

## Proposition de correction de PH-I TSI Session 2018

### I. Questions de cours :

#### I.1. Généralités

I.1.1. la densité volumique de courant:

$$\rho = \frac{dQ}{dv} = nq$$

I.1.2. l'expression de la charge

$$d^3Q = \rho(M)dv = \rho(M)\vec{v}d\vec{s}dt$$

I.1.3. l'expression de la charge  $\vec{J}(M)$

$$\vec{J} = \rho(M)\vec{v} = nq\vec{v}$$

I.1.4. l'intensité I dans le conducteur

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint \vec{J}(M)d\vec{s}$$

#### I.2. Bilan de charge

I.2.1. on a :

$$dQ_{surf} = [J(x) - J(x + dx)]Sdt = -\frac{\partial J}{\partial t}Sdxdt = -\frac{\partial J}{\partial t}dvdt$$

I.2.2. la variation de la charge  $dQ$  :

$$dQ_{surf} = [Q(t + dt) - Q(t)] = [\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]dv = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}dvdt$$

I.2.3. Bilan local de la charge :

à partir des deux bilans on trouve :

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Par généralisation dans les trois directions on trouve la forme locale de la conservation de la charge

$$\text{div} \vec{J}(M) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$$

I.2.4. Les deux relations de Maxwell sont :

Maxwell-Gauss:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Maxwell-Ampere :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

a partir des deux equations on a :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = 0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t}$$

donc on trouve la forme locale précédente :

$$\operatorname{div} \vec{j}(M) + \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0$$

### I.3. Loi d'Ohm locale

I.3.1. on applique le P.F.D. à un electron de masse m :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

donc l'équation différentielle du mouvement est :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{e}{m} \vec{E}$$

la résolution de cette equation donne la solution sous la forme suivante :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

I.3.2. En regime permanent la vitesse limite est :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

donc :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

I.3.3. La loi d'Ohm locale est :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

donc la conductivite électrique est donnée par l'expression :

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

## I.4. Résistances des appareils de mesure

### I.4.1. Calcul de la résistance du galvanomètre

#### Définition

La résistance d'un conducteur de longueur  $L$ , section  $S$  et résistivité  $\rho$  est :

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

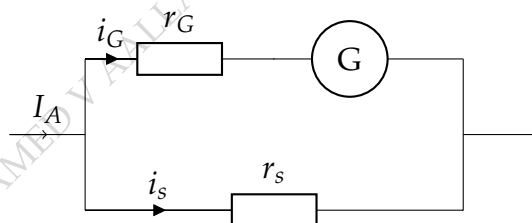
donc

$$r_G = N\rho \frac{4l}{S} = 16N\rho \frac{l}{\pi d^2}$$

$$r_G = 16N\rho \frac{l}{\pi d^2} = 815\Omega$$

### I.4.2. Ampèremètre

calcul de la résistance  $r_s$



on utilise diviseur de courant on trouve :

$$i_G = \frac{r_s}{r_s + r_G} I_A$$

Donc :

$$m = \frac{I_{Amax}}{i_{Gmax}} = 1 + \frac{r_G}{r_s}$$

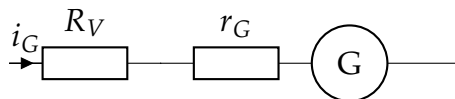
Ainsi

$$r_s = \frac{r_G}{m-1} \simeq 0,815\Omega$$

$r_G$  et  $r_s$  sont en parallèles donc

$$r_A = \frac{r_G r_s}{r_G + r_s} = \frac{r_G}{m} = 0,815\Omega$$

### I.4.3. Volt-mètre



à partir du schéma équivalent on :

$$U = (R_V + r_G) i_G = k i_G$$

donc :

$$k = R_V + r_G$$

ainsi :

$$R_V = \frac{U_{max}}{i_{Gmax}} - r_G = 99,18k\Omega$$

I.4.4.1. à partir du montage courte dérivation on a :

$$R_c = \frac{R \cdot R_V}{R + R_V} = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_V}}$$

