EXERCICE I

1. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé , on a $f_\lambda(x_0) = y_0$ ssi $\lambda = \dfrac{(y_0 - x_0)e^{x_0}}{1 + x_0^2}$.

2. – Si $\lambda = 0$, $f_0(x) = x$, c'est l'équation d'une droite.
   – Si $\lambda \neq 0$
     – au $V(+\infty)$, $f_\lambda \sim x$ et $f_\lambda(x) - x \longrightarrow 0$, donc $y = x$ est une asymptote.
     – au $V(-\infty)$, $\dfrac{f_\lambda(x)}{x} \sim \lambda x e^{-x} \longrightarrow \infty$, donc (Oy) est une branche parabolique.

3. $f''_\lambda(x) = \lambda(x-1)(x-3)e^{-x}$,d'où les tableaux de variations :

Si $\lambda > 0$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_\lambda(x)$		$\bigcup$		$\bigcap$		$\bigcup$	

Si $\lambda < 0$

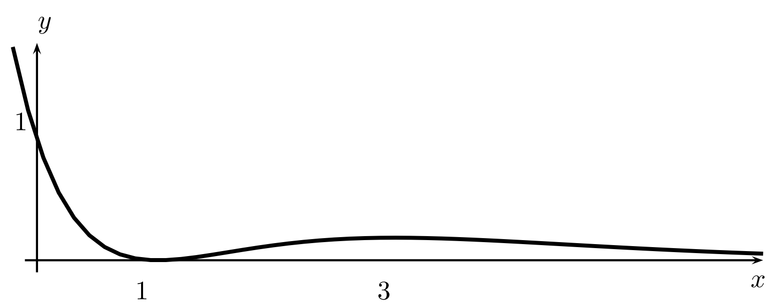
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$		$\bigcap$		$\bigcup$		$\bigcap$	

donc les points d'inflexion sont $(1, 1 + \dfrac{2\lambda}{e})$, $(3, 3 + \dfrac{10\lambda}{e^3})$.

4. (a) Posons $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{e^x}$, $g' = (x-1)(3-x)e^{-x}$,d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^3}$	$\searrow$	0

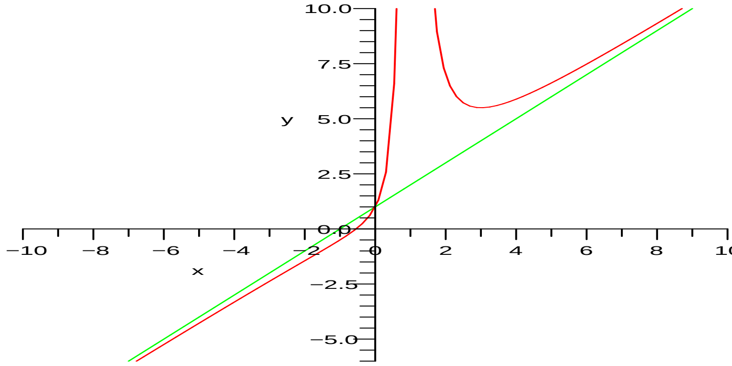
d'où le tracé de la courbe



(b) Pour $\lambda \neq 0$, Γ_λ admet une tangente horizontale ssi $f'_\lambda = 0$ ssi $g(x) = \dfrac{1}{\lambda}$ d'où si n est le nombre de points où Γ_λ admet une tangente horizontale , alors , n est le nombre de points sur lesquelles la droite horizontale $y = \dfrac{1}{\lambda}$ rencontre le graphe de g qu'on vient de tracer.

– si $\lambda \leq 0$, $n = 0$
– si $\lambda > \dfrac{e^3}{4}$, n=3
– si $\lambda = \dfrac{e^3}{4}$, $n = 2$
– si $0 < \lambda < \dfrac{e^3}{4}$, $n = 1$

(c) Le lieu I est l'ensemble des (x, y) vérifiants $g(x) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $y = f_\lambda(x)$, c'est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $y = x + \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ de tracé :



5. On suppose que $a \neq 1$, $\Gamma_{\lambda,a}$ apour équation $y = f_\lambda(a) + f'_\lambda(a)(x-a)$
   Un point (x,y) est commun à tous les $\Gamma_{\lambda,a}$ ssi $(x,y) \in \Gamma_{\lambda,a}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ssi $\lambda e^{-a}(1+a^2-(a-1)^2(x-a))+(x-y) = 0, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ ssi $x = y = a+\dfrac{a^2+1}{(a-1)^2}$ et le point commun est donc : $(a, a+\dfrac{a^2+1}{(a-1)^2})$. Si $a = 1$, $f'_\lambda(a) = 1, \forall\lambda \in \mathbb{R}$, donc les $\Gamma_{\lambda,1}$ sont parallèles .

