Exercice : Oscillateurs élastiques libres non amortis

1- Oscillateur élastique :

1.1- $\vec{T} = -K(l - l_0)\vec{u_z} \Rightarrow \boxed{\vec{T} = -K(z - l_0)\vec{u_z}}$

1.2- P.F.D : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = M\ddot{z}\vec{u_z}$

$\Rightarrow -K(z - l_0)\vec{u_z} + Mg\vec{u_z} = M\ddot{z}\vec{u_z} \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{K}{M}\left(z - l_0 - \frac{Mg}{K}\right) = 0}$

1.3- $z_c = l_0 + \frac{Mg}{K} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{K}{M}(z - z_c) = 0$

on pose $Z = z - z_c \Rightarrow \ddot{Z} = \ddot{z} \Rightarrow \ddot{Z} + \frac{K}{M}Z = 0$

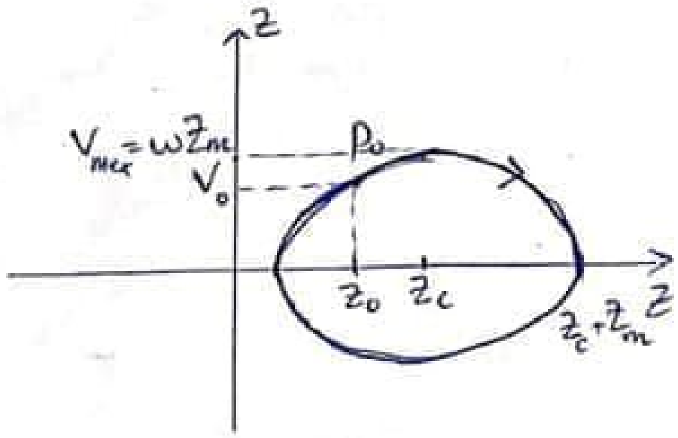
solution $Z(t) = Z_M \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{z(t) = z_c + Z_m \cos(\omega t + \varphi)}$

conditions initiales : $\begin{cases} z(0) = z_c + Z_m \cos\varphi = z_0 < z_c \\ \dot{z}(0) = -\omega Z_m \sin(\varphi) = v_0 \end{cases}$

$\begin{cases} Z_m \cos\varphi = z_0 - z_c \\ Z_m \sin\varphi = -\frac{v_0}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_m = \sqrt{(z_0 - z_c)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ tg\varphi = \frac{v_0}{\omega(z_c - z_0)} \end{cases}$

1.4- $\begin{cases} z(t) = z_c + Z_m \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{z}(t) = -\omega Z_m \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \frac{(z - z_c)^2}{Z_m^2} + \frac{\dot{z}^2}{(\omega Z_m)^2} = 1$

équation d'une ellipse centré sur $C(z_c, 0)$ dans le plan de phase $(0, z, \dot{z})$



(suite exercice)

2.3 - si $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2 = K$, on pose $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\omega_c^2 = \frac{K_c}{m}$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \left(\frac{K}{m} + \frac{K_c}{m}\right) x_1 - \frac{K_c}{m} x_2 = C_1 \\ \ddot{x}_2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{K_c}{m}\right) x_2 - \frac{K_c}{m} x_1 = C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix} \begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_0^2 + \omega_c^2) x_1 - \omega_c^2 x_2 = C_1 \\ \ddot{x}_2 + (\omega_0^2 + \omega_c^2) x_2 - \omega_c^2 x_1 = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (I) + II \Rightarrow \\ (I) - II \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} (\ddot{x_1 + x_2}) + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_1 + x_2) - \omega_c^2 (x_1 + x_2) = C_1 + C_2 \\ (\ddot{x_1 - x_2}) + (\omega_0^2 + \omega_c^2)(x_1 - x_2) + \omega_c^2 (x_1 - x_2) = C_1 - C_2 \end{cases}$$

on introduit le changement de variables $\alpha = x_1 + x_2$ et $\beta = x_1 - x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\alpha} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)\alpha - \omega_c^2 \alpha = C_1 + C_2 \\ \ddot{\beta} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)\beta + \omega_c^2 \beta = C_1 - C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = C_1 + C_2 \\ \ddot{\beta} + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)\beta = C_1 - C_2 \end{cases}$$

se sont deux équation différentielles de solutions sinusoïdales $\begin{cases} \alpha(t) = a + \alpha_m \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) \\ \beta(t) = b + \beta_m \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta) \end{cases}$

avec $\begin{cases} \omega_\alpha = \omega_0 \\ \omega_\beta = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \end{cases}$