Puisque  $R_V \gg R$  on fait D.L.1

$$R_c = R \left(1 - \frac{R}{R_V}\right)$$

donc

$$\boxed{\varepsilon_c = \left| \frac{R_c - R}{R} \right| = \frac{R}{R_V}}$$

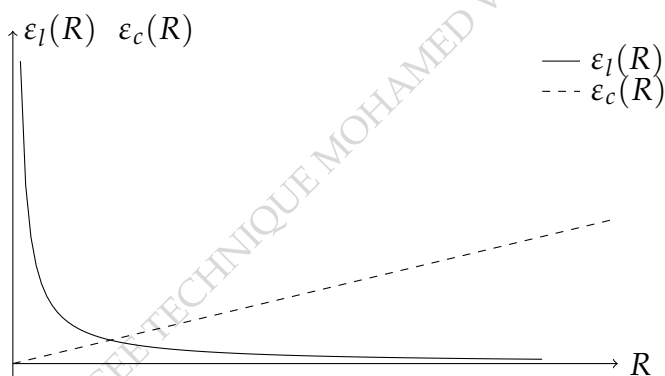
à partir du montage longue dérivation on a :

$$R_l = R + r_A$$

Puisque  $R \gg r_A$  on a :

$$\boxed{\varepsilon_l = \left| \frac{R_l - R}{R} \right| = \frac{r_A}{R}}$$

les graphes de  $\varepsilon_c(R)$  et  $\varepsilon_l(R)$



Pour les faibles résistances,  $R/R_V$  est plus petit que  $r_A/R$  : il faut utiliser le montage AVAL  
 Pour les grandes résistances, c'est l'inverse il faut utiliser le montage AMONT.

I.4.4.2 Les erreurs introduites sont des erreurs systématiques. Ces erreurs sont par défaut pour la courte dérivation et par excès pour la longue dérivation

## II. Mésure de l'intensité de courant

### II.1. Principe d'un galvanomètre

II.1.1. La résultante de Laplace sur le cadre pour les  $MN$  et  $QP$  on  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  sont parallèles donc la force de Laplace est nulle  
 sur les deux autres cotés on a :

$$\vec{F}_{QM} = N_0 i \overrightarrow{QM} \wedge \vec{B}_0 = N_0 i h B_0 \vec{n}$$

et

$$\vec{F}_{NP} = N_0 i \overrightarrow{NP} \wedge \vec{B}_0 = -N_0 i h B_0 \vec{n}$$

avec

$$\vec{n} = \vec{u}_z \wedge \vec{u}$$

et

$$\vec{S} = S\vec{n}$$

donc la résultante des forces de Laplace sur la bobine est :

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{QM} + \vec{F}_{NP} = 0$$

### II.1.2. Le moment des forces de Laplace sur la bobine

$$\vec{M}_L = \vec{M}_O(\vec{F}_{QM}) + \vec{M}_L(\vec{F}_{NP})$$

$$\vec{M}_L = \vec{OG}_4 \wedge \vec{F}_{QM} + \vec{OG}_2 \wedge \vec{F}_{NP}$$

$$\boxed{\vec{M}_L = -i2ahN_oB_o\vec{u}_z = -\varphi i\vec{u}_z}$$

### II.1.3. Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{M}_L + \vec{M}_r$$

donc

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_z = -C\theta \vec{u}_z - i\varphi \vec{u}_z$$

ainsi l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  est :

$$\boxed{J \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = -i\varphi}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = -\frac{i\varphi}{C}}$$

### II.1.4. La puissance fournie par le couple $\vec{M}_L$ est :

$$P = \vec{M}_L * -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z = i \frac{d\theta}{dt} \varphi = ei$$

Le signe (-) provient du fait que la rotation se fait dans le sens opposée de  $\theta$

$$\boxed{e = \varphi \dot{\theta}}$$

Remarque :

cas de l'induction de Lorenz :  $e = N \int \vec{E}_m(M) d\vec{l}$  avec  $\vec{E}_m(M) = \vec{v}_e \wedge \vec{B}_0$