6. – Si $\lambda = -2$

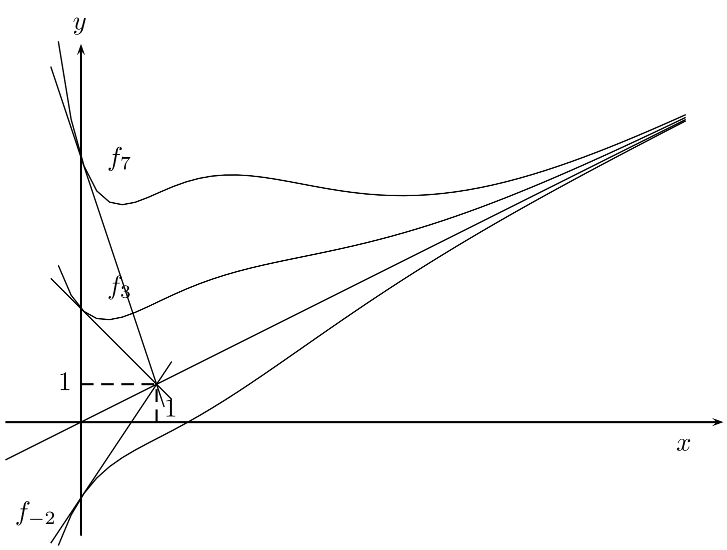
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_{-2}(x)$	$+$	$+$	
$f_{-2}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   – Si $\lambda = 3$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'_3(x)$		$-$	0	$+$	
$f_3(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

   – Si $\lambda = 7$

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'_7(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	-10
$f_7(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$



7. $f'_\lambda = 1 - \lambda(x-1)^2 e^{-x}$ or $\lambda e^{-x} = \dfrac{f_\lambda - x}{1+x^2}$, donc f_λ vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.

La question 1 s'interpréte par le théorème de Cauchy-Lipschitz : par un point (x_0, y_0) passe une et une seule solution de l'équation .

EXERCICE II

1. (a) C'est la somme d'une suite géométrique de raison $q = x \neq 1$.

   (b) 1 n'est racine de P , donc , $P_n(x) = 0$ ssi $x \neq 1$ et $x^{2n+1} = 1$ ssi $x \in \{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} \quad / \quad k = 1, ..., 2n\}$.

2. Pour $x = 1$, $P_n(x) = 2n + 1 \longrightarrow +\infty$, et la suite $(x^{2n+1})_n$ converge ssi $|x| \leq 1$, donc $(P_n(x))_n$ converge ssi $x \in [-1, 1[$.

3. (a) $P_n(1) = 2n + 1$, $P_n(-1) = \dfrac{1 - (-1)^{2n+1}}{1 + 1} = 1$, $P_n'(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k = n(2n + 1)$

   $$P_n'(-1) = \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k-1} = \sum_{paires} + \sum_{impaires} = -2\sum_{p=1}^{n} p + \sum_{p=0}^{n-1}(2p + 1) = -n.$$

   (b) Pour $x \neq 1$, $P_n'(x) = \dfrac{\varphi_n(x)}{(1 - x)^2}$.