2.4 - on a $\begin{cases} \alpha = x_1 + x_2 \\ \beta = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ x_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left(a + b + \alpha_m \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) + \beta_m \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta)\right) \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(a - b + \alpha_m \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) - \beta_m \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta)\right) \end{cases}$$

1.5 -

1.5.1 - Théorème d'énergie cinétique : $\Delta E_c = W(\vec{P})$

$\frac{1}{2} m' v_0'^2 - 0 = m' g h \Rightarrow \boxed{v_0' = \sqrt{2gh}}$

1.5.2 - En appliquant la conservation de l'énergie la quantité du mouvement : $\vec{p}(0^-) = \vec{p}(0^+) \Rightarrow \vec{p}' + \vec{p} = \vec{P}$

$m' \vec{v_0}' + \vec{0} = M \vec{V_0} \Rightarrow \vec{V_0} = \frac{m'}{M} \vec{v}_0' = \frac{m'}{m' + \frac{m'}{4}} = \frac{4}{5} \vec{v}_0'$

$\Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{4}{5} v_0' = \frac{4\sqrt{2}}{5} \sqrt{gh}}$

1.5.3 - On revient à la même situation étudiée précédemment

donc $z(t) = z_e + z_m \cos(\omega t + \varphi)$

2 - Deux oscillateurs couplés par un ressort de raideur K_c :

2.1 - $\begin{cases} \vec{T_1} = -K_1 (l_{1e} + x_1 - l_{01}) \vec{u_x} \\ \vec{T_{1c}} = -K_c (l_{ce} - x_1 + x_2 - l_{0c}) (-\vec{u_x}) \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{T_2} = -K_2 (l_{2e} - x_2 - l_{02}) (-\vec{u_x}) \\ \vec{T_{2c}} = -K_c (l_{ce} - x_1 + x_2 - l_{0c}) \vec{u_x} \end{cases}$

2.2 - P.F.D sur S_1' et S_2' :

$\begin{cases} \text{sur } S_1' : \vec{T_1} + \vec{T_{1c}} + \vec{P_1} + \vec{R_1} = m_1 \vec{a_{G_1}} \\ \text{sur } S_2' : \vec{T_2} + \vec{T_{2c}} + \vec{P_2} + \vec{R_2} = m_2 \vec{a_{G_2}} \end{cases}$

projection sur $\vec{u_x}$:

$\begin{cases} -K_1 (l_{1e} + x_1 - l_{01}) + K_c (l_{ce} - x_1 + x_2 - l_{0c}) = m_1 \ddot{x}_1 \\ +K_2 (l_{2e} - x_2 - l_{02}) - K_c (l_{ce} - x_1 + x_2 - l_{0c}) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$

$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{K_1 + K_c}{m_1} x_1 - \frac{K_c}{m_1} x_2 = C_1 \quad \text{avec} \quad C_1 = K_1(l_{01} - l_{1e}) + K_c(l_{ce} - l_{0c}) \\ \ddot{x}_2 + \frac{K_1 + K_2}{m_2} x_2 - \frac{K_c}{m_2} x_1 = C_2 \quad \text{avec} \quad C_2 = K_2(l_{2e} - l_{02}) - K_c(l_{ce} - l_{0c}) \end{cases}$

c'est le système d'équations différentielles des mouvements de S_1' et S_2'

Problème I : étude d'un oscillateur électronique (4)

1 -

1.1 -

1.1 - 1 - $\underline{H}_2 = \dfrac{\underline{Z}_{C_1}}{\underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_{C_2}} = \dfrac{1/jC_1\omega}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}$

1.1.2 - nom du montage : diviseur de tension

intérêt : montage non résistif

1.2 -

1.2.1 - $(C_1 + C_2) // (L) \Rightarrow \dfrac{1}{\underline{Z}_e} = \dfrac{1}{\underline{Z}_L} + \dfrac{1}{\underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_{C_2}}$

$$\underline{Z}_e = \frac{jL\omega}{1 - L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\omega^2}$$

1.2.2 - $\dfrac{\underline{V}}{\underline{V}_1} = \dfrac{\underline{Z}_e}{R + \underline{Z}_e} = \dfrac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_e}} = \dfrac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + j\frac{C_1C_2R}{C_1+C_2}\omega}$