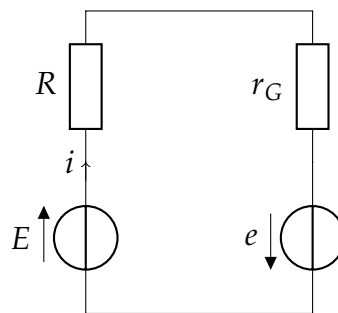
Pour les branches  $MN$  et  $PQ$ ,  $\vec{E}_m(M)$  est normal au circuit donc  $e$  est nulle, mais il est parallèle pour les branches  $QM$  et  $NP$ , dans la *f.e.m.* est :

$$e = N \left( \int_Q^M \vec{E}_m(M) d\vec{l} + \int_N^P \vec{E}_m(M) d\vec{l} \right) = 2ahNB_o\dot{\theta} = \varphi \dot{\theta}$$

### II.1.5. Le circuit électrique équivalent est :

à partir du schéma équivalent et l'expression de  $e$  on a :

$$i = \frac{E+e}{R+r_G} = \frac{E+\dot{\theta}\varphi}{R+r_G}$$



II.1.6. L'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{C^2}{J(R+r_G)}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = -\frac{E\varphi}{J(R+r_G)}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega_0^2\theta_{eq}$$

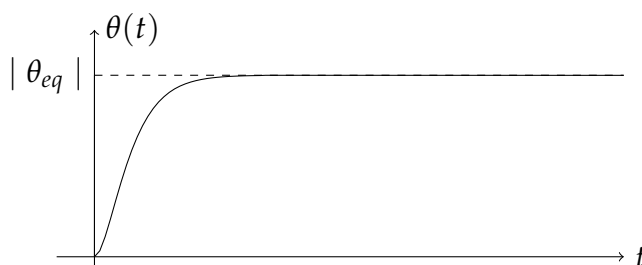
avec

$$\tau = \frac{2J(R+r_G)^2}{\varphi} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J} \quad ; \quad \theta_{eq} = -\frac{E\varphi}{C(R+r_G)}$$

L'équation d'un oscillateur amorti, la forme générale de  $\theta(t)$  est la somme de la solution homogène  $\theta(t)_h$  et la solution particulière  $\theta_p$  tel que la forme de  $\theta(t)_h$  dépend du signe de  $\Delta' = \frac{1}{\tau} - \omega_0^2$  donc  $\theta(t) = \theta_{eq} + \theta(t)_h$

- Si  $\Delta' < 0$  : régime pseudo périodique :  $\theta(t) = \theta_{eq} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi)$
- Si  $\Delta' > 0$  : régime apériodique :  $\theta(t) = \theta_{eq} + Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}$
- Si  $\Delta' = 0$  : régime critique :  $\theta(t) = \theta_{eq} + (At + B)e^{-\omega_0 t}$

II.1.7. On a  $\theta_{eq} = -\frac{E\varphi}{C(R+r_G)}$  et on a à l'équilibre  $i = \frac{E}{(R+r_G)}$  donc  $\theta_{eq} = -\frac{i\varphi}{C}$  donc  $i$  est proportionnelle à  $\theta_{eq}$  pour retrouver cette valeur il faut que le régime transitoire s'annule très vite donc il faut se placer en régime critique.



