4. DYNAMIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

- Equilibrage dynamique –

Elaboré par : Youssef RAHOU, novembre 2017

1. Contexte et problématique :

L'application du Principe Fondamentale de la Dynamique à un solide (S) effectuant un mouvement de rotation autour d'un axe fixe permet de démontrer que lorsque la répartition de masse n'est pas uniforme par rapport à l'axe, des forces centrifuges tournantes s'exercent sur le solide (S).
Une conséquence directe de ces effets centrifuges est la vibration du solide (S). Cette vibration peut être bien recherchée, comme pour le cas des compacteurs ou extracteurs industriels (voir figure.1). Cependant, pour la plupart des cas (exemples, figure. 2), ces forces centrifuges tournantes sont indésirables, et ce, à cause des vibrations provoquées pouvant aller d'une gêne de l'utilisateur (bruit par exemple) jusqu'à **la détérioration des supports de liaison** suivant **un phénomène de fatigue**.

Figure.1. Systèmes tournants où les effets centrifuges sont recherchés.

Figure.2. Systèmes tournants où les effets centrifuges sont indésirables.

Il faut donc réaliser un équilibrage pour éliminer ces forces centrifuges pour ainsi garantir un fonctionnement sans vibration, par conséquent un rendement du rotor et une durée de vie optimaux.

Remarque :

- La nécessité d'un équilibrage est d'autant plus grande que les effets centrifuges sont importants, ces effets sont de la forme ''M.L.ω^2''. Par conséquent, l'équilibrage est d'autant nécessaire que les vitesses de rotation sont grandes.

2. **Modèle adopté pour l'étude d'équilibrage :**

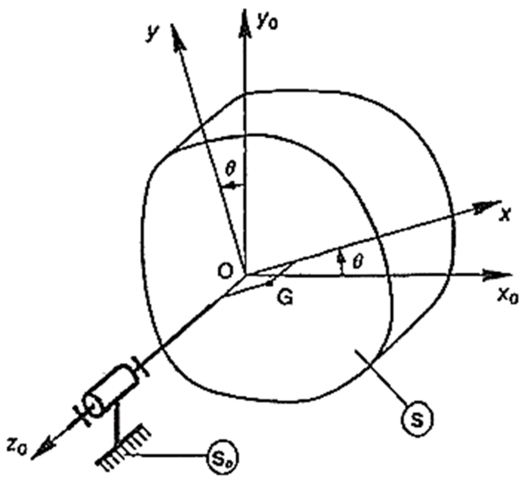

Figure.3. Modèle adoptée pour la mise en équation de l'équilibrage

Soit un bâti (S_0) auquel est lié le repère galiléen $\mathbf{R_0}$ (O, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$). Le solide (S) représente le rotor, de masse m et de centre d'inertie G, a une liaison pivot sans frottement d'axe (O, $\vec{z}_0$) avec (S_0).
Soit **R** (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}_0$) un repère lié à (S), en vue de simplifier les calculs, ce repère est choisi de manière à avoir le point G dans le plan (O, $\vec{z}_0$, $\vec{x}$) (voir figure. 3).

On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$ et $\overline{OG} = a\vec{x} + c\vec{z}_0$.

La géométrie du solide (S) étant quelconque, sa matrice d'inertie au point O, dans la base de R est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}_0)}$$

Le torseur de l'action mécanique exercée par (S_0) sur (S) est celui correspondant à une liaison pivot, qui au point O, s'écrit :

$$\{T\,(S_0 \rightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}$$

On pose $\vec{R} = X\,\vec{x} + Y\,\vec{y} + Z\,\vec{z}_0$

$\vec{M}_0 = L\,\vec{x} + M\,\vec{y}$ ***(liaison pivot).***

Sur (S) s'exerce aussi l'action mécanique, **supposée connue**, d'un ensemble matériel (E), représentée au point O, par le torseur :

$$\{T\,(E \rightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{1O} \end{Bmatrix}$$

On pose $\vec{R}_1 = X_1\,\vec{x} + Y_1\,\vec{y} + Z_1\,\vec{z}_0$.