$\Rightarrow \underline{H}_2(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}} \times \dfrac{\underline{V}}{\underline{V}_1} = \underline{H}_1 \times \dfrac{\underline{V}}{\underline{V}_1} = \dfrac{C_2/C_1+C_2}{1 + j\frac{C_1C_2R\omega}{C_1+C_2} + \frac{R}{jL\omega}}$

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{a + \frac{1}{j\omega b} + j\omega d}$$

avec $\begin{cases} a = \dfrac{C_1+C_2}{C_2} : \text{sans dimension} \\ b = \dfrac{L}{R} \times \left(\dfrac{C_1+C_2}{C_2}\right)^{-1} : \text{temps} \\ d = \dfrac{RC_1}{2} : \text{temps} \end{cases}$

2 -

2.1 - hypothèses de l'O.A. parfait et en régime linéaire

$R_e \to \infty \Rightarrow i^+ = i^- = 0$ et $\varepsilon = v^+ - v^- = 0 \Rightarrow v^+ = v^-$

$R_s \to 0 \Rightarrow \mu_0 \to \infty$

2.2- on a $\underline{V}^- = \frac{R_1 \underline{V}_s + R_2 \underline{V}_e}{R_1 + R_2}$ /

$\underline{H}_2 = \frac{V^+}{V_s} \Rightarrow V^+ = \underline{H}_2 V_s$

$\left\{ \begin{array}{l} V^+ = V^- \\ \underline{H}_2 \underline{V}_s = \frac{R_1 V_s + R_2 V_e}{R_1 + R_2} \end{array} \right.$

$\Rightarrow (R_1 + R_2)\underline{H}_2 \underline{V}_s = R_1 V_s + R_2 \underline{V}_e$

$\Rightarrow \boxed{R_2 \underline{V}_e = [(R_1 + R_2)\underline{H}_2 - R_1]\underline{V}_s}$

2.3 - si $V_e = 0$, et puisque $V_s \neq 0 \Rightarrow (R_1 + R_2)\underline{H}_2 - R_1 = 0$

$\Rightarrow \underline{H}_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow \frac{1}{a + \frac{1}{j\omega b} + j\omega d} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$\Rightarrow aR_1 + R_2 = aR_1 + jR_1\left(\omega d - \frac{1}{\omega b}\right) \Rightarrow \omega d = \frac{1}{\omega b}$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{bd} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{bd}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1}{C_2}(C_1 + C_2)}}$

$(1-a)R_1 + R_2 + jR_1\left(\omega d - \frac{1}{\omega b}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow \boxed{R_1 C_1 = R_2 C_2}$ /

2.4 : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C_1 C_2 (C_1 + C_2)^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{LC'}}$ avec $\boxed{C' = C_1 C_2 (C_1 + C_2)^{-1}}$

3.

3.1 - $Z_{C//L} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$ 1 +1

$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{C_1 + C_2}{C_2} + \frac{R(C_1 + C_2)}{LC_2 j\omega} + jRC_1\omega\left[1 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}C\right]}$ 1 1

$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{a' + \frac{1}{j\omega b'} + j\omega d'}$

$\left\{ \begin{array}{ll} a' = \frac{C_1 + C_2}{C_2} & 1 \\ b' = \frac{L}{R}\frac{C_2}{C_1 + C_2} & 1 \\ d' = RC_1\left(1 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}C\right) = RC_1\left(1 + \frac{C(s)}{C'}\right) & 1 \end{array} \right.$

3.2 - de même $\omega_{0s} = \dfrac{1}{\sqrt{L'C'}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{LC_1C_2}{C_1+C_2}\left(1+\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2}C_0\right)}}$

$$\boxed{\omega_{0s} = \frac{1}{\sqrt{L\left(\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}+C_0\right)}}} \Rightarrow \boxed{\omega_{0s'} = \frac{1}{\sqrt{L(C'+C_0)}}}$$

3.3 -

3.3.1 - $s(t) = S_0 + \varepsilon_0 \cos(\alpha t) = S_0\left(1+\dfrac{\varepsilon_0}{S_0}\cos\alpha t\right)$

$\Rightarrow C(S) = AS^n = AS_0^n\left(1+\dfrac{\varepsilon_0}{S_0}\cos\alpha t\right)^n$

