

المملكة المغربية  
**ROYAUME DU MAROC**



Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,  
de la Recherche Scientifique et de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun  
École Hassania des Travaux Publics



**CONCOURS NATIONAL COMMUN**  
d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et  
Établissements Assimilés

Session 2013

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II**

**Filière PSI**

**Durée 4 heures**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde  
L'usage de la calculatrice est interdit

**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.**

**L'usage de la calculatrice est interdit.**

*Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précisions les références des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Le sujet de cette épreuve est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## Premier exercice

### Matrice de Gram et application

Soient  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ; on note  $G(u_1, \dots, u_n)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $\langle u_i, u_j \rangle$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ . La matrice  $G(u_1, \dots, u_n)$  est dite une matrice de Gram.

On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $u_j = \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k$  l'expression du vecteur  $u_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On désigne enfin par  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $m_{i,j}$ .

1. Pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ , exprimer le produit scalaire  $\langle u_i, u_j \rangle$  à l'aide des coefficients de la matrice  $M$  et en déduire que  $G(u_1, \dots, u_n) = {}^t M M$ .
2. Montrer que la matrice  $G(u_1, \dots, u_n)$  est symétrique et positive, et que si la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre alors la matrice  $G(u_1, \dots, u_n)$  est définie positive.
3. On note  $A_n$  la matrice  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $a_{i,j} = \min(i, j)$ .
  - (a) Exprimer  $A_n$  comme une matrice de Gram et en déduire qu'elle est symétrique définie positive, puis expliciter une matrice  $R_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , triangulaire supérieure, telle que  $A_n = {}^t R_n R_n$ .
  - (b) On prend  $n = 4$  et on note  $X$ , (resp.  $Y$ , resp.  $Z$ ) le vecteur de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  de composantes  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  (resp. 1, 2, 3 et 4 resp.  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$ ). Résoudre les systèmes linéaires  ${}^t R_4 Z = Y$  et  $R_4 X = Z$  puis en déduire la solution du système  $A_4 X = Y$ .

## Deuxième exercice

### Résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Justifier que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  les valeurs propres de  $A$  et on suppose que  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ ; préciser les valeurs de  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ .
2. Pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ , déterminer le vecteur propre  $e_k$  de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$  et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.

3. Justifier que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et écrire la matrice  $\Delta$  de  $u$  relativement à cette base.
4. Déterminer une matrice  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A = P\Delta P^{-1}$  puis calculer  $P^{-1}$ .
5. Soit  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice vérifiant  $B^2 + 3B = A$ ; on note  $v$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $B$ .
  - (a) Justifier que  $v^2 + 3v = u$ .
  - (b) Vérifier que  $uv = vu$  et en déduire que, pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ , le vecteur  $v(e_k)$  est colinéaire à  $e_k$ ; conclure que la matrice  $V$  de  $v$  relativement à la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est diagonale.
  - (c) On pose  $V = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Exprimer  $\Delta$  en fonction de  $V$  puis déterminer les valeurs possibles de  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  ainsi que celles de la matrice  $B$ .
6. Combien de solutions l'équation  $X^2 + 3X = A$  admet-elle dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ?

## Problème

Dans ce problème,  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  désigne l'espace vectoriel des applications de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{D}$  l'opérateur de dérivation défini sur cet espace vectoriel par :  $\mathcal{D}(f) = f', f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ; de même,  $\mathbb{C}[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes à une indéterminée et  $D$  l'opérateur de dérivation défini sur cet espace vectoriel par :  $D(P) = P', P \in \mathbb{C}[X]$ .

On rappelle que  $\mathcal{D}$  et  $D$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $\mathbb{C}[X]$  respectivement.

Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  est un polynôme à coefficients complexes de degré  $n \geq 1$ , on lui associe l'équation différentielle linéaire homogène notée  $(\mathcal{E}_P)$  suivante :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{\mathcal{E}_P}$$

Par "solution de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_P)$ " on fait référence à toute application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n$ -fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_n f^{(n)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Comme  $a_n \neq 0$ , il est évident que toute solution de  $(\mathcal{E}_P)$  est un élément de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . L'ensemble de ces solutions est donc un sous-espace vectoriel complexe de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

### 1<sup>ère</sup> Partie

#### Résultats préliminaires

**1.1.** Soient  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $R = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $n \geq 0$ .