$\vec{M}_1 = L_1\,\vec{x} + M_1\,\vec{y} + N_1\,\vec{z}_0$.

Remarque :

- Dans le cas où (S)= {roue d'un véhicule+ axe de la roue} par exemple, (E)= {le sol+ la pesanteur+ l'arbre de transmission (couple moteur)}.

3. **Condition d'équilibrage dynamique d'un rotor :**

3.1. Définition de l'équilibrage dynamique d'un rotor :

Un rotor est **équilibré dynamiquement** si l'action mécanique au niveau de la liaison entre le rotor (S) et le bâti (S_0) est **aussi constante que possible**, **elle doit être indépendante du mouvement de (S) par rapport à (S_0).**

Concrètement, **les composantes du torseur de l'action mécanique exercée par le bâti (S_0) sur le rotor (S) doivent être indépendantes de la position angulaire θ et de ses dérivées.**

3.2. Conditions pratiques de l'équilibrage dynamique :

Pour quantifier la condition précédente, il faut **exprimer les composantes du torseur correspondant à la liaison pivot** en appliquant le **Principe Fondamental de la Dynamique**, tout en prenant en compte la **condition d'indépendance** par rapport à la position angulaire et ses dérivées.

3.2.1. Expression du torseur d'action mécanique au niveau de la liaison :

Les composantes de ce torseur s'obtiennent par application du Principe Fondamental de la Dynamique au rotor (S) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathbf{R_0}$:

$$\{D(S/\mathbf{R_0})\} = \{T(\bar{S} \rightarrow S)\}, \text{ avec } \bar{S}=(S_0) \cup (E)$$

Ainsi : $\{D(S/\mathbf{R_0})\} = \{T(S_0 \rightarrow S)\} + \{T(E \rightarrow S)\}$

Cette expression s'écrit sous forme de deux équations vectorielles :

$m\,\vec{\Gamma}(G/\mathbf{R_0}) = \vec{R} + \vec{R}_1$ (théorème de la résultante dynamique)

$\vec{\delta}_O(S/\mathbf{R_0}) = \vec{M}_O + \vec{M}_{1O}$ (théorème du moment dynamique exprimé au point 0)

- <u>Vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/\mathbf{R_0})$:</u>

Il se calcule par dérivation de $\vec{V}(G/\mathbf{R_0})$:

$$\vec{\Gamma}(G/\mathbf{R_0}) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/\mathbf{R0})\right]_{\mathbf{R_0}} \quad \text{avec : } \vec{V}(G/\mathbf{R_0}) = a\theta'\vec{y}$$

D'où $\boxed{\vec{\Gamma}(G/\mathbf{R_0}) = a\theta''\vec{y} - a\theta'^2\vec{x}}$ *Relation. 1*

- <u>Moment dynamique $\vec{\delta}_O(S/\mathbf{R_0})$:</u>

Le point O est fixe dans $\mathbf{R_0}$, on a donc :

$$\vec{\delta}_O(S/\mathbf{R_0}) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O(S/\mathbf{R0})\right]_{\mathbf{R_0}}$$ *Relation.2*

$$\text{Avec : } \vec{\sigma}_O(S/\mathbf{R_0}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)}$$

Qui s'écrit sous forme linéaire :

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathbf{R_0}) = -E\,\theta'\vec{x} - D\,\theta'\vec{y} + C\,\theta'\vec{z}_0. \qquad \textit{Relation.3}$$

La relation 2 permet de déduire l'expression du moment dynamique :

$$\vec{\delta}_O(S/\mathbf{R_0}) = -E\,\theta''\vec{x} - D\,\theta''\vec{y} + C\,\theta''\vec{z}_0 + \theta'\vec{z}_0 \wedge (-E\,\theta'\vec{x} - D\,\theta'\vec{y} + C\,\theta'\vec{z}_0).$$