$\dfrac{\varepsilon_0}{S_0}\cos\alpha t \ll 1 \Rightarrow C(S) \simeq AS_0^n\left(1+\dfrac{n\varepsilon_0}{S_0}\cos\alpha t\right)$

D.L. à l'ordre 1

3.3.2 - $\omega_s = \dfrac{1}{\sqrt{L(C'+C_s)}} = \dfrac{1}{\sqrt{L\left(C'+C_0+\dfrac{n\varepsilon_0 C_0\cos\alpha t}{S_0}\right)}}$

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L(C'+C_0)}\sqrt{1+\dfrac{n\varepsilon_0C_0}{S_0(C'+C_0)}\cos\alpha t}} = \omega_0\left(1+\frac{n\varepsilon_0C_0}{S_0(C'+C_0)}\cos\alpha t\right)^{-1/2}$$

3.3.3 -

D.L à l'ordre 1

$\omega_s \simeq \omega_0\left(1-\dfrac{n\varepsilon_0C_0}{2S_0(C'+C_0)}\cos\alpha t\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \alpha} \text{ et } \boxed{\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{n\varepsilon_0C_0}{2S_0(C'+C_0)}}$$

4 - Etude d'un démodulateur de fréquence

4-1 - $V^+ = V^- \Rightarrow \dfrac{R_3u_1 + \underline{Z}_{C_3}u_e}{R_3+\underline{Z}_{C_3}} = 0$

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{-\underline{Z}_{C_3}}{R_3}u_e \Rightarrow \boxed{u_1 = -\dfrac{1}{jR_3C_3\omega}u_e}$

$V^+ = V^- \Rightarrow \dfrac{\underline{Z}_{C_3}u_2 + R_3u_e}{\underline{Z}_{C_3}+R_3} = 0 \Rightarrow u_2 = \dfrac{-R_3}{\underline{Z}_{C_3}}u_e$

$\Rightarrow \boxed{u_2 = -jR_3C_3\omega u_e}$

7

4.2- $U_3 = U_{1max} = \dfrac{U_m}{R_3C_3\omega}$

$U_4 = U_{2max} = R_3C_3\omega U_m$

4.3- $V^- = V^+ \Rightarrow \dfrac{R'U_s + R'U_3}{2R'} = \dfrac{R'U_4 + 0}{2R'}$

$U_s = U_4 - U_3 = R_3C_3\omega U_m - \dfrac{U_m}{R_3C_3\omega}$

$\Rightarrow \boxed{U_s = U_4 - U_3}$

4.4- $\boxed{U_s = U_m\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$\Rightarrow U_s = U_m\left(\dfrac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega_0 + \Delta\omega}\right)$

$U_s = U_m\left(1 + \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} - \left(1 + \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{-1}\right) = U_m\left(1+\gamma-(1+\gamma)^{-1}\right)$

$\gamma \ll 1$: DL. à l'ordre 2 : $(1+\gamma)^{-1} \simeq 1 - \gamma + \gamma^2$

$U_s \simeq U_m\left(\cancel{1} + \gamma - \cancel{1} + \gamma - \gamma^2\right) \simeq U_m\left(2\gamma - \gamma^2\right)$

4.5- $U_m \simeq 2U_m\gamma\left(1 - \dfrac{\gamma}{2}\right) = 2U_m\dfrac{\Delta f}{f_0}\left(1 - \dfrac{\gamma}{2}\right)$

$\dfrac{\gamma}{2} \ll 1 \Rightarrow \gamma < 0{,}02$

$U_m \simeq K\Delta f$ avec $\boxed{K = \dfrac{2U_m}{f_0}}$

Problème II : suspension d'une voiture ; couplages et oscillations :

II.1- Préliminaires :

1.1- $\sin\theta \simeq \theta = \frac{z_1 - z}{l_1} \Rightarrow \boxed{z_1 = z + l_1\theta}$

$\sin\theta \simeq \theta = \frac{z - z_2}{l_2} \Rightarrow \boxed{z_2 = z - l_2\theta}$

1.2- $\begin{cases} z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ \theta = \frac{z_1 - z_2}{l_1 + l_2} \end{cases}$

1.3- à l'équilibre

$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{P} = \vec{0} \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{N_1}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{N_2}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} N_1 + N_2 - P = 0 \\ N_1 l_1 - N_2 l_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow l_2 N_1 + l_1 N_1 - l_2 P = 0$