## II.2. Pince ampèrétrique

II.2.1. On a invariance par rotation autour de l'axe  $oz$ , par translation le long de  $z$  de la distribution de courant et tout plan diamétral est un plan de symétrie de la distribution de courant donc :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$

II.2.2. Théorème d'Ampère appliqué à un contour circulaire de rayon  $r$  :

$$\oint \vec{B}(M) d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}$$

on trouve

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

II.2.3. Le flux à travers le tore :  $\Phi = N\Phi(\text{spire}) = N \iint \vec{B}(M) d\vec{s}$  on trouve :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0 - \frac{a}{2}}\right)$$

le coefficient d'inductance mutuelle est défini par :  $\Phi = MI$  donc :

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0 - \frac{a}{2}}\right)$$

II.2.4. Le fil est traversé par un courant variable donc le champ  $B(t)$  est variable donc on a l'induction de Neumann ce qui entraîne la création de courant variable  $i(t)$  dans le tore

II.2.5. Le flux propre à travers le tore :  $\Phi_p = N\Phi(\text{spire}) = N \iint \vec{B}_p(M) d\vec{s}$   
la distribution de courant est invariant par rotation autour de l'axe  $oz$  et tout plan diamétral est un plan de symétrie de la distribution de courant donc :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$$

théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B}_p(M) d\vec{l} = \mu_0 N i(t)$$

on trouve :

$$\vec{B}_p(M) = \frac{N \mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Donc le flux propre est :

$$\Phi_p = \frac{\mu_0 a N^2 i(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0 - \frac{a}{2}}\right)$$

II.2.6. le coefficient d'inductance mutuelle est défini par :

$\Phi_p = Li$  donc le flux totale est :  $\Phi_t = Li(t) + MI$

D'après la loi de Faraday on a  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  avec  $e = Ri$  on a :

$$e = Ri = -L \frac{di}{dt} - M \frac{dI}{dt}$$

En notation complexe on trouve la relation :

$$i = -\frac{Mj\omega I}{R + jL\omega}$$

II.2.7. Pour  $N$  très grand et en module on a :

$$i \approx \frac{M}{L} I \approx \frac{I}{N}$$

ce dispositif permet de mesurer des courants intenses puisque  $N$  est grand, son avantage principale est la mesure de  $I$  sans ouverture du circuit

### III. Exemple d'un capteur de température

III.1. L'expression de la tension  $V_S$ :

on utilise le diviseur de courant on trouve :

$$V_B = R_2 I_2 = \frac{R_2(R_3 + R'_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R'_4} I_0$$

Avec  $R'_4 = R_4 + R_P$  et

$$V_D = R_3 I_3 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + R'_4} I_0$$

Donc  $V_S = V_D - V_B$ , on trouve :

$$V_S = \frac{R_1 R_3 - R_2(R_4 + R_P)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_P} I_0$$

III.2. A  $t = 0^\circ\text{C}$ , le pont est équilibré donc  $V_S = 0$  donc  $R_1 R_3 - R_2(R_{4,0} + R_{P,0}) = 0$  Ainsi :

$$R_{4,0} = \frac{R_1 R_3}{R_2} - R_{P,0} = R_1 - R_{P,0} = 900\Omega$$

III.3. On remplace  $R_P$  par son expression et on utilise la condition d'équilibrage du pont  $R_{4,0}$  on trouve :

$$V_S(t) = \frac{-R_2 R_{P,0} \alpha t}{4R_1 + R_{P,0} \alpha t} I_0 = \frac{-t}{10^4 + t}$$

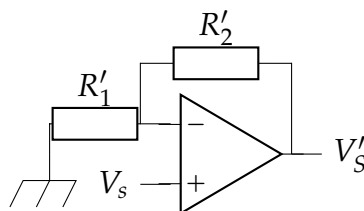
III.4. Pour  $t = 100^\circ\text{C}$  dans le dénominateur  $10^4 \gg 10^2$  ainsi :

$$V_S(t) = -10^{-4} t$$

III.5. On peut utiliser le montage A.O. non inverseur on a :

$$V'_S(t) = \left(1 + \frac{R'_2}{R'_1}\right) V_S(t)$$

avec :  $R'_2 = 9\text{k}\Omega$ ,  $R'_1 = 1\text{k}\Omega$  donc  $V'_S(t) = 10V_S(t)$



#### Remarque

Je propose un montage A.O. inverseur pour éliminer le signe (-) de la tension  $V_S(t)$  avec :  $R'_2 = 10\text{k}\Omega$ ,  $R'_1 = 1\text{k}\Omega$  donc  $V'_S(t) = -10V_S(t)$

