2. DYNAMIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

-Grandeurs inertielles -

Elaboré par : Youssef RAHOU, octobre 2017

1. Introduction :

La dynamique du solide indéformable est une discipline de la mécanique qui étudie les **systèmes matériels en mouvement, ce mouvement est due aux actions mécaniques qui leurs sont appliquées.** Les causes (**efforts et moments) et les conséquences (grandeurs cinématiques ou plus correctement cinétiques)** sont étudiées à travers **le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.)**, la notion de temps ainsi que la notion de masse sont présentes.

La formulation du **Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.)** nécessite la détermination du torseur dynamique qui est en relation directe avec le torseur cinétique (voir chapitre 1), **cependant l'expression intégrale des moments (cinétique et dynamique) exige des calculs relativement lourds.**

Pour se passer de ces intégrales, on peut remarquer, d'après le dernier TD, que l'expression du moment cinétique/dynamique est le produit de deux grandeurs :

- Une grandeur inertielle en ML^2, appelée **moment d'inertie,** et ce pour le cas d'une rotation simple**. Pour un mouvement quelconque** il faut introduire **la notion de matrice d'inertie.**
- **Une grandeur cinématique (vecteur rotation ou sa dérivée temporelle).**

Le présent chapitre permet **d'exprimer les grandeurs cinétiques sous forme de produits (au lieu d'intégrales) en utilisant les grandeurs inertielles, principalement la matrice d'inertie.**

2. Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe :

Soit un repère $\mathbf{R}(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, soit un axe $\mathbf{\Delta}(O,\vec{\mathbf{i}})$, $\vec{\mathbf{i}}$ est un vecteur unitaire tel que : $\vec{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\alpha}.\vec{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\beta}.\vec{\mathbf{y}} + \gamma.\vec{\mathbf{z}}$.
Soit un solide (S) de masse m, P est un point courant de (S) tel que : $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \boldsymbol{x}.\vec{\mathbf{x}} + \boldsymbol{y}.\vec{\mathbf{y}} + \boldsymbol{z}.\vec{\mathbf{z}}$:

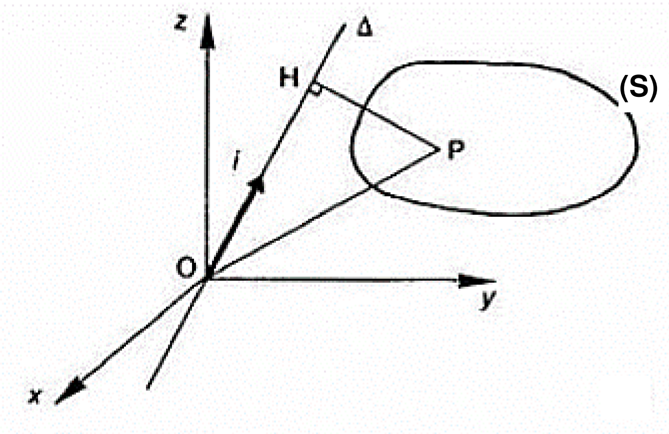

Figure.1. Schématisation du solide (S) et de l'axe Δ.

H représente la projection du point P sur l'axe $\mathbf{\Delta}$.

2.1. Définition :

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe **Δ** est le **scalaire positif** :

$$\mathbf{I(S/\Delta)} = \int_{P\in S} [\overrightarrow{HP}]^2\,\mathrm{dm} = \int_{P\in S} d(P,\Delta)^2\,\mathrm{dm}$$

Où $d(P,\Delta)$ **est la distance entre le point P et l'axe** $\Delta(O,\vec{\mathbf{i}})$.
L'unité du moment d'inertie est en ML² : kg.m².

Remarque :

- Si $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}(O,\vec{\mathbf{z}})$, $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \boldsymbol{x}.\vec{\mathbf{x}} + \boldsymbol{y}.\vec{\mathbf{y}} + \boldsymbol{z}.\vec{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HP}}$, avec $\overrightarrow{\mathbf{OH}} = \boldsymbol{z}.\vec{\mathbf{z}}$, ainsi $\overrightarrow{\mathbf{HP}} = \boldsymbol{x}.\vec{\mathbf{x}} + \boldsymbol{y}.\vec{\mathbf{y}}$.

De là, Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{\mathbf{z}})$ est le scalaire positif :

$$\mathbf{I(S/\,(O,\vec{z}))} = \int_{P\in S} (x^2 + y^2)\,\mathrm{dm}$$

2.2. Expression développée du moment d'inertie :

Pour développer l'expression précédente du moment d'inertie, remarquons que :

$[\overrightarrow{HP}]^2 = \overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HP} = ||\overrightarrow{HP}||^2$, avec $||\overrightarrow{\boldsymbol{HP}}|| = ||\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}||.|\sin(\vec{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{OP}})| = ||\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}||$, ainsi :

$$\mathbf{I(S/\Delta)} = \int_{P\in S} ||\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}||^2\,\mathrm{dm}$$

Calculons $\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OP}}$:

$$\vec{\mathrm{i}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\beta z - \gamma y\\ \gamma x - \alpha z\\ \alpha y - \beta x\end{vmatrix}$$

Il vient que : $||\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}||^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$

$= \beta^2 z^2 - 2\beta\gamma zy + \gamma^2 y^2 + \gamma^2 x^2 - 2\gamma\alpha xz + \alpha^2 z^2 + \alpha^2 y^2 - 2\,\alpha\beta xy + \beta^2 x^2$

$= \alpha^2(z^2+y^2) + \beta^2(z^2+x^2) + \gamma^2(y^2+x^2)^2 - 2\beta\gamma zy - 2\gamma\alpha xz - 2\,\alpha\beta xy$

Ainsi: $\mathbf{I(S/\Delta)} = \int_{P\in S} ||\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}||^2\,\mathbf{dm}$

$= \int_{P\in S} [\boldsymbol{\alpha}^2(\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{y}^2) + \boldsymbol{\beta}^2(\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{x}^2) + +\gamma^2(\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{x}^2) - 2\boldsymbol{\beta}\gamma\boldsymbol{zy} - 2\gamma\boldsymbol{\alpha xz} - 2\,\boldsymbol{\alpha\beta xy}]\,\mathbf{dm}$

$= \boldsymbol{\alpha}^2 . \int_{P\in S} (\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{y}^2)\,\mathbf{dm} + \boldsymbol{\beta}^2 . \int_{P\in S} (\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{x}^2)\,\mathbf{dm} + \gamma^2 . \int_{P\in S} (\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{x}^2)\,\mathbf{dm} - 2\boldsymbol{\beta}\gamma \int_{P\in S} \boldsymbol{yz}\,\mathbf{dm}$

$-2\gamma\boldsymbol{\alpha} \int_{P\in S} \boldsymbol{xz}\,\mathbf{dm} - 2\boldsymbol{\alpha\beta} \int_{P\in S} \boldsymbol{xy}\,\mathbf{dm}$

On pose:

- A=$\int_{P\in S} (\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{y}^2)\,\mathbf{dm}$, B=$\int_{P\in S} (\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{x}^2)\,\mathbf{dm}$, C= $\int_{P\in S} (\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{x}^2)\,\mathbf{dm}$.
- D=$\int_{P\in S} \boldsymbol{yz}\,\mathbf{dm}$, E=$\int_{P\in S} \boldsymbol{xz}\,\mathbf{dm}$, F=$\int_{P\in S} \boldsymbol{xy}\,\mathbf{dm}$

L'expression du moment d'inertie s'écrit donc :

$$\mathbf{I(S/\Delta)} = \mathbf{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\,\boldsymbol{\beta}^2 + \mathrm{C}\gamma^2 - 2\mathbf{D}\boldsymbol{\beta}\gamma - 2\mathbf{E}\gamma\boldsymbol{\alpha} - 2\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha\beta}$$

Remarque:

- L'expression du moment d'inertie fait apparaitre des termes qui sont le produit de termes venant de l'axe Δ (composantes du vecteur directeur $\vec{\mathbf{i}}$) et d'autres termes inertielles en ML² liés au solide (S) (forme et masse).
- **A** est appelé **le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O,$\vec{x}$).**
- **B** est appelé **le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O,$\vec{y}$).**
- **C** est appelé **le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O,$\vec{z}$).**
- **D** est appelé **le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O,$\vec{y}$) et (O,$\vec{z}$).**
- **E** est appelé **le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O,$\vec{x}$) et (O,$\vec{z}$).**
- **F** est appelé **le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O,$\vec{x}$) et (O,$\vec{y}$).**

3. Opérateur d'inertie d'un solide (S) en un point :

3.1. Définition :

L'opérateur d'inertie du solide (S) en **un point O** est l'application linéaire associant à tout vecteur $\vec{\mathbf{v}}$, le vecteur suivant :

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}}(\mathrm{S},\vec{\mathbf{v}}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} \wedge (\vec{\mathbf{v}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OP}})\,\mathbf{dm}$$

Remarque :

- Il s'agit d'un opérateur linéaire, donc représentable par une matrice **M**, cette matrice est telle que : $\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}}(\mathrm{S},\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{M}.\,\vec{\mathbf{v}}$.

3.2. Matrice d'inertie d'un solide (S) :

On remarque que $\vec{L}$ (S,$\vec{v}$) **et** $\vec{v}$ sont des vecteurs de taille **3X1**, on pose : $\vec{L}$ **(S,$\vec{v}$)=** $L1.\vec{x} + L2.\vec{y} + L3.\vec{z}$ et $\vec{v} = v1.\vec{x} + v2.\vec{y} + v3.\vec{z}$, il vient que :

$$\vec{L}_O(S,\vec{v}) = \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix} = \mathbf{M}.\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, M est impérativement **une matrice carrée de taille 3x3** telle que :

$$\begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 \\ M21 & M22 & M23 \\ M31 & M32 & M33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix}$$

Pour expliciter la matrice **M**, on se place dans le cas où $\vec{v}$ est un des vecteurs de la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), en effet :

• $\vec{L}_O(S,\vec{x}) = \begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 \\ M21 & M22 & M23 \\ M31 & M32 & M33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puisque $\vec{x} = 1.\vec{x} + 0.\vec{y} + 0.\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- D'une part, l'expression précédente s'écrit :

$$\vec{L}(S,\vec{x}) = \begin{bmatrix} M11 \\ M21 \\ M31 \end{bmatrix}$$

- D'autre part, calculons $\vec{L}_O$ (S,$\vec{x}$) en utilisant la définition :

$$\vec{L}_O(S,\vec{x}) = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}) dm$$

avec : $\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 + z^2 \\ -xy \\ -xz \end{vmatrix} = (y^2 + z^2).\vec{x} - xy.\vec{y} - xz.\vec{z}$

d'où : $\vec{L}(S,\vec{x}) = \int_{P \in S} [(y^2 + z^2).\vec{x} - xy.\vec{y} - xz.\vec{z}]\, dm = A.\vec{x} - F.\vec{y} - E.\vec{z} = \begin{pmatrix} A \\ -F \\ -E \end{pmatrix}$

- Ainsi:

$$\boldsymbol{M11 = A,\ M21 = -F,\ M31 = -E}$$

• Pour identifier la deuxième colonne de la matrice **M**, on se place dans le cas où $\vec{v} = \vec{y}$:

- D'une part :

$$\vec{L}(S,\vec{y}) = \begin{bmatrix} M12 \\ M22 \\ M32 \end{bmatrix}$$

- D'autre part, calculons $\vec{L}_O$**(S,$\vec{y}$)** en utilisant la définition :

$$\vec{L}_O(S,\vec{y}) = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{y} \wedge \overrightarrow{OP}) dm$$

avec: $\vec{y} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{y} \wedge \overrightarrow{OP}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -xy \\ z^2 + x^2 \\ -yz \end{vmatrix} = -xy.\vec{x} + (z^2 + x^2).\vec{y} - yz.\vec{z}$

d'où : $\vec{L}(S,\vec{y}) = \int_{P \in S} [-xy.\vec{x} + (z^2 + x^2).\vec{y} - yz.\vec{z}]\, dm = -F.\vec{x} + B.\vec{y} - D.\vec{z} = \begin{pmatrix} -F \\ B \\ -D \end{pmatrix}$

- Ainsi:

$$\mathbf{M12=-F.\ M22=B.\ M32=-D}$$

- Enfin, pour déterminer la troisième colonne de la matrice **M**, on se place dans le cas où $\vec{v}=\vec{z}$:
  - D'une part :

$\vec{L}$ (S,$\vec{y}$)= $\begin{bmatrix} M13 \\ M23 \\ M33 \end{bmatrix}$

  - D'autre part, calculons $\vec{L}_O$(S,$\vec{z}$) en utilisant la définition :

$\vec{L}_O$(S,$\vec{z}$)= $\int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{z} \wedge \overrightarrow{OP})\mathrm{dm}$

avec: $\vec{z} \wedge \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-y\\x\\0\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{y} \wedge \overrightarrow{OP})=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-xz\\-yz\\x^2+y^2\end{vmatrix}=-xz.\vec{x}-yz.\vec{y}+(x^2+y^2).\vec{z}$

d'où : $\vec{L}$ (S,$\vec{z}$)= $\int_{P\in S}[-xz.\vec{x}-yz.\vec{y}+(x^2+y^2).\vec{z}]\,\mathrm{dm}$=–E. $\vec{x}$ -D. $\vec{y}$ +C. $\vec{z}$= $\begin{pmatrix}-E\\-D\\C\end{pmatrix}$

  - Ainsi:

$$\boldsymbol{M13}\textbf{=-E. }\boldsymbol{M23}\textbf{=-D. }\boldsymbol{M33}\textbf{=}\boldsymbol{C}$$

En synthèse, on appelle matrice d'inertie du solide S au point O dans la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) la matrice carrée :

$$[I_O(S)]=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec : A=$\int_{P\in S}\left(\boldsymbol{z^2+y^2}\right)\mathbf{dm}$, B=$\int_{P\in S}\left(\boldsymbol{z^2+x^2}\right)\mathbf{dm}$, C=$\int_{P\in S}\left(\boldsymbol{y^2+x^2}\right)\mathbf{dm}$.