$\Rightarrow (l_1 + l_2) N_1 = l_2 P = l_2 Mg$

$\Rightarrow N_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} Mg \Rightarrow \boxed{N_1 = \lambda_1 Mg}$ et $N_2 = P - N_1 = Mg(1 - \lambda_1)$

$\Rightarrow \boxed{N_2 = \lambda_2 Mg}$

A.N : $N_1 = \frac{1,7}{3} \times 10^3 \times 10 \Rightarrow \boxed{N_1 = 5,66 \times 10^3 N}$

$N_2 = \frac{1,3}{3} \times 10^3 \times 10 \Rightarrow \boxed{N_2 = 4,33 \times 10^3 N}$

II.2

1 2.1- P.F.D : $\sum \vec{F} = M\vec{a}(G/R) \Rightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{P} = M\vec{a}(G/R)$

$M(\ddot{z}\vec{e_z} + \ddot{y}\vec{e_y}) = (N_1 - K_1 z_1 - h_1 \dot{z}_1)\vec{e_z} - Mg\vec{e_z} + (N_2 - K_2 z_2 - h_2 \dot{z}_2)\vec{e_z}$

selon $\vec{e_z}$: $M\ddot{z} + (K_1 z_1 + K_2 z_2) + (h_1 \dot{z}_1 + h_2 \dot{z}_2) = \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}_{=0} Mg$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{K_1 z_1 + K_2 z_2}{M} + \frac{h_1 \dot{z}_1 + h_2 \dot{z}_2}{M} = 0}$

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L_G}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{ex})$

1 $\vec{L_G} = I\dot{\theta}\vec{u_x} \Rightarrow \frac{d\vec{L_G}}{dt} = I\ddot{\theta}\vec{u_x}$

$\Rightarrow I\ddot{\theta}\vec{u_x} = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F_1}) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F_2}) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P})$ avec $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \vec{0}$

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F_1}) = \vec{GA_1} \wedge \vec{F_1} = l_1 \vec{u_{y'}} \wedge F_1 \vec{u_z} = l_1 F_1 \cos\theta \, \vec{u_x} \simeq l_1 F_1 \vec{u_x}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F_2}) = \vec{GA_2} \wedge \vec{F_2} = -l_2 \vec{u_{y'}} \wedge F_2 \vec{u_z} = -l_2 F_2 \cos\theta \, u_x \simeq -l_2 F_2 \vec{u_x}$$

9

$\Rightarrow$ proj. sur $\vec{u_x}$: $I\ddot{\theta} = l_1 F_1 - l_2 F_2$

$$\Rightarrow \frac{I}{l_1+l_2}(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) = l_1(N_1 - K_1 z_1 - h_1 \dot{z}_1) - l_2(N_2 - K_2 z_2 - h_2 \dot{z}_2)$$

$$\Rightarrow \frac{I}{l_1+l_2}\ddot{z}_1 + l_1 K_1 z_1 + l_1 h_1 \dot{z}_1 - \left(\frac{I}{l_1+l_2}\ddot{z}_2 + K_2 l_2 z_2 + l_2 h_2 \dot{z}_2\right) = \underbrace{l_1 N_1 - l_2 N_2}_{=0}$$

$$\Rightarrow \text{(II)} \quad \boxed{\frac{I}{l}\ddot{z}_1 + l_1 h_1 \dot{z}_1 + l_1 K_1 z_1 - \left(\frac{I}{l}\ddot{z}_2 + l_2 h_2 \dot{z}_2 + K_2 l_2 z_2\right) = 0}$$

$$\text{1) et (I)} \quad \boxed{\lambda_1 \ddot{z}_1 + \frac{h_1}{M}\dot{z}_1 + \frac{K_1}{M} z_1 + \lambda_2 \ddot{z}_2 + \frac{h_2}{M}\dot{z}_2 + \frac{K_2}{M} z_2 = 0}$$