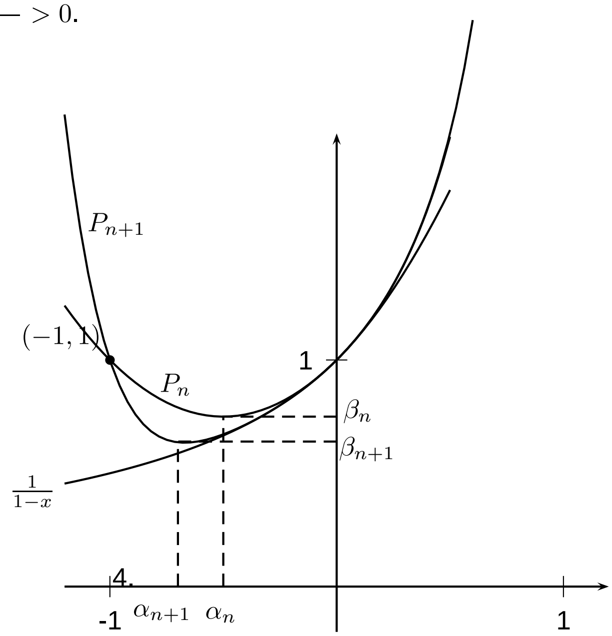
   (c) Pour $n \neq 0$, $\varphi_n'(x) = 2n(2n + 1)(x - 1)x^{2n-1}$, d'où les tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		α_n		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$P_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	$2n+1$	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) φ_n est strictement croissante sur $[-1, 0]$ continue , de plus , $\varphi_n(-1) = -4n < 0$ et $\varphi_n(0) = 1 > 0$ le TVI entraine l'existence de α_n unique qui annule φ_n. Le tableau de variations de P_n montre que $\beta_n = P_n(\alpha_n) = \dfrac{1 - \alpha_n^{2n+1}}{1 - \alpha_n} > 0$.

4.



5. (a) $\varphi_n(\alpha_n) = 0$, donc $\alpha_n^{2n} = \dfrac{1}{1 + 2n - 2n\alpha_n}$ et puisque $-1 < \alpha_n < 0$, on obtient $\dfrac{1}{1 + 4n} < \alpha_n^{2n} < \dfrac{1}{1 + 2n}$ ce qui donne $\dfrac{1}{\sqrt[2n]{1 + 4n}} < |\alpha_n| < \dfrac{1}{\sqrt[2n]{1 + 2n}}$, or les deux suites encadrantes tendent vers 1 , donc $|\alpha_n| = -\alpha_n \longrightarrow 1$, c.à.d $\alpha_n \longrightarrow -1$.

(b) $\varphi_n(\alpha_n)=0$, donc $P'_n(\alpha_n)=0$.

De l'égalité $\alpha_n^{2n}=\dfrac{1}{1+2n-2n\alpha_n}$ et $\alpha_n \longrightarrow -1$, on déduit que $\alpha_n^{2n}\sim\dfrac{1}{4n}$, or $\dfrac{1}{4n}$ ne tend pas vers 1 , donc $2n.ln(-\alpha_n)\sim -ln(4n)=-ln(4)-ln(n)\sim -ln(n)$, or $ln(-\alpha_n)\sim-\alpha_n-1$ et par suite $\alpha_n+1\sim\dfrac{ln(n)}{2n}$.

(c) $\varphi'_n(x)=2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1)>0$ sur $]-1,0[$, donc φ_n est croissante sur $]-1,0[$, ceci nous invite à montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_{n+1}(\alpha_n)>0$, or $\varphi_{n+1}(\alpha_n)=(2n+2)\alpha_n^{2n+3}-(2n+3)\alpha_n^{2n+2}-2n\alpha_n^{2n+1}+(2n+1)\alpha_n^{2n}=\alpha_n^{2n}(\alpha_n-1)((2n+2)\alpha_n^2-\alpha_n-(2n+1))=\alpha_n^{2n}(\alpha_n-1)^2((2n+2)\alpha_n+(2n+1))$, ce qui revient à montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(2n+2)\alpha_n+(2n+1)>0$ qu'on va le faire par récurrence .