III.6. On a  $V'_S(t = 100^\circ\text{C}) = -0,1\text{V}$  le quantum est :  $q = \frac{\Delta V'_S}{2^n - 1} = 0,39\text{mV}$   
Donc

$$\Delta t = 10^3 q = 0,39^\circ\text{C} \simeq 0,4^\circ\text{C}$$



## IV. Étude d'un capteur de déplacement :

### IV.1. Expression de la capacité d'un condensateur plan :

IV.1. Invariance par translation selon  $x$  et  $y$ , ( $xoz$ ) et ( $yoz$ ) deux plans de symétries de la distribution de charge donc

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$$

IV.2. Le champ crée par un plan infini est :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 l^2} \vec{u}_z$$

IV.3. La circulation de  $\vec{E}(M)$  entre les armatures :

$$V = V_{P_1} - V_{P_2} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 l^2} e$$

IV.4. L'expression de la capacité  $C$  est :

$$C = \frac{Q_1}{V_{P_1} - V_{P_2}} = \frac{\varepsilon_0 l^2}{e}$$

### IV.2. Capteur de déplacement :

IV.2.1. Les expressions des capacités initiales :

$$C_{12,0}(x=0) = \frac{\varepsilon_0 l^2}{2e}$$

$$C_{13,0}(x=0) = \frac{\varepsilon_0 l^2}{2e}$$

$$C_0 = C_{13,0}(x = \frac{l}{2}) = \frac{\varepsilon_0 l^2}{e}$$

IV.2.2. L'armature  $P_1$  est translaté de  $x$  :

$$C_{12}(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{e} (\frac{l}{2} - x) = C_0 (\frac{1}{2} - \frac{x}{l})$$

$$C_{13}(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{e} (\frac{l}{2} + x) = C_0 (\frac{1}{2} + \frac{x}{l})$$

IV.2.3. L'expression de  $v_s(t)$  :

On utilise le diviseur de tension aux points  $B$  et  $D$  :

$$v_B = \frac{R}{R+R} v_e = \frac{v_e}{2}$$

$$v_D = \frac{Z_{C12}}{Z_{C12} + Z_{C13}} v_e$$

$$v_D = \frac{C_{13} v_e}{C_{12} + C_{13}}$$

Donc  $v_s(t) = v_D - v_B$ , on trouve :

$$v_s(t) = \frac{C_{13} - C_{12}}{2(C_{12} + C_{13})} v_e$$

on remplace par les expressions de  $C_{12}$  et  $C_{13}$  on trouve l'expression suivant :

$$v_s(t) = \frac{x}{l} v_e$$

IV2.4. Le spectre de Fourier de  $v_s(t)$  :

$$v_s(t) = \frac{X_m V_m}{l} [\cos(\omega t) \times \cos(\omega_g t)]$$

donc :

$$v_s(t) = \frac{X_m V_m}{2l} [\cos((\omega_g - \omega)t) + \cos((\omega_g + \omega)t)]$$

en effet le spectre de  $v_s(t)$  contient les deux pulsations  $\omega_g - \omega$  et  $\omega_g + \omega$

IV2.5. Le montage de la figure 8a :