Et : D=$\int_{P\in S}\boldsymbol{yz}\,\mathbf{dm}$, E=$\int_{P\in S}\boldsymbol{xz}\,\mathbf{dm}$, F=$\int_{P\in S}\boldsymbol{xy}\,\mathbf{dm}$.

Remarque:

- La matrice d'inertie est une matrice **symétrique** dont les termes diagonaux correspondent aux moments d'inertie par rapport aux axes (O,$\vec{x}$), (O,$\vec{y}$) et (O,$\vec{z}$).
- L'opérateur d'inertie est lié à la matrice d'inertie par la relation :

$$\vec{L}_O(S,\vec{v})= \int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP})\mathrm{dm} = [I_O(S)].\vec{v}.$$

- Le produit matriciel$[\boldsymbol{I}_O(\boldsymbol{S})].\vec{v}$ **n'est possible que si la matrice** $[\boldsymbol{I}_O(\boldsymbol{S})]$ **et le vecteur** $\vec{v}$ **sont exprimés dans la même base, en pratique on exprime le vecteur** $\vec{v}$ **dans la base de la matrice**$[\boldsymbol{I}_O(\boldsymbol{S})]$.

4. Relation entre moment d'inertie par rapport à un axe et matrice d'inertie :

On rappelle que le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à l'axe **Δ**(O,$\vec{\mathbf{i}}$) s'écrit :

$$\mathbf{I(S/\Delta)} = \int_{P \in S} ||\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{OP}||^2 \, \mathbf{dm} = \int_{P \in S} (\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{OP}).(\vec{\mathbf{i}} \wedge \overrightarrow{OP}) \, \mathbf{dm}$$

4.1. Rappel mathématique, le produit mixte :

Soient trois vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{w}}$ quelconques, on appelle **produit mixte** le réel :

$$<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}> = \vec{\mathbf{u}}.(\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}})$$

Il vérifie la propriété :

$$<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}> = \vec{\mathbf{u}}.(\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{v}}.(\vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{w}}.(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}).$$

4.2. Relation entre moment et matrice d'inertie :

Pour $\vec{u}=\vec{i}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ et $\vec{w}=\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}$, on a :

$(\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}).(\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{i}.(\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}))$

Ainsi:

$$\mathbf{I(S/\Delta)} = \int_{P \in S} (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}).(\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}) \, dm = \int_{P \in S} \vec{i}.(\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP})) \, dm = \vec{i}.\int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}) \, dm = \vec{\mathbf{i}}.\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S},\vec{\mathbf{i}})$$

Il vient :

$$\mathbf{I(S/\Delta)} = \vec{\mathbf{i}}.([\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S})].\vec{\mathbf{i}})$$

Soit $[I_O(S)]$ la matrice d'inertie du solide (S) au point O dans la base ($\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$, $\vec{\mathbf{z}}$), **Pour obtenir le moment d'inertie du solide (S) par rapport à n'importe quelle axe Δ**(O,$\vec{\mathbf{i}}$), on utilise la relation :

$$\mathbf{I(S/\Delta)} = \vec{\mathbf{i}}.([\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S})].\vec{\mathbf{i}})$$

5. Matrice d'inertie pour des formes géométriques remarquables :

5.1. Solide présentant un plan de symétrie matériel :

Soit un solide (S) présentant un plan de symétrie matériel (Π), avec Π = (O, $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$):

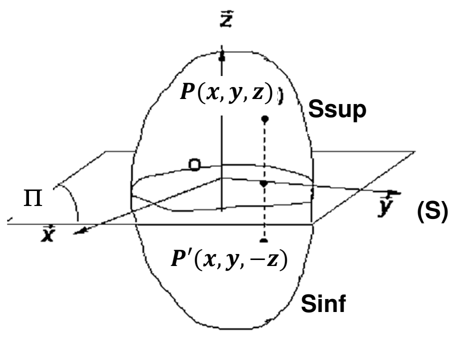

Figure.2. Solide (S) à plan de symétrie Π.

Un plan de **symétrie matériel** est à la fois un plan de **symétrie géométrique** et **de répartition de masse**, c'est-à-dire que le plan coupe le solide (S) en **deux formes identiques** (symétrie géométrique) et que la répartition de masse de ces deux ''formes'' est identique.

Intéressons-nous aux intégrales contenant des termes ''en z'' au niveau de la matrice d'inertie de (S) :

- $D=\int_{P \in S} yz\,\mathrm{dm}=\int_{P \in Ssup} yz\,\mathrm{dm}+\int_{P \in Sinf} yz\,\mathrm{dm}$,

Avec S=$\mathbf{S_{sup}} \cup \mathbf{S_{inf}}$ (Ssup : partie supérieure de (S) par rapport au plan de symétrie et Sinf : partie inférieure de (S) par rapport au plan de symétrie). On remarque que pour chaque point P(x,y,z) de Ssup correspond un point P'(x,y,-z) de Sinf, ainsi tous les termes yz de Ssup ont leurs opposés –yz dans Sinf, par conséquent **D s'annule.**

- $E=\int_{P \in S} zx\,\mathrm{dm}=\int_{P \in Ssup} zx\,\mathrm{dm}+\int_{P \in Sinf} zx\,\mathrm{dm}$,

De la même manière, les termes zx de Ssup ont leurs opposés –zx dans Sinf, par conséquent **E s'annule.**

- Pour un solide (S) possédant un plan de **symétrie matériel** $(O, \vec{x}, \vec{y})$, les termes ''en z'' de la matrice d'inertie de (S) en O sont nuls, ainsi :

$$[I_O(S)]=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- De même, pour un solide (S) possédant un plan de **symétrie matériel** $(O, \vec{x}, \vec{z})$, les termes ''en y'' de la matrice d'inertie de (S) en O sont nuls, ainsi :

$$[I_O(S)]=\begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Enfin, pour un solide (S) possédant un plan de **symétrie matériel** $(O, \vec{y}, \vec{z})$, les termes ''en x'' de la matrice d'inertie de (S) en O sont nuls, ainsi :

$$[I_O(S)]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5.2. Solide présentant deux plans de symétrie matériel (axe de symétrie matériel) :

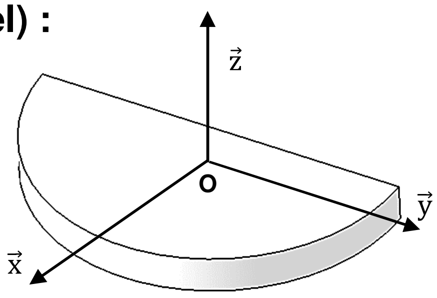

Figure.3. Solide (S) présentant deux plans de symétrie.