- Pour $n=1$, on a $\varphi_1(\alpha_1)=0$, donc $2\alpha_1^3-3\alpha_1^2+1=(\alpha_1-1)^2(2\alpha_1+1)=0$, ce qui donne $\alpha_1=\dfrac{-1}{2}$, donc , $4\alpha_1+3=1>0$
- Suposons que pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$, $2n\alpha_{n-1}+(2n-1)>0$ et montrons que $(2n+2)\alpha_n+(2n+1)>0$.
  Le graphe de P_n est au dessous de celui de P_{n-1} , donc , $P_n(\alpha_n)<P_{n-1}(\alpha_{n-1})$, or en dérivant l'expression $(1-x)P_n(x)=1-x^{2n+1}$ on obtient $-P_n(x)+(1-x)P'_n(x)=-(2n+1)x^{2n}$ et par suite $P_n(\alpha_n)=(2n+1)\alpha_n^{2n}$ et l'inégalité $P_n(\alpha_n)<P_{n-1}(\alpha_{n-1})$ se traduit par $|\alpha_n|^{2n}<\dfrac{2n-1}{2n+1}|\alpha_{n-1}|^{2n-2}$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence , on obtient les inégalités :
  $\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}|\alpha_n|\right)^{2n}<\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{2n}\dfrac{2n-1}{2n+1}|\alpha_{n-1}|^{2n-2}<\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{2n}\dfrac{2n-1}{2n+1}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{2n-2}=$
  $\left(\dfrac{(2n-1)(2n+2)}{2n(2n+1)}\right)^{2n-2}\dfrac{(2n+2)^2(2n-1)}{(2n+1)^3}=\left(\dfrac{4n^2+2n-2}{4n^2+2n}\right)^{2n-2}\dfrac{8n^3+12n^2-4}{8n^3+12n^2+6n+1}<1$
  donc $\dfrac{2n+2}{2n+1}|\alpha_n|<1$ c.à.d $(2n+2)\alpha_n+(2n+1)>0$ et la récurrence est établie.

(d) On a $\varphi_n(\alpha_n)=0$, donc $\alpha_n^{2n}=\dfrac{1}{2n+1-2n\alpha_n}\sim\dfrac{1}{4n}$ et par suite $\beta_n=\dfrac{1-\alpha_n^{2n+1}}{1-\alpha_n}\sim\dfrac{1}{2}$.

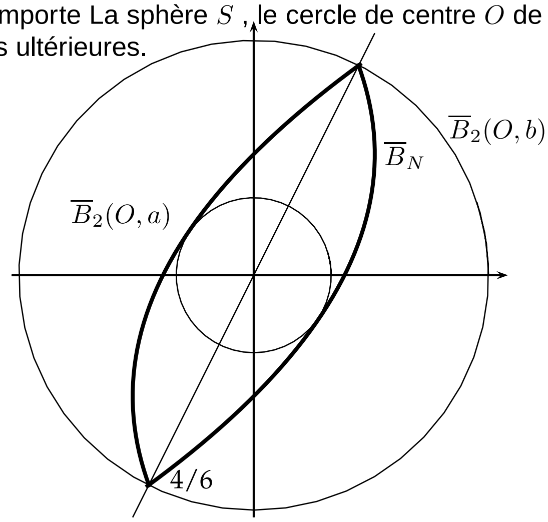
6. (a) f_u est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{\infty}=0$, donc f_u est bornée .

(b) La fonction $(x,y)\longmapsto f_u(t)$ est symétrique par rapport à l'origine , donc on peut restreindre L'étude au demi plan $y\geq 0$ et l'étude de f_u conduit au tableau de variations où on a posé $r_1=\dfrac{-x-\sqrt{x^2-xy+y^2}}{y}$ et $r_2=\dfrac{-x+\sqrt{x^2-xy+y^2}}{y}$ les zéros de f'_u :

t	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
$f'_u(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_u(t)$	0	$\searrow$	$\dfrac{y}{1+2r_1}$	$\nearrow$	$\dfrac{y}{1+2r_2}$	$\searrow$	0

De plus $r_1\leq 0$, $r_2\geq 0$ et $|f_u(r_2)|-|f_u(r_1)|$ est de même signe que celui de $2+2(r_1+r_2)=\dfrac{y-2x}{y}$.

Donc , $N(u)=\dfrac{y}{1+2r_1}$ si $y\leq 2x$ et $N(u)=\dfrac{y}{1+2r_2}$ si $y\geq 2x$, ce qui donne :
$N(u)=1$ ssi ($(y-1)^2=-4(x-1)$ et $y\leq 2x$) ou ($(y+1)^2=4(x+1)$ et $y\geq 2x$).
d'où la figure suivante qui comporte La sphère S , le cercle de centre O de rayon a et celui de centre O et de rayon b des questions ultérieures.



