f_m$  équivaut à  $P(x_i) = 0$ , pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , donc le polynôme  $\pi = (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_n)$  divise  $P$ ; et, comme  $\deg(P) \leq m$  et  $\deg(\pi) = n + 1$ , donc il existe  $Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}$  tel que  $P = Q \pi$ . D'où,  $\text{Ker } f_m \subseteq \{Q \pi ; Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$ . Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que le polynôme  $\pi$  admet  $x_0, x_1, \dots, x_n$  comme racines.

(b) D'abord  $\text{Ker } f_m$  et  $\mathcal{P}_n$  sont des sous espaces vectoriels de  $\mathcal{P}_m$ , puisque  $n + 1 \leq m$ .

\* Si  $P \in \text{Ker } f_m \cap \mathcal{P}_m$ , alors pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $P(x_i) = 0$ , et  $\deg(P) \leq n$ ; et; d'après la question 1), le polynôme  $P$  est nul. D'où,  $\text{Ker } f_m \cap \mathcal{P}_m = \{0\}$ .

\* Soit  $H \in \mathcal{P}_m$ . On effectue la division euclidienne de  $H$  par  $\pi$ , il existe  $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$  tel que  $H = Q \pi + R$  et  $\deg(R) < \deg(\pi) = n + 1$ ; donc  $H \in \text{Ker } f_m + \mathcal{P}_n$ . D'où,  $\mathcal{P}_m = \text{Ker } f_m + \mathcal{P}_n$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}_m = \text{Ker } f_m \oplus \mathcal{P}_n$ .

(c)  $\dim(\text{Ker } f_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_n) = (m + 1) - (n + 1) = m - n$ .

$(X^i \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$  est une famille de polynômes échelonnées de  $\text{Ker } f_m$ , donc elle est libre; et, comme son cardinal est égal à la dimension de  $\text{Ker } f_m$ , donc  $(X^i \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$  est une base de  $\text{Ker } f_m$ .

(d) \*  $\text{rg}(f_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\text{Ker } f_m) = (m + 1) - (m - n) = n + 1$ .

\* Comme  $\text{Im}(f_m) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\text{rg}(f_m) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$ , donc  $\text{Im}(f_m) = \mathbb{R}^{n+1}$ . Ainsi, l'application  $f_m$  est surjective.

4. Dans cette question,  $m \leq n$ .

(a) Si  $P \in \text{Ker } f_m$ , alors les  $n + 1$  réels  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sont des racines de  $P$  deux à deux distinctes et  $\deg(P) \leq m < n + 1$ , donc  $P$  est nul. D'où,  $f_m$  est injectif.

(b)  $f_m$  étant injective, donc  $\text{Ker } f_m = \{0\}$ ; et, par suite

$$\text{rg}(f_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\text{Ker } f_m) = m + 1.$$

(c)  $f_m$  est surjective si, et seulement si,  $\text{rg}(f_m) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$  si, et seulement si,  $m = n$ .

5. (a) Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $\deg(L_i) = n$ .

Soit  $(k, i) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$ .

$$\text{Si } k = i, L_i(x_i) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} = 1,$$

$$\text{si } k \neq i, \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j) = 0; \text{ et, par suite } L_i(x_k) = \frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_i - x_j)} = 0.$$

(b) Soit  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

$f_n(L_i) = (L_i(x_0), L_i(x_1), \dots, L_i(x_n)) = (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,i}, \dots, \delta_{i,n}) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , le réel 1 est situé à la  $(i + 1)^{\text{ème}}$  place.

La famille  $(f_n(L_0), f_n(L_1), \dots, f_n(L_n))$  représente la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

(c) Soit  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i = 0$ . Donc, pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on

a  $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) = 0$  c'est-à-dire  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{i,j} = 0$  ce qui traduit à  $\alpha_j = 0$ . D'où,  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$

est une famille libre; et, comme le cardinal de cette famille est égal à  $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$ , donc  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathcal{P}_n$ .

