- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*
- *Tous les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatibles avec les données fournies.*

Le vélo, un ami de l'environnement

Le rejet de dioxyde de carbone par les moteurs thermiques des véhicules est une préoccupation actuelle dans la lutte contre le réchauffement climatique. Le choix d'une propulsion à l'aide d'un moteur électrique s'impose. Mais, à l'heure où les enjeux climatiques deviennent majeurs, on peut se demander s'il est possible d'envisager la promotion du vélo.

Le sujet de cette épreuve est constitué de deux parties indépendantes : la première partie est notée sur ***4 points***, la deuxième sur ***16 points***.

Partie 1
Mesure de la vitesse d'un vélo

Le système d'assistance électrique P.A.S. (Power Assist System) d'un vélo comporte un moteur à courant continu monté sur l'axe de pédalier. Ce moteur n'est là que pour aider le cycliste à pédaler. Il s'arrête si le cycliste arrête de pédaler, actionne l'un des freins ou si la vitesse du vélo atteint $25 km.h^{-1}$.

Un capteur magnétique placé sur un rayon de la roue du vélo permet de mesurer la fréquence de rotation f_r de la roue de rayon $r = 33cm$ en délivrant un signal impulsion à chaque tour de celle-ci. La vitesse du vélo v en fonction de f_r est donnée par $v(km.h^{-1}) = 7,46 f_r(Hz)$.

1. Le signal impulsion délivré par le capteur est appliqué à un circuit monostable qui fournit la tension $u_1(t)$ représentée sur la figure 1.

1.1. Montrer que la valeur moyenne de $u_1(t)$ en fonction de f_r (Hz) est donnée par : $U_0 = \langle u_1 \rangle = k f_r$. Exprimer la constante k et préciser son unité.

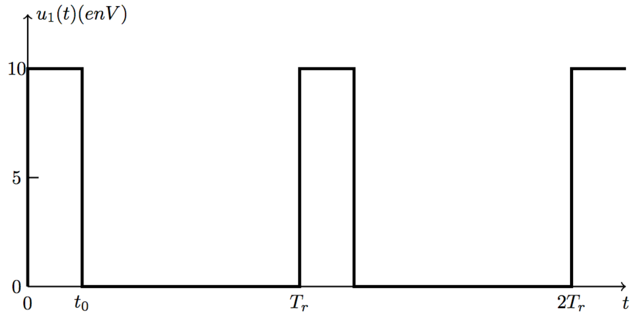

Figure 1 ($t_0 = 0,1s$)

1.2. Déterminer la vitesse maximale $v_{\max}$ mesurable en $km.h^{-1}$.

1.3. La décomposition en série de Fourier du signal obtenu est :

$u_1(t) = U_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \cos(2\pi n f_r t + \varphi_n)$. On souhaite extraire la valeur moyenne de la tension $u_1(t)$. Quel type de filtre doit-on choisir ?

2. On utilise le filtre représenté par le montage de la figure 2, où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire.

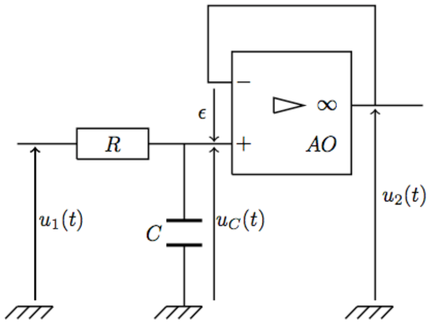

Figure 2

2.1. Justifier le mode de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel ?

2.2. Établir la relation entre $\underline{u}_2(t)$ et $\underline{u}_C(t)$.

2.3. Établir la relation entre $\underline{u}_C(t)$ et $\underline{u}_1(t)$.

2.4. En déduire que la fonction de transfert du filtre s'écrit sous la forme $\underline{H}(jf_r) = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{f_r}{f_0}}$. Exprimer H_0 et f_0 en fonction des données du montage.

2.5. Vérifier que cette fonction de transfert est cohérente avec la réponse à la question **1.3.**

2.6. On suppose que le filtre ne laisse pas passer les harmoniques de fréquences supérieures à $f_0 = 0{,}1 Hz$. Donner l'expression de la tension $u_2(t)$ lorsque $T_r = 0{,}1 s$.