Soit :

$$\vec{\delta}_O(S/\mathbf{R_0}) = (-E\,\theta'' + D\,\theta'^2)\,\vec{x} - (D\,\theta'' + E\,\theta'^2)\,\vec{y} + C\,\theta''\vec{z}_0. \qquad \textit{Relation.4}$$

Les calculs précédents intégrés dans les théorèmes de la résultante et du moment dynamiques, en projection sur les trois axes de la base **R**, permettent d'écrire :

- Le théorème de la résultante dynamique en projection sur :
  - $\vec{x}$: $X+X_1 = -ma\theta'^2$
  - $\vec{y}$: $Y+Y_1 = ma\theta''$
  - $\vec{z}_0$: $Z+Z_1 = 0$
- Le théorème de la résultante dynamique en projection sur :
  - $\vec{x}$: $L+L_1 = -E\,\theta'' + D\,\theta'^2$
  - $\vec{y}$: $M+M_1 = -D\,\theta'' - E\,\theta'^2$
  - $\vec{z}_0$: $N_1 = C\,\theta''$

D'où les expressions des composantes du torseur $\{T(S_0 \rightarrow S)\}$ qui, selon la définition de l'équilibrage, doivent être indépendantes de la position angulaire θ et de ses dérivées.

3.2.2. Equilibrage statique, équilibrage dynamique :

Pour remplir cette condition d'indépendance par rapport à la position angulaire θ et de ses dérivées, Il faut d'abord que **a soit nul**, d'où l'affirmation suivante :

Un rotor est équilibré statiquement si son centre de gravité est situé sur son axe de rotation.

Il faut en plus de cette condition que les produits d'inertie **D et E soient nuls**, d'où l'affirmation suivante :

Un rotor est équilibré dynamiquement si :

- Son centre de gravité est situé sur son axe de rotation.
- Son axe de rotation est axe principal d'inertie.

Remarque :

- Revenons sur la définition d'un **axe principale d'inertie.** L'axe $(O, \vec{z}_0)$ est axe du rotor (S), dans ce cas, la condition d'équilibrage dynamique exige que cet axe soit axe principal d'inertie, **c'est-à-dire que le moment cinétique soit proportionnel à la vitesse de rotation** :

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathbf{R_0}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E\theta' \\ -D\theta' \\ C\theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)}$$

Il faut et il suffit donc que D=E=0, et ce dans le cas où (O, $\vec{z}_0$) est axe de rotation.
Quand est-il si (O, $\vec{y}$) est axe de rotation,

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathbf{R_0}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F\theta' \\ B\theta' \\ -D\theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)}$$

Dans ce cas, pour que le moment cinétique soit proportionnel à la vitesse de rotation il faut et il suffit que : F=D=0.

En conclusion, **la condition d'équilibrage exige que l'axe de rotation est axe principal d'inertie, qui selon les configurations imposera deux produits d'inertie nuls.**

- Une **condition nécessaire de l'équilibrage dynamique** est **l'équilibrage statique**. L'équilibrage statique impose seulement que **la résultante statique soit indépendante du mouvement du rotor, donc de** θ.

4. Réalisation pratique d'un équilibrage dynamique :

Deux principes sont utilisés pour assurer l'équilibrage dynamique d'un rotor :
- Equilibrage par ajout de matière grâce à des masselottes situées de manière précise.
- Equilibrage par enlèvement de matière (perçage ou meulage) dans des endroits précis.

En pratique, la situation de l'endroit d'ajout ou enlèvement de matière, la masse à ajouter ou à enlever sont déterminés via la mesure des composantes de l'action mécanique au niveau de la liaison pivot entre le support et le rotor.
Une autre méthode d'équilibrage consiste à effectuer des mesures de grandeurs cinématiques sans avoir recours à démonter et déplacer le rotor sur un banc de mesure des efforts, par conséquent le coût d'équilibrage est réduit (voir figure 4).

Figure.4. Equilibrage dynamique par ajout et enlèvement de matière :
A droite, appareil d'équilibrage et roue : équilibrage par ajout de masselottes.
A gauche, rotor d'un moteur électrique : équilibrage par enlèvement de matière par perçage et meulage,