(d) i. D'après la question 4), l'application  $f_n$  est bijective de  $\mathcal{P}_n$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Donc, pour tout  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P_y \in \mathcal{P}_n$  tel que

$$f_n(P_y) = y = (y_0, y_1, \dots, y_n).$$

ii. D'après la question précédente,  $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ . Comme  $P_y \in \mathcal{P}_n$  et  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$

est une base de  $\mathcal{P}_n$ , donc il existe  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $P_y = \sum_{i=0}^n \beta_i L_i$ . Et, par suite

$$(y_0, y_1, \dots, y_n) = f_n(P_y) = \sum_{i=0}^n \beta_i f_n(L_i) = \sum_{i=0}^n \beta_i \varepsilon_i = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n). \text{ Ainsi, } P_y = \sum_{i=0}^n y_i L_i.$$

## 2<sup>ème</sup> partie : Approximation polynômiale au moindres carrés

**A.** On suppose  $m \geq n + 1$ .

1. D'après la question d-3) de la première partie, l'application  $f_m$  est surjective de  $\mathcal{P}_m$  vers  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Donc, pour l'élément  $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe  $Q_0 \in \mathcal{P}_m$  tel que

$$f_m(Q_o) = (y_o, y_1, \dots, y_n).$$

2. \* On rappelle que  $f_m(Q_o) = (Q_o(x_o), \dots, Q_o(x_n))$ . Pour tout  $P \in \mathcal{P}_m$ ,  $\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2$

est positif; et, comme  $\Phi_m(Q_o) = \sum_{i=0}^n (y_i - Q_o(x_i))^2 = 0$ , donc la valeur minimal  $\lambda_m$  de  $\Phi_m(P)$  lorsque  $P$  décrit  $\mathcal{P}_m$  est nulle.

\*  $(Q \in \mathcal{P}_m, \Phi_m(Q) = 0)$  équivaut à  $(Q \in \mathcal{P}_m, Q(x_i) = y_i = Q_o(x_i), \text{ pour tout } i \in \{0, 1, \dots, n\})$  équivaut à  $Q - Q_o \in \text{Ker } f_m$ .

L'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte est  $Q_o + \text{Ker } f_m$ .

**B.** On suppose que  $m \leq n$ .

1. \* On pose  $M = [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  et  $N = [n_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ . On a  $M + N = [m_{i,j} + n_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ ; donc,  ${}^t(M + N) = [m_{j,i} + n_{j,i}]_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}} = [m_{j,i}]_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}} + [n_{j,i}]_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}} = {}^tM + {}^tN$ .

\* On pose  $M' = [m'_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  et  $N' = [n'_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}}$ .

$$M'N' = [c_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}, \text{ où } c_{i,j} = \sum_{k=1}^q m'_{i,k} n'_{k,j} \text{ et,}$$

$${}^tN' {}^tM' = [d_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}}, \text{ où } d_{i,j} = \sum_{k=1}^q n'_{k,i} m'_{j,k} = \sum_{k=1}^q m'_{j,k} n'_{k,i} = c_{j,i}.$$

Ainsi,  ${}^tN' {}^tM' = {}^t(M'N')$ .

2. (a)  $Av = (P_v(x_o), P_v(x_1), \dots, P_v(x_n))$ .

(b) Si  $Av = 0$ , où  ${}^t v = (v_o, \dots, v_m)$ , alors pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $P(x_i) = 0$ . Donc, le polynôme  $P_v$  s'annule en  $n + 1$  points distinctes deux à deux et, comme  $\deg(P_v) \leq m < n + 1$ , donc  $P = \sum_{k=0}^m v_k X^k$  est nul; et, par suite  $v = 0$ .

3. \*  ${}^t u u = \sum_{k=0}^n u_k^2$ .

\*  ${}^t u u \geq 0$  car c'est la somme des réels positifs.

${}^t u u = 0$  si, et seulement si, pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $u_k^2 = 0$  si, et seulement si,

$$u = (u_o, u_1, \dots, u_n) = 0.$$

4. (a) Par hypothèse  ${}^t A A v = 0$  et  $u = Av$ , donc  ${}^t u u = {}^t v ({}^t A A v) = {}^t v \cdot 0 = 0$ . D'après la question 3) de la même partie,  $u = 0$  c'est-à-dire  $Av = 0$ . Et, en tenant compte de la question b-2) de cette partie,  $v = 0$ .

(b) Comme  ${}^t A A$  est une matrice carrée réelle d'ordre  $m + 1$  et vérifie l'implication suivante : pour tout  $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ ,  $({}^t A A)v = 0$  implique  $v = 0$ , on déduit que  $\text{rg}({}^t A A) = m + 1$  et  ${}^t A A$  est inversible.

(c)  ${}^t A A = [c_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m+1}$ , où  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i-1} x_{k-1}^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i+j-2}$ , pour tout  $(i, j) \in \{0, \dots, m+1\}^2$ .