Partie 2
Vélo

1. Étude du mouvement du vélo

On étudie le mouvement d'un vélo dans le référentiel $(R) = (O,x,y,z,t)$ lié au sol auquel on associe la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et que l'on suppose galiléen. On modélise un vélo se déplaçant sur le sol horizontal modélisé par l'axe (Ox) tout en restant dans le plan vertical (Oxz) (figure 3) par trois éléments :

- Deux roues identiques, une roue avant (R_1) de centre C_1 et une roue arrière (R_2) de centre C_2, de même rayon r et de masse négligeable. On note I_1 et I_2 les points de contact, supposé ponctuel, des roues avec le sol.
- L'ensemble $(S) = \{\text{cadre} + \text{cycliste}\}$ de masse M est modélisé par une barre homogène de longueur $2l$, d'extrémité C_1 et C_2. Le centre de masse C du cycliste est donc entre les deux roues, au milieu de $[C_1 ; C_2]$ ce qui est peu réaliste mais qui ne modifie pas les résultats de l'étude. Le mouvement est paramétré par $x(t)$, abscisse de C.

On note $\vec{R_1} = T_1\vec{e_x} + N_1\vec{e_z}$ et $\vec{R_2} = T_2\vec{e_x} + N_2\vec{e_z}$ les réactions de contact en I_1 et I_2. Les roues sont articulées sur des pivots parfaits (C_1y) et (C_2y) aux extrémités de la barre C_1C_2. On néglige la résistance de l'air sur le système total par

$(\Sigma)=\{\text{cadre, cycliste, roues}\}$. L'accélération de pesanteur $\vec{g}=-g\vec{e_z}$ est supposée uniforme.

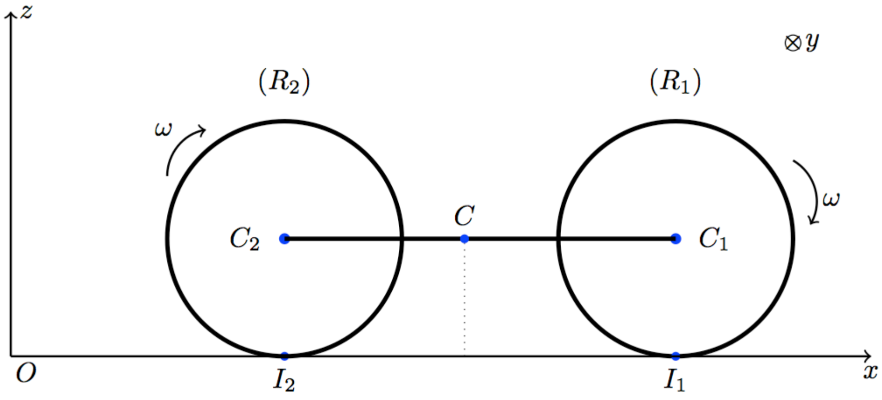

Figure 3

La vitesse et l'accélération de C dans (R) sont respectivement $\vec{v}=v\vec{e_x}$ et $\vec{a}=a\vec{e_x}$. On suppose le non-glissement sur les deux roues qui ont le même vecteur rotation $\vec{\omega}=\omega\vec{e_y}$. Le cycliste peut exercer un couple $\vec{\Gamma}=\Gamma\vec{e_y}$ sur la roue arrière (R_2) par l'intermédiaire de la pédale.

1.1. Étude cinématique

On s'intéresse à la roue (R_1) seule. Cette roue roule sans glisser sur le sol modélisé par l'axe (Ox) tout en restant dans le plan vertical (Oxz) (figure 4). On désigne par P un point lié à la roue, situé sur la circonférence. Il coïncide à l'instant $t=0$ avec l'origine O du référentiel (R) $(\theta=0)$.

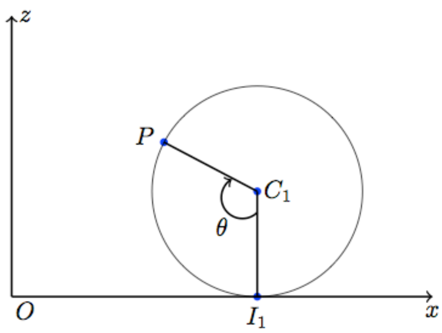

Figure 4

1.1.1. Préciser la nature de la trajectoire du point P dans le référentiel barycentrique lié à la roue ?

1.1.2. Déterminer les coordonnées du point P à l'instant t dans le référentiel (R).

1.1.3. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(P/R)$ du point P dans le référentiel (R).

1.1.4. Calculer le vecteur vitesse de glissement $\vec{v_g}$ de la roue par rapport au sol. En déduire la relation traduisant la condition de roulement sans glissement de la roue.

1.1.5. Représenter qualitativement l'allure de la trajectoire du point P dans le référentiel (R). Comment s'appelle cette trajectoire ?