Soit un solide (S) présentant deux plans de symétrie matériel ($\pi 1$) et ($\pi 2$), avec $\pi 1$ = **$(O, \vec{x}, \vec{y})$** et $\pi 2$ = **$(O, \vec{x}, \vec{z})$**, d'après la propriété précédente :

- Le plan $\pi 1$ est un plan de symétrie matériel pour (S), ainsi **les termes D et E** de la matrice d'inertie de (S) en O **sont nuls : D=E=0.**
- Le plan $\pi 2$ est un plan de symétrie matériel pour (S), ainsi **les termes D et F** de la matrice d'inertie de (S) en O **sont nuls : D=F=0.**

La matrice d'inertie de (S) en O **est diagonale**, **seuls les termes diagonaux sont non nuls.**

- Pour un solide (S) possédant deux plans de **symétrie matériel $(O, \vec{x}, \vec{y})$** et **$(O, \vec{x}, \vec{z})$** ou **$(O, \vec{x}, \vec{y})$** et **$(O, \vec{y}, \vec{z})$** ou **$(O, \vec{y}, \vec{z})$** et **$(O, \vec{x}, \vec{z})$, les produits d'inertie D,E et F** de la matrice d'inertie de (S) en O **sont nuls**, ainsi :

$$[\underset{O}{I}(S)]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Remarque :

- Les deux plans de symétrie matériel $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $(O, \vec{x}, \vec{z})$ correspondent à l'axe de symétrie matériel $(O, \vec{x})$, de même $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $(O, \vec{y}, \vec{z})$ correspondent à l'axe de symétrie matériel $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{y}, \vec{z})$ et $(O, \vec{x}, \vec{z})$ correspondent à l'axe de symétrie matériel $(O, \vec{y})$.
- Un solide (S) peut posséder **un axe de révolution matérielle**, c'est-à-dire qu'il est généré par la rotation d'une **surface génératrice autour d'un axe**, par conséquent (S) possède une infinité de plans de symétrie matériel dont l'intersection est l'axe de révolution matérielle.

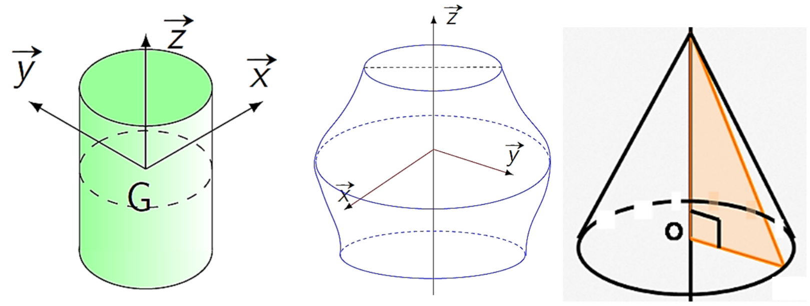

Figure.4. Exemples de solides possédant un axe de révolution.

Voir les travaux dirigés concernant la particularité de la matrice d'inertie de ce type de solide, elle est forcément diagonale (infinité de plans de symétrie matériel), en plus elle est de la forme :

$$[\underset{O}{I}(S)]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-,-,\overrightarrow{vecteur\ dirigeant\ l'axe\ de\ révolution})}$$

Ou :

$$[\underset{O}{I}(S)]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(-,\overrightarrow{vecteur\ dirigeant\ l'axe\ de\ révolution},-)}$$

Ou :

$$[\underset{O}{I}(S)]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{vecteur\ dirigeant\ l'axe\ de\ révolution},-,-)}$$

6. Relation entre matrices d'inertie en deux points O et G : Théorème de Huygens :

Pour mettre en évidence la nécessité de ce théorème, prenons le cas du robot Ericc 3 dont le schéma cinématique simplifié est représenté ci-dessous :

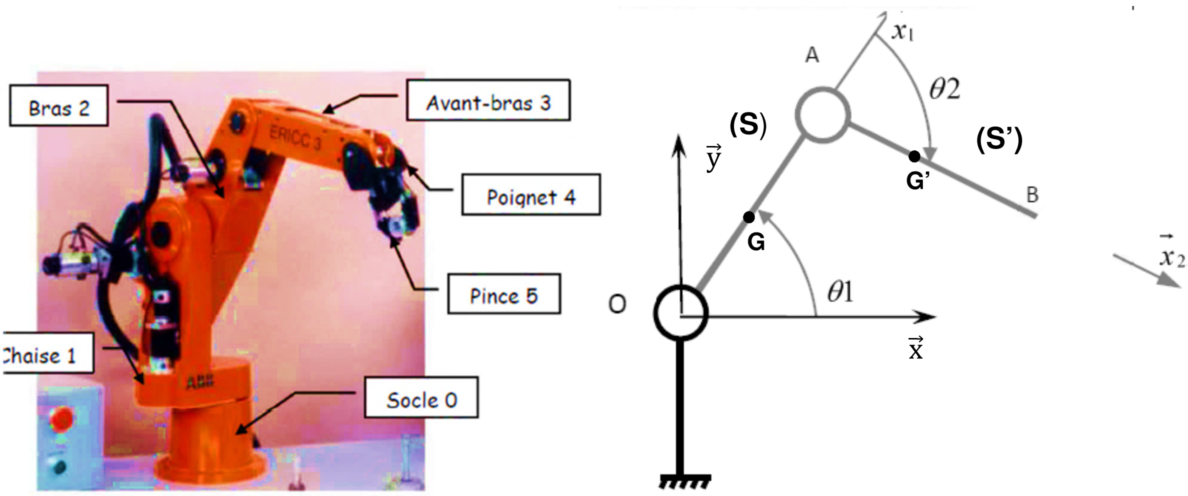

Figure.5. Robot Ericc 3, mécanisme réel et schéma cinématique simplifié à deux bras.

On considère le modèle du robot à deux bras indéformables et homogènes :

- (S) de masse m, de centre d'inertie G et de longueur L. La matrice d'inertie de (S) en **G** dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est $[I_G(S)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.
- (S') de masse m', de centre d'inertie G' et de longueur L'. La matrice d'inertie de (S') en **G'** dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est $[I_{G'}(S')]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

En pratique, on cherche à exprimer les matrices d'inertie de l'ensemble des solides **au même point** *(voir paragraphe 7 pour en comprendre la raison)*, de préférence fixe dans le repère du bâti (commentaire dans *paragraphe 8),* **le point O en convient**.