2.2- en remplaçant $z_1 = z + l_1\theta$ et $z_2 = z - l_2\theta$, on obtient

$$\text{I)} \Rightarrow \lambda_1(\ddot{z} + l_1\ddot{\theta}) + \frac{h_1}{M}(\dot{z} + l_1\dot{\theta}) + \frac{K_1}{M}(z + l_1\theta) +$$
$$\lambda_2(\ddot{z} - l_2\ddot{\theta}) + \frac{h_2}{M}(\dot{z} - l_2\dot{\theta}) + \frac{K_2}{M}(z - l_2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)\ddot{z} + \frac{h_1 + h_2}{M}\dot{z} + \frac{K_1 + K_2}{M} z + \underbrace{(\lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2)}_{=0}\ddot{\theta}$$
$$+ \frac{K_1 l_1 - h_2 l_2}{M}\dot{\theta} + \frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{M}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{III} \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{h_1 + h_2}{M}\dot{z} + \frac{K_1 + K_2}{M} z + \frac{h_1 l_1 - h_2 l_2}{M}\dot{\theta} + \frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{M}\theta = 0}$$

$$\text{II)} \Rightarrow \frac{I}{l}(\ddot{z} + l_1\ddot{\theta}) + h_1 l_1(\dot{z} + l_1\dot{\theta}) + K_1 l_1(z + l_1\theta) - \frac{I}{l}(\ddot{z} - l_2\ddot{\theta})$$
$$- h_2 l_2(\dot{z} - l_2\dot{\theta}) - K_2 l_2(z - l_2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \text{IV} \quad \boxed{\begin{aligned}&(h_1 l_1 - h_2 l_2)\dot{z} + (K_1 l_1 - K_2 l_2) z + I\ddot{\theta} + (h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2)\dot{\theta} \\ &+ (K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2)\theta = 0\end{aligned}}$$

Suite problème II :

II 3-

3.1- $\underline{z}_1 = \underline{Z}_1 e^{j\omega t}$ et $\underline{z}_2 = \underline{Z}_2 e^{j\omega t}$

I) $\Rightarrow -\omega^2 \lambda_1 \underline{Z}_1 + j\omega \frac{h_1}{M} \underline{Z}_1 + \frac{K_1}{M} \underline{Z}_1 - \omega^2 \lambda_2 \underline{Z}_2 + \frac{h_2}{M} j\omega \underline{Z}_2 + \frac{K_2}{M} \underline{Z}_2 = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{K_1}{M} - \lambda_1 \omega^2 + j\omega \frac{h_1}{M} \right) \underline{Z}_1 + \left(\frac{K_2}{M} - \omega^2 \lambda_2 + j\omega \frac{h_2}{M} \right) \underline{Z}_2 = 0$

$\Rightarrow \left(a(\omega) + j b(\omega) \right) \underline{Z}_1 + \left(c(\omega) + j d(\omega) \right) \underline{Z}_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a(\omega) = \frac{K_1}{M} - \lambda_1 \omega^2 \ ; \ b(\omega) = \frac{h_1 \omega}{M} \\ c(\omega) = \frac{K_2}{M} - \lambda_2 \omega^2 \ ; \ d(\omega) = \frac{h_2 \omega}{M} \end{cases}$

II) $\left[l_1 K_1 - \frac{I}{l} \omega^2 + j h_1 l_1 \omega \right] \underline{Z}_1 + \left(\frac{I}{l} \omega^2 - K_2 l_2 - j h_2 l_2 \omega \right) \underline{Z}_2 = 0$

$\Rightarrow \left(a'(\omega) + j b'(\omega) \right) \underline{Z}_1 + \left(c'(\omega) + j d'(\omega) \right) \underline{Z}_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a'(\omega) = K_1 l_1 - \frac{I}{l} \omega^2 \ \text{ et } \ b'(\omega) = h_1 l_1 \omega \\ c'(\omega) = \frac{I}{l} \omega^2 - K_2 l_2 \ \text{ et } \ d'(\omega) = -h_2 l_2 \omega \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(a(\omega) + j b(\omega) \right) \underline{Z}_1 + \left(c(\omega) + j d(\omega) \right) \underline{Z}_2 = 0 \\ \left(a'(\omega) + j b'(\omega) \right) \underline{Z}_1 + \left(c'(\omega) + j d'(\omega) \right) \underline{Z}_2 = 0 \end{cases}$

3.2- $\begin{vmatrix} a(\omega) + j b(\omega) & c(\omega) + j d(\omega) \\ a'(\omega) + j b'(\omega) & c'(\omega) + j d'(\omega) \end{vmatrix} = 0.$

$\left(a(\omega) + j b \right)\left(c' + j d' \right) - \left(a' + j b' \right)\left(c(\omega) + j d \right) = 0$

$\left(a c' - b d' \right) + j \left(b c' + a d' \right) - \left(a' c - b' d \right) - j \left(b' c + a' d \right) = 0$