1.2. Étude dynamique

1.2.1. Dire, en justifiant si le référentiel barycentrique $(R^*)=(C,x^*,y^*,z^*,t)$ lié au système (Σ) est galiléen ?

1.2.2. Comment interpréter le fait que le vélo se mette en mouvement ? Quelle est la résultante des forces intérieures qu'exerce le cycliste ? Quel est leur rôle ? Quel est le rôle des forces de frottement solide ?

1.2.3. Écrire le théorème de la résultante cinétique pour le système (Σ) dans le référentiel (R). En déduire deux équations scalaires.

1.2.4. Écrire le théorème du moment cinétique pour chaque roue dans le référentiel barycentrique (R^*). En déduire deux équations scalaires.

1.2.5. Écrire le théorème du moment cinétique pour le système (Σ) dans le référentiel (R^*). En déduire une équation scalaire.

1.2.6. Déterminer les expressions de T_1, T_2 et a en fonction de M, r et Γ.

1.2.7. Déterminer de même les expressions de N_1 et N_2 en fonction de M, g, r, l et a.

1.2.8. Le coefficient de frottement solide entre la roue et le sol est noté f. Montrer qu'il existe des valeurs limites a_1 et a_2 de l'accélération pour lesquelles le vélo peut respectivement basculer ou glisser. Préciser la roue concernée. Discuter de l'importance des divers facteurs et comparer les prévisions du modèle à des connaissances ou expériences personnelles.

2. Étude de l'alternateur de vélo

Un alternateur de vélo, appelé aussi génératrice, est un modèle réduit des énormes alternateurs des centrales électriques. Il est constitué de deux parties ; le rotor, dispositif tournant qui comporte un aimant de moment magnétique $\vec{M}$ et le stator, dispositif fixe (statique) qui comporte une bobine de fil de cuivre (figure 5). L'aimant est entraîné en rotation de vitesse angulaire Ω constante en étant solidaire d'un cylindre moleté qui frotte sans glisser en un point du pneu de rayon qu'on confondra avec le rayon de la roue r. L'aimant est dans le plan $(O,\vec{e}_Y,\vec{e}_Z)$ en faisant avec l'axe $(O,\vec{e}_Y)$ un angle $\varphi = \Omega t$ (figure 6). La bobine comporte N spires circulaire de rayon a, d'inductance propre L_b et de résistance r_b. Elle est placée dans le plan $(O,\vec{e}_X,\vec{e}_Z)$, centrée en O, sa normale étant dans le sens de $\vec{e}_Y$. Cette bobine est branchée en série avec une résistance R représentant les lampes du vélo. On suppose que la taille de l'aimant est très inférieure à la longueur de la bobine et à son rayon.

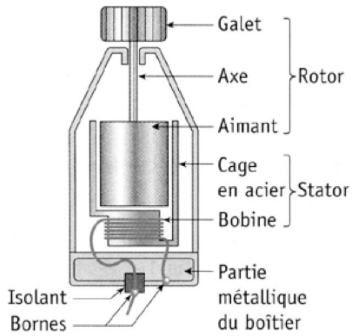

Figure 5 : Dynamo de vélo

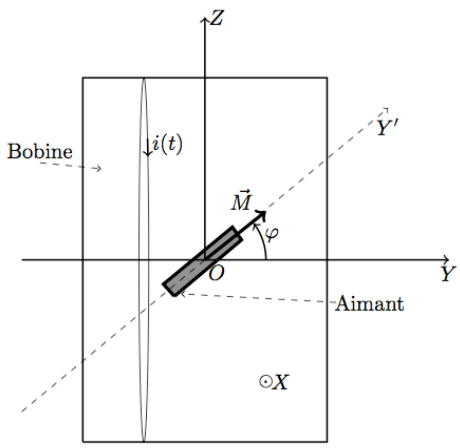

Figure 6 : Schéma de principe d'un alternateur de vélo

2.1. Justifier que la bobine est parcourue par un courant électrique $i(t)$.

2.2. Montrer que le champ magnétique créé par une spire de rayon a en son centre O' s'écrit $\vec{B}_s(O') = \dfrac{\mu_0 i(t)}{2a}\vec{e}_Y$.

2.3. On suppose par la suite que la bobine est d'épaisseur négligeable. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_b(O)$ qu'elle crée en son centre O.

On modélise l'aimant permanent par une petite spire de surface S parcourue par un courant d'intensité constant I tel que $\vec{M} = I\vec{S}$. On suppose en plus qu'il est soumis à un champ uniforme égal à $\vec{B_b}(O)$.