Cherchons donc la matrice d'inertie de (S) au point **O** dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$[I_O(S)]=\begin{bmatrix} Ao & -Fo & -Eo \\ -Fo & Bo & -Do \\ -Eo & -Do & Co \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Remarque :

- On rajoute un indice indiquant le point O aux termes de la matrice d'inertie $[\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S})]$ pour rappeler que ces derniers sont exprimés dans le repère (**o**, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$). De même l'indice indiquant le point G est rajouté aux termes de la matrice d'inertie $[\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S})]$ pour rappeler que ces derniers sont exprimés dans le repère (**G**, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) :

$$[I_G(S)]=\begin{bmatrix} AG & -FG & -EG \\ -FG & BG & -DG \\ -EG & -DG & CG \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les données sont A_G, B_G, C_G, D_G, E_G et F_G. Et on cherche à déterminer les termes de la matrice $[I_O(S)]$: A_O, B_O, C_O, D_O, E_O et F_O :

- **Calculons A_O :**

$A_O=\int_{P \in S}(zo^2 + yo^2)\,\mathrm{dm}$, y_O et z_O sont tels que : $\overrightarrow{OP} = x_O.\vec{x} + y_O.\vec{y} + z_O.\vec{z}$.

Pour introduire G, on a $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GP}$, avec :

- **On note a, b et c les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ dans la base** $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $\overrightarrow{OG} = a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z}$, **Dans notre cas** : $\overrightarrow{OG}$=L/2. $\vec{x}_1$= L/2.cosθ_1. $\vec{x}$ + L/2.sinθ_1. $\vec{y}$, ainsi :

$$\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L/2.\cos\theta 1 \\ L/2.\sin\theta 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\overrightarrow{GP}= x_G.\vec{x} + y_G.\vec{y} + z_G.\vec{z}$.

Ainsi, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} xO \\ yO \\ zO \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} xG \\ yG \\ zG \end{pmatrix}.$$

De là : $A_O=\int_{P \in S}(zG + c)^2 + (b + yG)^2\,\mathrm{dm}=\int_{P \in S}(zG^2 + yG^2)\,\mathrm{dm}+2\,c.\int_{P \in S} zG\,\mathrm{dm}+ 2\,b.\int_{P \in S} yG\,\mathrm{dm}+m.c^2+m.b^2$

Or :

- Par définition : $A_G = \int_{P \in S}(zG^2 + yG^2)\,\mathrm{dm}$.
- $zG=\overrightarrow{GP}.\vec{z}$, par conséquent : $\int_{P \in S} zG\,\mathrm{dm}= (\int_{P \in S}\overrightarrow{GP}.\mathrm{dm}).\vec{z}=\vec{0}$ (car G est centre d'inertie de(S)).
- $yG=\overrightarrow{GP}.\vec{y}$, par conséquent : $\int_{P \in S} yG\,\mathrm{dm}= (\int_{P \in S}\overrightarrow{GP}.\mathrm{dm}).\vec{y}=\vec{0}$ (car G est centre d'inertie de(S)).

Ainsi :

$$\boxed{A_O= A_G + m.\,(b^2 + c^2)}$$

- **Par analogie, On calcule B_O :**

$B_O=\int_{P \in S}(zO^2 + xO^2)\,\mathrm{dm}=\int_{P \in S}(zG + c)^2 + (a + xG)^2\,\mathrm{dm}$

$$=\int_{P \in S}(zG^2 + xG^2)\,\mathrm{dm}+2\,c.\int_{P \in S} zG\,\mathrm{dm}+2\,a.\int_{P \in S} xG\,\mathrm{dm}+m.c^2+m.a^2$$

Or :

- Par définition : $B_G = \int_{P \in S}(zG^2 + xG^2)\,\mathrm{dm}$.
- $zG=\overrightarrow{GP}.\vec{z}$, par conséquent : $\int_{P \in S} zG\,\mathrm{dm}= (\int_{P \in S}\overrightarrow{GP}.\mathrm{dm}).\vec{z}=\vec{0}$ (car G est centre d'inertie de(S)).
- $xG=\overrightarrow{1P}.\vec{x}$, par conséquent : $\int_{P \in S} xG\,\mathrm{dm}= (\int_{P \in S}\overrightarrow{GP}.\mathrm{dm}).\vec{x}=\vec{0}$ (car G est centre d'inertie de(S)).

Ainsi :

$$\boxed{B_O= B_G + m.\,(c^2 + a^2)}$$

- **De même, On calcule C_O :**

$$C_O=\int_{P\in S}(xO^2+yO^2)\,dm=\int_{P\in S}(xG+a)^2+(b+yG)^2\,dm$$

$$=\int_{P\in S}\left(xG^2+yG^2\right)dm+2\,a.\int_{P\in S}xG\,dm+2\,b.\int_{P\in S}yG\,dm+m.a^2+m.b^2$$

Or :

- Par définition : $C_G=\int_{P\in S}\left(xG^2+yG^2\right)dm$.
- $xG=\overrightarrow{GP}.\vec{x}$, par conséquent : $\int_{P\in S}xG\,dm=(\int_{P\in S}\overrightarrow{GP}.dm).\vec{x}=\vec{0}$ (car G est centre d'inertie de(S)).
- $yG=\overrightarrow{GP}.\vec{y}$, par conséquent : $\int_{P\in S}yG\,dm=(\int_{P\in S}\overrightarrow{GP}.dm).\vec{y}=\vec{0}$ (car G est centre d'inertie de(S)).

Ainsi :

$$\boxed{C_O=C_G+m.(a^2+b^2)}$$

- **Concernant le calcul du terme D_O :**

$$D_o=\int_{P\in S}yOzO\,dm=\int_{P\in S}(yG+b)(zG+c)\,dm=\int_{P\in S}yGzG\,dm+c.\int_{P\in S}yG\,dm+b.\int_{P\in S}zG\,dm+\int_{P\in S}b.c\,dm$$

Or :

- Par définition : $D_G=\int_{P\in S}yGzG\,dm$.

Ainsi :

$$\boxed{D_O=D_G+mbc}$$

- **De même, le calcul de E_O donne :**

$$E_o=\int_{P\in S}zOxO\,dm=\int_{P\in S}(zG+c)(xG+a)\,dm=\int_{P\in S}zGzG\,dm+c.\int_{P\in S}xG\,dm+a.\int_{P\in S}zG\,dm+\int_{P\in S}a.c\,dm$$

Or :

- Par définition : $E_G=\int_{P\in S}zGxG\,dm$.

Ainsi :

$$\boxed{E_O=E_G+mac}$$

- **Par analogie, le calcul de F_O donne :**

$$F_o=\int_{P\in S}xOyO\,dm=\int_{P\in S}(xG+a)(yG+b)\,dm=\int_{P\in S}xGyG\,dm+b.\int_{P\in S}xG\,dm+a.\int_{P\in S}yG\,dm+\int_{P\in S}a.b\,dm$$

Or :

- Par définition : $F_G=\int_{P\in S}xGyG\,dm$.

Ainsi :

$F_O = F_G + mab$

Dans notre cas : a= $\mathbf{L/2.\cos\theta 1}$, b= $\mathbf{L/2.\sin\theta 1}$ et c=0, de là :

- $A_O = A_G + m(\mathbf{L/2.\sin\theta 1})^2$, $B_O = B_G + m(\mathbf{L/2.\cos\theta 1})^2$ et $C_O = C_G + m(\mathbf{L/2})^2$.
- $D_O = D_G$, $E_O = E_G$ et $F_O = F_G + m.\mathbf{\cos\theta 1.\sin\theta 1.(L/2)}^2$.