(c) L'inégalité $aN(x,y) \leq \sqrt{x^2+y^2}$ se traduit par $a\overline{B}_2 = \overline{B}_2(O,a) \subset \overline{B}_N$, où $\overline{B}_2$ et $\overline{B}_N$ désignent respectivement les boules unités associées au normes $\|.\|_2 : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ et $N : (x,y) \longmapsto N(x,y)$, le plus grand réel qui vérifit cette inclusion est $a = d(O,S)$.
Soit $M_0 = (x_0, y_0), (y_0 > 0)$, le point unique d'intersection de la tangente à S et de la sphère de centre O et de rayon a , l'équation de la sphère est : $f(x,y) = (y+1)^2 - 4(x+1) = 0$, donc $\overrightarrow{OM_0}$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{grad}(f)(x_0,y_0) = (-4x_0, 2(y_0+1))$, ce qui donne M_0 est la solution unique du système : $\left\{\begin{array}{c} det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{grad}(f)(x_0,y_0)) = 0 \\ (y_0+1)^2 = 4(x_0+1) \end{array}\right.$ qui est équivalent au système $\left\{\begin{array}{c} x_0(y_0+1) + 2y_0 = 0 \\ (y_0+1)^2 = 4(x_0+1) \end{array}\right.$, ceci revient à résoudre l'équation $y^3 + 3y^2 + 7y - 3 = 0$ qui admet la seule solution réelle $y_0 \simeq 0.36$, ce qui donne $x_0 \simeq -0.53$ et par suite $a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \simeq 0.64$.

(d) L'inégalité $\sqrt{x^2+y^2} \leq bN(x,y$ se traduit par l'inclusion $\overline{B}_N \subset b\overline{B}_2 = \overline{B}_2(O,b)$, le plus petit réel qui vérifit cette inclusion est b , le demi diamètre de la sphère S.
Soit $N_0 = (x_1, y_1)$ le point d'abscisse positif , intersection de S avec la droite $y = 2x$, alors , N_0 vérifie le système $\left\{\begin{array}{c} y_1 = 2x_1 \\ (y_1+1)^2 = 4(x_1+1) \end{array}\right.$ ce qui donne $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_1 = \sqrt{3}$ et par suite $b = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

EXERCICE III

Partie-A

1. (a) ln est concave , la tangente en 0 est d'équation $y = x - 1$, donc $\forall x > 0$, $ln(x) \leq x - 1$.
   (b) – Pour $u = n$, l'inégalité est triviale .
   – pour $u \in [0, n[$, $x = 1 - \dfrac{u}{n} > 0$, donc d'après (a) , $ln(1 - \dfrac{u}{n}) \leq -\dfrac{u}{n}$, c.à.d $nln(1 - \dfrac{u}{n}) \leq -u$ est en composant par l'exponentielle on obtient l'inégalité demandée.

2. (a) La formule de Taylor-Lagrange entre 1 et x entraine l'existence de c tel que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^c$, donc $e^x \geq 1 + x$.
   (b) $\forall t \in [0,1]$, $e^t \geq 1 + t$, donc $(1-t)e^t \geq 1 - t^2 \geq 0$, donc en levant à la puissance n , on obtient l'inégalité demandée.
   (c) $\forall t \in [0,1]$, la fonction $t \longmapsto (1-t)^n$ est convexe et la tangente en 0 est d'équation $y = 1 - nt$, donc $\forall t \in [0,1]$, $(1-t)^n \geq 1 - nt$, et en remplaçant t par t^2 , on obtient l'inégalité demandée.
   (d) Pour $t = \dfrac{u}{n}$,(c) entraine $1 - n(\dfrac{u}{n})^2 \leq (1 - \dfrac{u^2}{n^2})^n$ et d'après (b) $(1 - \dfrac{u^2}{n^2})^n \leq (1 - \dfrac{u}{n})^n e^u$ ce qui entraine l'inégalité demandée.