5. Puisque  $M = {}^tAA$  est inversible,  $MZ = c$  est un système de Cramer. Donc, il admet une unique solution  $Z = M^{-1}c$ .

6. (a) \* Soit  $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ .

$$g(v) = {}^t(b - Av)(b - Av) = ({}^tb - {}^tv {}^tA)(b - Av) = {}^tbb - {}^tbAv - {}^tv {}^tAb + {}^tv {}^tAAv.$$

$$* \text{ On a } Aw = \begin{pmatrix} P_w(x_o) \\ \cdots \\ \cdots \\ P_w(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_o \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = b, \text{ donc } {}^tAAw = {}^tAb.$$

$$g(w) = {}^tbb - {}^tbAw - {}^tw {}^tAb + {}^tw {}^tAAw = {}^tbb - {}^tbAw - {}^tw({}^tAb - {}^tAAw) = {}^tbb - {}^tbAw.$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } {}^t(w - v) {}^tAA(w - v) &= ({}^tw {}^tA - {}^tv {}^tA)(Aw - Av) \\ &= {}^tw {}^tAAw - {}^tw {}^tAAv + {}^tv {}^tAAw - {}^tv {}^tAAv \\ &= {}^tw({}^tAb) - {}^tbAv + {}^tv {}^tAb - {}^tv {}^tAAv \\ &= g(v) - g(w). \end{aligned}$$

(c) \* D'après les questions b-2) et 3) de cette partie,  $g(v) - g(w) = {}^t(Aw - Av)(Aw - Av) \geq 0$ ; et,  $g(v) = g(w)$  si, et seulement si,  $A(w - v) = 0$  si, et seulement si,  $w = v$ .

7. Soit  $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} \langle Av, b - Aw \rangle &= {}^t(Av)(b - Aw) = {}^tv {}^tA(b - Aw) = {}^tv {}^tAb - {}^tv {}^tAAw = {}^tv({}^tAb - {}^tAAw) \\ &= {}^tv \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc,  $b - Aw \in F^\perp$ . Ce qui justifie que  $Aw$  est la projection orthogonale de  $b$  sur  $F = \text{Im}(A)$ .

$$g(w) = \|b - Aw\|^2 = \min(\{\|b - Av\|^2, v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}).$$

8 - (a)  $b - AV_P = {}^t(y_o - P(x_o), y_1 - P(x_1), \dots, y_n - P(x_n))$ .

$$\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2 = \|b - AV_P\|^2 = g(V_P).$$

9. (a) D'après la question c-6) de cette partie, pour tout  $P \in \mathcal{P}_m$ ,

$$\Phi_m(P) = g(V_P) \geq g(w) = \Phi_m(P_w).$$

Et,  $\Phi_m(P) = \Phi_m(P_w)$  si, et seulement si,  $g(V_P) = g(w)$  si, et seulement si,  $V_P = w$  si, et seulement si,  $P = P_w$ .

(b)  $\lambda_m = \|b - Aw\|^2$ .

$$10. \text{ (a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(b) } {}^tAb = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) On pose  $Z = {}^t(x, y, z)$ .

Le système  ${}^tAAZ = {}^tAb$  èquivaut à (S)  $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 & (L_1) \\ x + 3y + 4z = 0 & (L_2) \\ 3x + 4y + 9z = 1 & (L_3) \end{cases}$

On effectue les opérations suivantes :  $2L_2 - L_1 \rightarrow L_2$  et  $2L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3$ , on obtient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 5y + 5z = -2 \\ 5y + 9z = -4 \end{cases} .$$

On effectue les opérations suivantes :  $L_3 - L_2 \rightarrow L_3$ , on obtient  $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 5y + 5z = -2 \\ 4z = -2 \end{cases}$

Ainsi,  $(S) \Leftrightarrow (x, y, z) = (\frac{17}{10}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{2})$ .

(d) On a  $V_{P_o} = \begin{pmatrix} \frac{17}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $P_o = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{10}X + \frac{17}{10}$  et

$$\lambda_3 = (1 - P_o(-1))^2 + (2 - P_o(0))^2 + (1 - P_o(1))^2 + (0 - P_o(2))^2 = \frac{243}{5}.$$

La représentation graphique de la courbe de la fonction  $t \mapsto P_0(t)$  et les points  $(x_i, y_i)$  est :