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$[\underset{O}{I(S)}]=[\underset{G}{I(S)}]+m.\begin{bmatrix} \mathbf{L^2\sin\theta 1^2/4} & \mathbf{-\cos\theta 1.\sin\theta 1.L^2/4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-\cos\theta 1.\sin\theta 1.L^2/4} & \mathbf{L^2\cos\theta 1^2/4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L^2/4} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Théorème de Huygens :

De manière générale, pour un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G, pour un point O quelconque tel que :

$$\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La relation entre matrices d'inertie de (S) respectivement aux points O et G dans une base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ s'écrit :

$$[\underset{O}{I(S)}]=[\underset{G}{I(S)}]+m.\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ca \\ -ab & c^2+a^2 & -bc \\ -ca & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Toutes les matrices sont exprimées **dans la même base**.

Remarque :

- Ce théorème donne un **résultat remarquable** lorsqu'on cherche à établir une relation entre **moments d'inertie d'un solide (S) par rapport à deux axes parallèles $\Delta(o,\vec{\imath})$ et $\Delta(G,\vec{\imath})$** distants de d, pour cela, prenons une base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ adaptée telle que **$\vec{\imath}=\vec{z}$** et $\vec{y}$ contenu dans le plan des deux droites $\Delta(o,\vec{\imath})$ et $\Delta(G,\vec{\imath})$ **:**

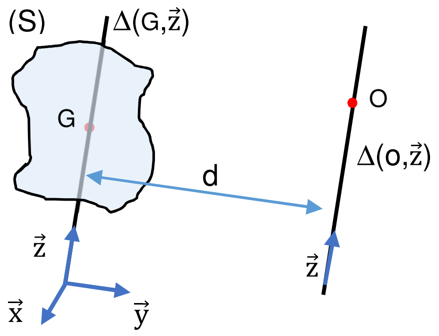

Figure.6. schématisation et paramétrage des deux axes.

Exprimons le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe **$\Delta(o,\vec{\imath})$,** noté **$J_{\Delta o}$**, en fonction du moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $\Delta(G,\vec{\imath})$, noté **$J_{\Delta G}$.**

- Par définition : **$J_{\Delta o}$**= $I(S/\Delta(o,\vec{\imath}))$ $=\vec{\imath}.([I_O(S)].\vec{\imath})$.
- Le théorème de Huygens assure que :

$$[I_O(S)]=[I_G(S)]+m.\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ca \\ -ab & c^2+a^2 & -bc \\ -ca & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec : $\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ -h \end{pmatrix}$, où -h est la composante de $\overrightarrow{OG}$ suivant $\vec{z}$: $-h=\overrightarrow{OG}.\vec{z}$.

Ainsi :

$$[I_O(S)]=[I_G(S)]+m.\begin{bmatrix} d^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & -hd \\ 0 & -hd & d^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Il vient :

$$J_{\Delta o}=\vec{\imath}.([I_G(S)].\vec{\imath})+\vec{\imath}.(m.\begin{bmatrix} d^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & -hd \\ 0 & -hd & d^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.\vec{\imath})$$

- Concernant le premier terme, par définition : **$J_{\Delta G}$**= $I(S/\Delta(G,\vec{\imath}))$ $=\vec{\imath}.([I_G(S)].\vec{\imath})$.
- Le deuxième terme se calcule en remplaçant par $\vec{\imath}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

On a : $m.\begin{bmatrix} d^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & -hd \\ 0 & -hd & d^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=m.\begin{bmatrix} 0 \\ -hd \\ d^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Ainsi :

$$\vec{\imath}.(m.\begin{bmatrix} d^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & -hd \\ 0 & -hd & d^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.\vec{\imath})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.\ m.\begin{bmatrix} 0 \\ -hd \\ d^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=m.d^2$$

En synthèse :

$$\boxed{J_{\Delta o}=J_{\Delta G}+m.d^2}$$

Les **moments d'inertie d'un solide (S) (**de masse m et de centre d'inertie G) **par rapport à deux axes parallèles $\Delta(o,\vec{\imath})$ et $\Delta(G,\vec{\imath})$** distants de d sont liés par la relation :

$$J_{\Delta o}=J_{\Delta G}+m.d^2$$

Où :

- **$J_{\Delta o}$:** moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $\Delta(o,\vec{\imath})$.
- **$J_{\Delta G}$:** moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $\Delta(G,\vec{\imath})$.
- d : distance entre les deux axes $\Delta(o,\vec{\imath})$ et $\Delta(G,\vec{\imath})$.

7. Matrice d'inertie d'un ensemble de solides :

On a souvent besoin d'exprimer la matrice d'inertie d'un ensemble de solides (S1), (S2),…et (Sn) connaissant la matrice d'inertie de chaque solide en son centre d'inertie : $[\underset{G1}{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{S1})]$, $[\underset{G2}{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{S2})]$,… **et** $[\underset{Gn}{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{Sn})]$.

Prenons l'exemple du robot Ericc 3 dont le modèle adopté est constitué de deux solides (S) et (S'), exprimons la matrice d'inertie de l'ensemble E=SUS' dans la base$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ **au point O :** $[\underset{O}{I}(E = SUS')]$.

Pour cela, on détaille chaque terme de cette matrice :

- $A=\int_{P \in E = SUS'}(z^2+y^2)\,dm=\int_{P \in S}(z^2+y^2)\,dm+\int_{P \in S'}(z^2+y^2)\,dm$
- Par définition : $\int_{P \in S}(z^2+y^2)\,dm= \int_{P \in S}(zo^2+yo^2)\,dm=A_o$.
- de même : $\int_{P \in S'}(z^2+y^2)\,dm= \int_{P \in S'}(zo^2+yo^2)\,dm=A'_o$.

Ainsi :

$$A=A_o+A'_o$$

Par analogie, on montre que :

$$B=B_o+B'_o,\ C=C_o+C'_o,\ D=D_o+D'_o,\ E=E_o+E'_o \text{ et } F=F_o+F'_o.$$

Avec

- A,B,C,D,E et F les termes de la matrice d'inertie de E=SUS' au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $[\underset{O}{I}(E = SUS')]$.
- A_o,B_o,C_o,D_o,E_o et F_o les termes de la matrice d'inertie de (S) au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $[\underset{O}{I}(S)]$.
- A'_o,B'_o,C'_o,D'_o,E'_o et F'_o les termes de la matrice d'inertie de (S') au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $[\underset{O}{I}(S')]$.