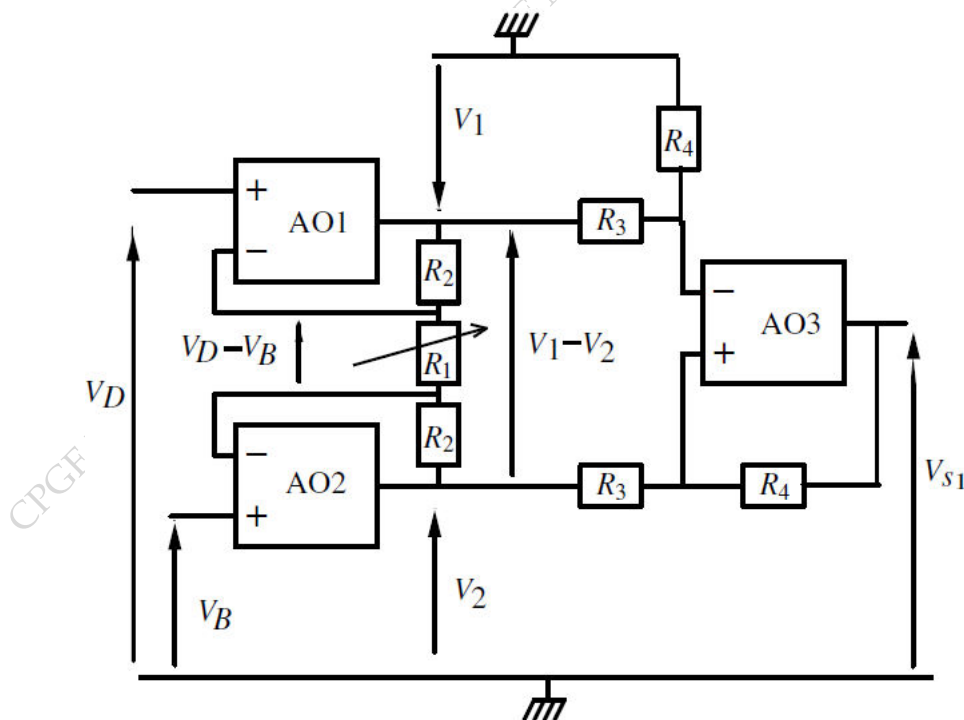


Figure 1: Circuit de conditionnement du signal util

#### Remarque

Pour l'amplificateur AO2, il me semble une erreur de signe : il faut inverser le signe des deux entrées pour avoir un fonctionnement linéaire, ce que j'ai pris pour résoudre la question

Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont parcourus par le même courant  $i$  donc

$$V_1 - V_2 = (R_1 + 2R_2)i$$

et si l'amplificateur AO2 fonctionne en régime linéaire on a :

$$V_D - V_B = v_s(t) = R_1 i$$

Donc :

$$V_1 - V_2 = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)v_s(t)$$

Pour l'amplificateur AO3, on a fonctionnement linéaire donc :  $V^- = V^+$ , on utilise Millman avec la condition  $R_3 = R_4$ , on trouve :

$$v_{s1}(t) = V_1 - V_2$$

Ainsi on trouve la relation entre  $v_{s1}(t)$  et  $v_s(t)$  :

$$v_{s1}(t) = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)v_s(t)$$

Donc le rôle du montage est l'amplification de  $v_s(t)$

IV2.6. Les expressions des tensions  $v_{s2}(t)$  et  $v_{s3}(t)$  :  $v_{s2}(t) = k \times v_{s1}(t) \times v_e(t)$  On trouve :

$$v_{s2}(t) = \frac{kX_m V_m^2}{2l} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) [\cos(\omega t) + \cos(\omega t) \times \cos(2\omega_g t)]$$

donc :

$$v_{s2}(t) = \frac{kX_m V_m^2}{2l} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{2}(\cos((2\omega_g - \omega)t) + \cos((2\omega_g + \omega)t))\right]$$

on pose  $\alpha = \frac{kX_m V_m^2}{2l} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)$  donc :

$$v_{s2}(t) = \alpha \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{2}(\cos((2\omega_g - \omega)t) + \cos((2\omega_g + \omega)t))\right]$$

Le filtre passe bas de fréquence de coupure  $\omega_c \ll \omega_g$  donc :

$$v_{s3}(t) = \alpha H(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec

$$\varphi = \arg(H)$$

La chaîne n'est pas linéaire car elle contient le multiplieur qui fait enrichir le spectre par d'autres harmoniques

IV2.7. Schéma d'un filtre passe bas passif et sa pulsation de coupure :

la fonction de transfert du filtre

est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$$

la fréquence de coupure est :

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