2.4. Exprimer le flux $\Phi_b(t)$ du champ magnétique $\vec{B_b}(O)$ à travers la spire équivalente à l'aimant.

2.5. Quelle est la relation entre les coefficients d'inductance mutuelle M_{12} et M_{21} de deux circuits (1) et (2) ? En déduire la relation entre le flux magnétique $\Phi_M(t)$ envoyé par l'aimant dans la bobine et le flux $\Phi_b(t)$.

2.6. Exprimer alors $\Phi_M(t)$ en fonction de μ_0, N, M, a, Ω et t.

2.7. Exprimer le flux total $\Phi(t)$ traversant la bobine. En déduire la f.é.m. $e(t)$ induite dans la bobine en fonction de μ_0, N, M, L_b, a, $\frac{di}{dt}$, Ω et t.

2.8. Donner le schéma électrique modélisant la bobine. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$.

2.9. On suppose le régime permanent établi et on pose $i(t) = I_m \cos(\Omega t - \psi)$, I_m étant l'intensité maximale. Exprimer I_m et ψ en fonction des données.

2.10. Exprimer la tension maximale U_R aux bornes de la résistance R.

2.11. Calculer la puissance électrique moyenne P_R absorbée par les lampes du vélo en fonction de U_R, R, L_b, Ω, r_b.

2.12. Exprimer le couple $\vec{\Gamma}$ exercé sur l'aimant de moment magnétique $\vec{M}$ soumis au champ magnétique extérieur $\vec{B_b}(O)$ uniforme.

2.13. En appliquant le théorème du moment cinétique à l'aimant dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, exprimer le couple mécanique instantané $\vec{\Gamma}_m$ qu'il faut appliquer sur l'aimant pour que la vitesse angulaire de ce dernier soit constante.

2.14. Exprimer la puissance mécanique instantanée $p_m(t)$ fournie correspondante au couple $\vec{\Gamma}_m$.

2.15. Établir la relation entre la puissance mécanique moyenne P_m et P_R. Quel est le rendement de l'alternateur ainsi modélisé ? Commenter.

3. Vélo à assistance électrique

Le système d'assistance électrique P.A.S. (Power Assist System) d'un vélo comporte un moteur à courant continu monté sur l'axe de pédalier. Ce moteur n'est là que pour aider le cycliste à pédaler. Il s'arrête si le cycliste arrête de pédaler, actionne l'un des freins ou si la vitesse du vélo atteint $25 km.h^{-1}$. Placé en prise directe dans le moyeu de l'une des deux roues, le moteur à courant continu à aimant permanent est monté sur une roue libre. Sa puissance nominale maximale est de $250 W$. Le schéma équivalent de l'induit du moteur fonctionnant en régime permanent est donné par la figure 7. U est la tension aux bornes de l'induit, I est l'intensité du courant dans

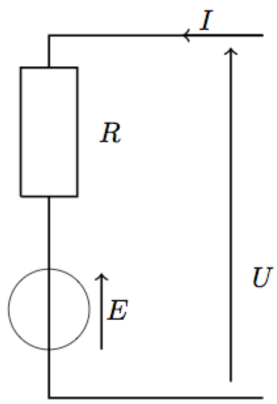

Figure 7

l'induit et R la résistance de l'induite. La tension nominale d'induit délivrée par une batterie Lithium-ion est $U_N = 36V$, l'intensité nominale d'induit est $I_N = 8{,}2A$. La résistance d'induit est $R = 0{,}66\Omega$. La vitesse de rotation nominale du moteur est $\Omega_N = 3000 tr.\min^{-1}$.

3.1. Exprimer la force électromotrice E , en fonction de U , I et R . Calculer numériquement E pour le fonctionnement nominal.

3.2. Calculer la puissance absorbée P_a pour le moteur pour le régime nominal.

3.3. On admet que la f.é.m. E s'écrit sous la forme $E = k\Omega_m$, Ω_m étant la vitesse angulaire du moteur et $k = 9{,}74.10^{-2}(S.I.)$. Préciser l'unité de la constante k .

3.4. Exprimer la puissance électromagnétique P_{em}. En déduire que le moment du couple électromagnétique du moteur Γ_{em} est donné par $\Gamma_{em} = kI$.

3.5. Exprimer le moment du couple utile Γ_u sur l'arbre moteur en fonction de I . Calculer sa valeur pour le fonctionnement nominal. On néglige les pertes collectives.

3.6. Calculer la puissance utile P_u du moteur. En déduire le rendement η du moteur.