Ainsi :

$$[\underset{O}{I}(E = SUS')]= [\underset{O}{I}(S)]+[\underset{O}{I}(S')]$$

De manière générale, pour un ensemble de solides (S1), (S2),…et (Sn), pour un point O quelconque, **la matrice d'inertie de l'ensemble des solides au point O** est égale à **la somme des matrices d'inertie de chaque solide au même point O** :

$$[\underset{O}{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{S1} \cup \boldsymbol{S2} \cup \ldots \cup \boldsymbol{Sn})]=[\underset{O}{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{S1})]+[\underset{O}{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{S2})]+\ldots+[\underset{O}{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{Sn})]$$

- Toutes les matrices sont exprimées **au même point O et dans la même base.**

Remarque :

- On donne souvent les matrices d'inertie de chaque solide en son centre d'inertie : $[\underset{G1}{I}(S1)]$, $[\underset{G2}{I}(S2)]$,…et $[\underset{Gn}{I}(Sn)]$. Pour établir la matrice d'inertie de l'ensemble $S1 \cup S2 \cup \ldots \cup Sn$, il faut **commencer par exprimer la matrice d'inertie de chaque solide au même point et dans la même base.**

8. Relation entre moment cinétique et matrice d'inertie :

8.1. Relation générale :

Par définition, le moment cinétique d'un solide **(S)** dans son mouvement par rapport au repère R **en un point A quelconque** s'écrit :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

- Pour lier le moment cinétique à la matrice d'inertie, reprenons la relation entre opérateur d'inertie et matrice d'inertie :

$$\vec{L}_O(S,\vec{v}) = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP})dm = [I_O(S)].\vec{v}.$$

- Faisons apparaitre le vecteur $\overrightarrow{AP}$ dans l'expression $\vec{V}(P/R)$ en utilisant la relation de changement de point de moment entre **A et P** :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}$$

Ainsi :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP})dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A/R)dm + \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP})dm$$

- Remarquons au niveau du premier terme que :

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A/R)dm = (\int_{P \in S} \overrightarrow{AP}dm) \wedge \vec{V}(A/R) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R).$$

- Le deuxième terme est simplement $\vec{L}_A(S, \vec{\Omega}(S/R))$:

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP})dm = [I_A(S)].\vec{\Omega}(S/R).$$

Il vient :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R) + [I_A(S)].\vec{\Omega}(S/R).}$$

Ainsi, le moment cinétique est lié à la matrice d'inertie du solide (S) par la relation :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R) + [I_A(S)].\vec{\Omega}(S/R).$$

Où **A est un point quelconque.**

Remarque :

- Le produit matriciel $[I_A(S)].\vec{\Omega}(S/R)$ **n'est possible que si** $\vec{\Omega}(S/R)$ **est exprimée dans la même base que** $[I_A(S)]$**.**

8.2. Deux cas remarquables :

La relation entre moment cinétique et matrice d'inertie du solide (S) se simplifie si :

- **A est un point fixe dans le repère R**, dans ce cas :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = [I_A(S)].\vec{\Omega}(S/R).$$

Ainsi :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\left([I_A(S)].\vec{\Omega}(S/R)\right)\right]_R.$$

- **A est confondu avec le centre d'inertie G de (S) (A=G)**, dans ce cas :

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_G(S)].\vec{\Omega}(S/R).$$

Ainsi :

$$\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\left([I_G(S)].\vec{\Omega}(S/R)\right)\right]_R.$$

9. L'énergie cinétique, forme torsorielle :

L'objectif de ce paragraphe est d'établir, à partir de la définition de l'énergie cinétique sous forme intégrale, **une nouvelle forme ''torsorielle''** qui n'implique que des torseurs précédemment étudiés (torseurs cinématique et cinétique), par conséquent le calcul de l'énergie cinétique devient plus simple à effectuer.

Partons de la définition de l'énergie cinétique d'un solide (S) (de masse m et de centre d'inertie G) dans son mouvement par rapport à un repère R :

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}.\int_{P \in S} [\vec{V}(P/R)]^2\, dm$$

- Faisons apparaitre le vecteur $\vec{V}(A/R)$ dans l'expression de $\vec{V}(P/R)$ en utilisant la relation de changement de point de moment entre **A <u>(point lié à (S))</u> et P** :

$$\vec{V}(P/R) = \underline{\vec{V}(A \in S/R)} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}$$

Ainsi :

$$E_{C_A}(S/R) = \frac{1}{2}.\int_{P \in S} \vec{V}(P/R).(\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP})\, dm$$

$$= \frac{1}{2}.\int_{P \in S} \vec{V}(P/R).\vec{V}(A \in S/R)\, dm + \frac{1}{2}.\int_{P \in S} \vec{V}(P/R).(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP})\, dm$$

- Remarquons au niveau du premier terme que :

$$\frac{1}{2}.\int_{P \in S} \vec{V}(P/R).\vec{V}(A \in S/R)\, dm = \frac{1}{2}.\left(\int_{P \in S} \vec{V}(P/R)\, dm\right).\vec{V}(A \in S/R) = \frac{1}{2}.m.\vec{V}(G/R).\vec{V}(A/R)$$

- Concernant le deuxième terme, remarquons que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ est indépendant de l'intégrale, on peut le faire sortir en utilisant la propriété du produit mixte :

$$\vec{V}(P/R).(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}) = \vec{\Omega}(S/R).(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)).$$

Il vient :

$$\frac{1}{2}.\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).(\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP})\,dm=\frac{1}{2}.\int_{P\in S}\vec{\Omega}(P/R).(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R))\,dm$$

$$=\frac{1}{2}.\vec{\Omega}(S/R).[\int_{P\in S}(\overrightarrow{AP}(S/R)\wedge\vec{V}(P/R))\,dm]$$

$$=\frac{1}{2}.\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_A(S/R)$$ *(par définition du moment cinétique)*

En synthèse :

$$E_C(S/R)=\frac{1}{2}.m.\vec{V}(G/R).\vec{V}(A\in S/R)+\frac{1}{2}.\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_A(S/R)$$

9.1. Notion mathématique, le produit de deux torseurs (comoment) :

Soient deux torseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ **exprimés au même point O** :

$$\{\mathcal{T}_1\}=_O\left\{\begin{matrix}\vec{R}1\\ \vec{M}_O1\end{matrix}\right\}\text{ et }\{\mathcal{T}_2\}=_O\left\{\begin{matrix}\vec{R}2\\ \vec{M}_O2\end{matrix}\right\}$$

On appelle **produit des deux torseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ ou comoment le réel** :

$$\{\mathcal{T}_1\}.\{\mathcal{T}_2\}=\vec{R}1.\vec{M}_O2+\vec{R}2.\vec{M}_O1$$

Ce produit est un nombre réel indépendant du point de réduction O.

Remarque :

Le comoment ne dépend pas du point O choisi, par conséquent il est souvent pratique de choisir un point de réduction O où les torseurs **$\{\mathcal{T}_1\}$ ou/et $\{\mathcal{T}_2\}$** ont une forme simple (moment du torseur nul par exemple).