**1.1.1.** On suppose qu'il existe un polynôme  $R_1 \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $R_1' + \alpha R_1 = R$ .

**1.1.1.1.** En utilisant une propriété relative au degré de la somme de deux polynômes, montrer que le degré de  $R_1$  est égal à  $n$ .

**1.1.1.2.** On décrit donc  $R_1 = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  avec  $b_n \neq 0$ . Expliciter les relations liant les coefficients  $a_k$  et  $b_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , et préciser la matrice  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $Y = TX$  où  $X$  (resp.  $Y$ ) est le vecteur de  $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$  de composantes  $b_0, b_1, \dots, b_n$  (resp.  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ).

**1.1.2.** Montrer que la matrice  $T$  est inversible et en déduire l'existence et l'unicité du polynôme  $R_1 \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant  $R_1' + \alpha R_1 = R$ ; en plus  $R_1$  a le même degré que  $R$ .

**1.2.** Soit  $\lambda$  un nombre complexe et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue.

**1.2.1.** Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y' - \lambda y = g$  sont de la forme  $x \mapsto G(x) e^{\lambda x}$  où  $G$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto g(x) e^{-\lambda x}$ .

**1.2.2.** Dans cette question, on pose  $g(x) = R(x) e^{\lambda x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , où  $R \in \mathbb{C}[X]$ . Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y' - \lambda y = g$  sont de la forme  $x \mapsto S(x) e^{\lambda x}$  où  $S$  est un polynôme à coefficients complexes dont le polynôme dérivé est égal à  $R$ .

**1.2.3.** Dans cette question, on pose  $g(x) = R(x) e^{\mu x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , où  $\mu$  désigne un complexe **distinct** de  $\lambda$  et  $R$  un polynôme non nul à coefficients complexes. Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y' - \lambda y = g$  sont de la forme  $x \mapsto R_1(x) e^{\mu x} + c e^{\lambda x}$ , où  $R_1$  est l'unique polynôme à coefficients complexes vérifiant  $R_1' + (\mu - \lambda)R_1 = R$  et  $c$  un paramètre complexe.

## 2<sup>ème</sup> Partie

### Expression des solutions de l'équation différentielle ( $\mathcal{E}_P$ )

**2.1. Cas où  $P = (X - \lambda)^n$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$**

Montrer que dans ce cas,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est solution de l'équation différentielle ( $\mathcal{E}_P$ ) si, et seulement si, il existe un polynôme  $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$  tel que  $f(x) = R(x) e^{\lambda x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . On pourra calculer la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $h : x \mapsto e^{-\lambda x} f(x)$ .

**2.2.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $Q \in \mathbb{C}[X]$ ,  $Q \neq 0$ ; on pose  $P = (X - \lambda)Q$  et on écrit

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k.$$

**2.2.1.** Montrer que les coefficients de  $P$  et  $Q$  vérifient les relations

$$a_0 = -\lambda b_0, \quad a_n = b_{n-1} \quad \text{et} \quad a_k = b_{k-1} - \lambda b_k, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

**2.2.2.** Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . À l'aide des relations précédentes montrer, en opérant un changement d'indice, que  $\sum_{k=0}^{n-1} b_k (f' - \lambda f)^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}$ , puis en déduire que  $f$  est solution de l'équation différentielle ( $\mathcal{E}_P$ ) si, et seulement si,  $(f' - \lambda f)$  est solution de ( $\mathcal{E}_Q$ ).

**2.3.** En faisant un raisonnement par récurrence, retrouver le résultat de la question 2.1. ci-dessus sans avoir recours à un calcul de dérivée  $n$ -ième.

**2.4. Un exemple :** Déterminer les entiers qui sont racines du polynôme  $P_1 = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$  puis le factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$ ; donner l'expression des solutions de l'équation différentielle ( $\mathcal{E}_{P_1}$ ).

**2.5. Cas général :** On suppose ici que le polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  s'écrit  $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$ , où  $r$  est un entier  $\geq 2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  sont des complexes deux à deux distincts, et  $m_1, m_2, \dots, m_r$  des entiers naturels non nuls.