3. (a) Pour tout $t \geq 0$, $h' = 2t^3(2-t^2)e^{-t^2}$, d'où le tableau de variations :

t	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

   ce qui montre que h est bornée et que $\forall t \geq 0$, $|h(t)| \leq \dfrac{4}{e^2}$.
   (b) Notons cette suite u_n , les questions (1.b) et (2.d) entrainent que $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{h(t)}{n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{4}{ne^2} = \frac{4}{e^2\sqrt{n}}$, donc $(u_n)_n$ tend vers 0.
   (c) $e^{-t^2} = o(\dfrac{1}{n^2})$, d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$. $(u_n)_n$ converge vers 0 donc les deux suites $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ convergent vers la même limite .
   Les changements succéssives $t = u\sqrt{n}$ et $u = cos(\theta)$ conduisent à $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n d = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n+1}(\theta)d\theta$.
   On va établir le résultat classique $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   Posons : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$.

- On remarque d'abord que la suite $(W_n)_n$ est strictement positive et strictement décroissante .
  En effet $\forall t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, $0 < sin(t) < 1$ ce qui donne en multipliant par $sin^n(t) > 0$, l'encadrement strict $0 < sin^{n+1}(t) < sin^n(t)$ et puisque les fonctions sont continues sur le segment $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ ces inégalités se préservent par intégration , ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < W_{n+1} < W_n$.
- Une première relation s'obtient par une intégration par parties puisque les fonctions $t \longmapsto cos(t)$ et $t \longmapsto sin^{n+1}(t)dt$ sont de classe C^1 sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$:
  $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-cos'(t))sin^{n+1}(t)dt = [-cos(t)sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)sin^n(t)dt =$
  $(n+1)(W_n - W_{n+2})$, donc $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
- L'égalité précédente entraine que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $W_{2p} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)...1}{(2p)(2p-2)...2}W_0 = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et
  $W_{2p+1} = \dfrac{(2p)(2p-2)...2}{(2p+1)(2p-1)...1}W_1 = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
- La décroissance et la positivité stricte de $(W_n)_n$ entraine que : $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$ et en divisant par W_n , on obtient $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{W_{n+2}}{W_n} < \dfrac{W_{n+1}}{W_n} < 1$ ce qui donne : $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}$ tend vers 1 à l'infini et par suite $W_{n+1} \sim W_n$.
- Cette dernière équivalence fournit $\displaystyle\lim_{p \longrightarrow +\infty} \dfrac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = 1$ et d'autre part $\dfrac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \dfrac{(2.4...(2p))^2}{(3.5...(2p-1))^2}\dfrac{2}{(2p+1)\pi}$,
  d'où $\sqrt{p}\dfrac{1.3.5...(2p-1)}{2.4...(2p)} \longrightarrow \dfrac{1}{\pi}$.
- La suite $((n+1)W_nW_{n+1})_n$ est constante . En effet $\forall n \in \mathbb{N}$, l'égalité $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, entraine $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1} = ... = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
- En fin on obtient grâce à l'équivalence $W_{n+1} \sim W_n$, $\dfrac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \sim nW_n^2$ ce qui donne $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2n}}$.

On conclut finalement $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n+1}(t)dt = W_{2n+1} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n+2}} \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, et par suite $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{\pi}{2}$.

4. La parité de la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ entraine que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

Partie-B

1. $|e^{-ixt}f(t)| = f(t) = e^{-t^2}$ intégrable.
2. Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale
   - $\forall x$, $t \longmapsto e^{-ixt}f(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x$, $t \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial x} = -ite^{-ixt}f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall t$, $x \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial x} = -ite^{-ixt}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|-ite^{-ixt}f(t)| = |t|e^{-t^2} = o(\dfrac{1}{t^2})$. sont vérifiées , donc $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ona
     $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\widehat{f})'(x) = -i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-ixt}f(t)dt$ et par suite :
     $(\widehat{f})' + \dfrac{x}{2}\widehat{f} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (-it + \dfrac{x}{2})e^{-ixt-t^2}dt = \dfrac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (-2t - ix)e^{-ixt-t^2}dt = \dfrac{i}{2}\left[e^{-ixt-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$
     Le crochet est nul grâce à l'égalité $|e^{-ixt-t^2}| = e^{-t^2} \longrightarrow 0$ à l'infini.
3. Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ae^{-\dfrac{x^2}{4}}$ où A une constante réelle , or $\widehat{f}$ est une solution de cette équation , donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{f}(x) = Ae^{-x^2}$ et puisque $\widehat{f}(0) = \sqrt{\pi}$, alors $\widehat{f}(x) = \sqrt{\pi}e^{-\dfrac{x^2}{4}}$.