$\left(a c' + b' d - b d' - a' c \right) + j \left(b c' + a d' - b' c - a' d \right) = 0$

4-

4.1-

III) $\Rightarrow \left(-\omega^2 + \frac{K_1+K_2}{M} + j\,\frac{h_1+h_2}{M}\right)\underline{Z}_0 + \left(\frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{M} + j\omega\,\frac{h_1 l_1 - h_2 l_2}{M}\right)\underline{\theta}_0 = 0$

IV) $\Rightarrow \left((K_1 l_1 - K_2 l_2) + j\omega(h_1 l_1 - h_2 l_2)\right)\underline{Z}_0 +$

$$\left[(K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2 - \omega^2 I) + j\omega\left(h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2\right)\right]\underline{\theta}_0 = 0$$

4.2- si $k_1 l_1 = k_2 l_2$ et $h_1 l_1 = h_2 l_2$ on obtient

$$\begin{array}{l} \text{III)} \Rightarrow \\ \text{IV)} \Rightarrow \end{array} \begin{cases} \ddot{\underline{Z}} + \frac{h_1+h_2}{M}\dot{\underline{Z}} + \frac{K_1+K_2}{M}\underline{Z} = 0 \\ I\ddot{\theta} + (h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2)\dot{\theta} + (K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2)\,\theta = 0 \end{cases}$$

le couplage entre $\underline{Z}$ et $\underline{\theta}$ disparait.

4.3.

III) $\left(-\omega^2 + \frac{K_1+K_2}{M}\right)\underline{Z} + \frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{M}\underline{\theta}_0 = 0$

$$(K_1 l_1 - K_2 l_2)\underline{Z} + \left[-\omega^2 I + (K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2)\right]\underline{\theta}_0 = 0$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \begin{cases} (\omega_1^2 - \omega^2)\underline{Z} - \alpha\frac{\sqrt{MI}}{M}\underline{\theta}_0 = 0 \\ -\alpha\sqrt{MI}\,\underline{Z} + I(\omega_2^2 - \omega^2)\underline{\theta}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\alpha\sqrt{\frac{I}{M}} \\ -\alpha\sqrt{MI} & I(\omega_2^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad 1 \Rightarrow I(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \alpha^2 I = 0$$

$$1 \Rightarrow \boxed{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \alpha^2 = 0}$$

II-3/-

II-3-1/- Bilan des puissances : $P_1 = P_2 + P_F + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$

le rendement est : $\eta = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{P_2}{P_2 + P_F + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2} \Rightarrow \eta = \dfrac{1}{1 + \dfrac{P_F}{P_2} + \dfrac{R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2}{P_2}}$

II-3-2/- La puissance volumique dissipée par effet Joule est :

dues aux courants de foucault

$P_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$ telle que : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$P_v = \gamma . \vec{E}^2$

Pour un champ magnétique sinusoïdal $\vec{B} = B_0 \cos\omega t \, \vec{u_z}$

(par exemple), en coordonnées cylindrique :

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

est proportionnelle à ω c.à.d à f.

Alors E est proportionnelle à f

donc, $P_v = \gamma E^2$ est proportionnelle à f^2

c.à.d P_F est proportionnelle à f^2

Suite Problème II :

4.4- Si $\alpha = 0 \Rightarrow (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_1}$ ou $\boxed{\omega = \omega_2}$ solution double.

si $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \boxed{\frac{I}{M} = \frac{K_1 \cdot}{K_1 + K_2} l_1 \times l}$

4.5- $\omega_0 = \omega_1$ ou $\omega_0 = \omega_2$ $\qquad \frac{I}{M} = l_1$

4.6- $\begin{cases} K_1 + K_2 = M\omega_0^2 \\ \frac{K_1 l_1 \times \cancel{l}}{I} = \cancel{\omega_0^2} K_2 l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = \omega_0^2 M / \frac{l_2}{l_1} + 1 \\ K_1 = \frac{K_2}{K_1} l_2 - \end{cases}$

$\begin{cases} K_1 = 89 \times 10^3 N/m \\ K_2 = 68,35 \times 10^3 N/m \end{cases}$

$\cancel{I = 2,2 \, m^2}$

$\boxed{\frac{I}{M} = 2,2 \, m^2} \Rightarrow \boxed{I = 2,2 \times 10^3 m^2}$