En faisant un raisonnement par récurrence sur le degré de  $P$ , montrer que les solutions de l'équation différentielle ( $\mathcal{E}_P$ ) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \sum_{k=1}^r R_k(x) e^{\lambda_k x}$ , où  $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$  pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ . On pourra exploiter le résultat de la question 2.2.2.

**2.6.** Montrer, en précisant l'énoncé du théorème utilisé, que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  les solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_P)$  ont toujours la forme des solutions trouvées dans la question 2.5. précédente. Quelle est alors la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des solutions de  $(\mathcal{E}_P)$  ?

**2.7. Un autre exemple :** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_{P_2})$  où  $P_2 = X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1$ , sachant que 1 est racine triple de  $P_2$ .

### 3<sup>ème</sup> Partie

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **dérivable** ; pour tout réel  $\tau$ , on désigne par  $f_\tau$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f_\tau(x) = f(x + \tau)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ; on note  $E_f = \text{Vect}(\{f_\tau ; \tau \in \mathbb{R}\})$  le sous-espace vectoriel réel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $f_\tau$  lorsque  $\tau$  décrit  $\mathbb{R}$ .

#### 3.1. Exemples

**3.1.1.** On considère la fonction  $h_1 : x \mapsto x e^{2x}$ . Montrer que  $E_{h_1}$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions  $h_1$  et  $h_2 : x \mapsto e^{2x}$ . Quelle est sa dimension ?

**3.1.2.** On considère la fonction  $h_3 : x \mapsto \cos x e^{3x}$ . Montrer que  $E_{h_3}$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions  $h_3$  et  $h_4 : x \mapsto \sin x e^{3x}$ . Quelle est sa dimension ?

*On se propose dans la suite de cette partie de caractériser  $f$  pour que  $E_f$  soit de dimension 2. Pour cela, on suppose donc que  $E_f$  est de dimension finie 2 et on note  $(\varphi_1, \varphi_2)$  **une base de  $E_f$** .*

**3.2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :  $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**3.2.1.** Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n \in E_f$  et justifier qu'il existe des réels  $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}$  tels que  $g_n = \alpha_{1,n}\varphi_1 + \alpha_{2,n}\varphi_2$ . (1)

**3.2.2.** Montrer que, pour tout réel  $x$ , la suite réelle  $(g_n(x))_{n \geq 1}$  converge vers  $f'(x)$ .

**3.3.** On veut montrer que  $f' \in E_f$ , pour cela on va étudier les suites  $(\alpha_{1,n})_{n \geq 1}$  et  $(\alpha_{2,n})_{n \geq 1}$ .

**3.3.1.** Justifier que la fonction  $\varphi_1$  n'est pas identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$  et en déduire qu'il existe  $a_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi_1(a_1) \neq 0$ . Montrer de plus que la fonction  $x \mapsto \varphi_2(x)\varphi_1(a_1) - \varphi_1(x)\varphi_2(a_1)$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , n'est pas identiquement nulle puis en déduire qu'il existe  $a_2 \in \mathbb{R}$  tel que la matrice  $M = \begin{pmatrix} \varphi_1(a_1) & \varphi_2(a_1) \\ \varphi_1(a_2) & \varphi_2(a_2) \end{pmatrix}$  soit inversible.

**3.3.2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Z_n = \begin{pmatrix} g_n(a_1) \\ g_n(a_2) \end{pmatrix}$  et  $Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,n} \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $Z_n = MY_n$  et en déduire l'expression de  $\alpha_{1,n}$  et  $\alpha_{2,n}$  en fonction de  $g_n(a_1)$ ,  $g_n(a_2)$  et des coefficients de la matrice  $M$ .

**3.3.3.** Montrer alors que les suites  $(\alpha_{1,n})_{n \geq 1}$  et  $(\alpha_{2,n})_{n \geq 1}$  sont convergentes puis en déduire que  $f' \in E_f$ . On pourra exploiter la relation (1) et faire tendre  $n$  vers  $+\infty$ .

**3.4.** Montrer plus généralement que si  $h \in E_f$  alors  $h$  est dérivable et  $h' \in E_f$ , puis en déduire que  $E_f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**3.5.** Justifier que  $(f, f', f'')$  est une famille liée de  $E_f$  et en déduire que la fonction  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants. En déduire une expression de  $f$ , selon les cas, puis vérifier que ces fonctions répondent bien à la question.

FIN DE L'ÉPREUVE