9.2. Expression de l'énergie cinétique en termes de torseurs :

En utilisant la définition du comoment, l'expression de l'énergie cinétique précédemment établie s'écrit :

$$E_C(S/R)=\frac{1}{2}._A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A\in S/R)\end{matrix}\right\}._A\left\{\begin{matrix}m.\vec{V}(G/R)\\ \vec{\sigma}_A(S/R)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}.\{\mathcal{V}(S/R)\}.\{\mathcal{C}(S/R)\}$$

Théorème :

L'énergie cinétique d'un solide (S) (de masse m et de centre d'inertie G) dans son mouvement par rapport à un repère R **est égale à la moitié du produit du torseur cinématique de (S) par le torseur cinétique de (S)** :

$$E_C(S/R)=\frac{1}{2}.\{\mathcal{V}(S/R)\}.\{\mathcal{C}(S/R)\}$$

Qui s'écrit aussi :

$$E_C(S/R)=\frac{1}{2}.m.\vec{V}(G/R).\vec{V}(A\in S/R)+\frac{1}{2}.\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_A(S/R)$$

Où A est un point lié au solide (S).

9.3. Cas particuliers :

9.3.1. Energie cinétique d'un solide en mouvement de translation :

Dans ce cas, tous les points du solide (S) ont la même trajectoire ainsi que la même vitesse :

$$\{\mathcal{V}\,(S/R)\}_{\forall P}=\begin{Bmatrix} \vec{O} \\ \vec{V}(A \in S/R) = \vec{V}(G/R) \end{Bmatrix}$$

L'énergie cinétique en un point P quelconque s'écrit :

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}.m.\vec{V}(G/R).\vec{V}(G/R) + \frac{1}{2}.\vec{O}.\vec{\sigma}_A(S/R) = \frac{1}{2}.m.[\vec{V}(G/R)]^2$$

L'énergie cinétique d'un solide (S) (de masse m et de centre d'inertie G) en mouvement de translation par rapport à un repère R est **égale à la moitié du produit de sa masse par le carré de la vitesse de son centre d'inertie** :

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}.m.[\vec{V}(G/R)]^2$$

9.3.2. Energie cinétique d'un solide en mouvement de rotation :

Soit un solide (S) animé d'un mouvement de rotation autour d'un **axe $(o,\vec{z})$**, le torseur cinématique associé à (S) et exprimé au point o s'écrit :

$$\{\mathcal{V}\,(S/R)\}_{O}=\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\,(S/R) = \omega z.\vec{z} \\ \vec{V}(O \in S/R) = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- L'énergie cinétique au point O s'écrit :

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}.m.\vec{V}(G/R).\vec{V}(O \in S/R) + \frac{1}{2}.\vec{\Omega}(P/R).\vec{\sigma}_O(S/R) = \frac{1}{2}.\omega z.\vec{z}.\vec{\sigma}_O(S/R).$$

- Pour expliciter ce calcul, introduisons la matrice d'inertie du solide (S) au point O dans une base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, de manière générale, elle est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C = Joz \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Où **Joz** rappelle que le terme C de la matrice d'inertie **correspond au moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(o,\vec{z})$.**

- Calculons $\vec{\sigma}_O(S/R)$:

On remarque que o est un point fixe dans le repère R (point de l'axe **$(o,\vec{z})$**), ainsi le moment cinétique en O s'écrit :

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = [I_O(S)].\vec{\Omega}\,(S/R) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C = Joz \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega z \end{pmatrix} = \omega z. \begin{bmatrix} -E \\ -D \\ Joz \end{bmatrix}.$$

- Le calcul de l'énergie cinétique donne :

$$\mathbf{E_C(S/R)} = \frac{1}{2}.\omega z.\vec{z}.\vec{\sigma}_O(S/R) = \frac{1}{2}.\omega z.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.\omega z.\begin{bmatrix}-E\\-D\\Joz\end{bmatrix} = \frac{1}{2}.\omega z^2.\mathbf{Joz}$$

L'énergie cinétique d'un solide (S) (de masse m et de centre d'inertie G) en mouvement de rotation par rapport à un axe **$(o,\vec{z})$** est **égale à la moitié du produit de son moment d'inertie par rapport à l'axe $(o,\vec{z})$ par le carré de la vitesse de son centre d'inertie** :

$$\mathbf{E_C(S/R)} = \frac{1}{2}.J_{oz}.\omega z^2$$

10. Rappels mathématiques utiles :

10.1. Produit d'une matrice par un vecteur :

Soit une matrice **M carré de taille 3x3** exprimé dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$M = \begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 \\ M21 & M22 & M23 \\ M31 & M32 & M33 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Soit un vecteur $\vec{v} = v1.\vec{x}_1 + v2.\vec{y}_1 + v3.\vec{z}_1$, **écrit en colonne :**

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}1)}$$

Le produit de la matrice M par le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur (taille 3x1), pour le calculer il faut :

- **Exprimer M et $\vec{v}$ dans la même base, le plus pratique est d'exprimer le vecteur $\vec{v}$ dans la base de la matrice M :**

$$\vec{v} = v'1.\vec{x} + v'2.\vec{y} + v'3.\vec{z} = \begin{pmatrix} v'1 \\ v'2 \\ v'3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- Ensuite calculer ce produit en respectant les règles de calcul matriciel **:**

$$M.\vec{v} = M = \begin{bmatrix} M11 & M12 & M13 \\ M21 & M22 & M23 \\ M31 & M32 & M33 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} . \begin{pmatrix} v'1 \\ v'2 \\ v'3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} M11.v'1 + M12.v'2 + M13.v'3 \\ M21.v'1 + M22.v'2 + M23.v'3 \\ M31.v'1 + M32.v'2 + M33.v'3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

10.2. Produit scalaire de deux vecteurs :

Produit scalaire de deux vecteurs exprimés dans deux bases différentes :

Soit deux vecteurs $\vec{u} = u1.\vec{x} + u2.\vec{y} + u3.\vec{z}$ et $\vec{v} = v1.\vec{x}_1 + v2.\vec{y}_1 + v3.\vec{z}_1$ exprimés respectivement dans les bases **orthonormées directes** $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}1)$:

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ **est un nombre réel tel que :**

$\vec{u}.\vec{v} = u1.v1.\vec{x}.\vec{x}_1 + u1.v2.\vec{x}.\vec{y}_1 + u1.v3.\vec{x}.\vec{z}_1 + u2.v1.\vec{y}.\vec{x}_1 + u2.v2.\vec{y}.\vec{y}_1 + u2.v3.\vec{y}.\vec{z}_1 + u3.v1.\vec{z}.\vec{x}_1 + u3.v2.\vec{z}.\vec{y}_1 + u3.v3.\vec{z}.\vec{z}_1$

Produit scalaire de deux vecteurs exprimés dans la même base :

Soit deux vecteurs $\vec{u} = u1.\vec{x} + u2.\vec{y} + u3.\vec{z}$ et $\vec{v} = v1.\vec{x} + v2.\vec{y} + v3.\vec{z}$ exprimés dans la base **orthonormée directe** $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. **Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$** du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ **est le nombre réel :**

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix} = u1.v1 + u2.v2 + u3.v3$$

Remarque :

- Ce dernier résultat est déduit de la première propriété en prenant deux bases identiques.