3. DYNAMIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

- Principe Fondamental de la Dynamique –

Elaboré par : Youssef RAHOU, octobre 2017

1. Introduction :

La dynamique du solide indéformable est une discipline de la mécanique qui étudie les **systèmes matériels en mouvement, ce mouvement est due aux actions mécaniques qui leurs sont appliquées.** Les causes (**efforts et moments) et les conséquences (grandeurs cinématiques ou plus correctement cinétiques)** sont étudiées à travers **le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.)**, la notion de temps ainsi que la notion de masse sont présentes.

Les deux chapitres précédents ont permis d'expliciter complétement le torseur dynamique (résultante et moment dynamique), tout en mettant en place les outils permettant d'exprimer ces deux grandeurs en utilisant la matrice d'inertie, quantité propre à chaque solide. Ainsi, la formulation du Principe Fondamental de la Dynamique devient possible.

Le présent chapitre permet de formuler le **Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.),** principe énoncé par Newton en 1687. Il s'agit d'un principe, donc d'une affirmation indémontrable mais qui permet tout de même de comprendre les phénomènes observés. Ce principe est la base d'une théorie, appelée **Mécanique Classique ou Mécanique Newtonienne**. Un principe physique est considéré comme correct tant qu'aucune expérience n'a pu le contredire. C'est seulement en 1905 qu'Einstein met le P.F.D. en défaut en mettant en place une nouvelle théorie (relativité restreinte). Cependant, **le P.F.D. continue à être valable** pour quantifier les phénomènes mécaniques **tant que les vitesses restent faibles devant celle de la lumière**. **Ce qui est le cas pour la majorité des applications d'ingénierie.**

On se limitera, dans notre cas, à l'application du Principe Fondamental de la Dynamique **dans un repère galiléen.**
Un repère galiléen approché est un repère **lié à la Terre**, dans un espace suffisamment réduit, le principe fondamental de la dynamique est vérifié.

2. Le principe fondamental de la dynamique :

2.1. Enoncé du principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) :

Il existe au moins un **repère galiléen R_g** et au moins une chronologie, tels que pour tout sous-ensemble (e) d'un ensemble matériel (E), **le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à Rg** soit **égal au torseur des actions mécaniques exercées par l'extérieur sur (e)** :
En résumé, il existe au moins un repère galiléen, au moins une chronologie permettant d'écrire :

$$\{\mathcal{D}\ (e/R_g)\} = \{\mathcal{T}\ (\bar{e} \rightarrow e)\}$$

Remarque :

- Une chronologie galiléenne est une manière de mesurer le temps, obtenue par les horloges classiques.
- Quand **le torseur dynamique est nul, le principe fondamental de la dynamique se réduit au principe fondamental de la statique**, et ce principalement lorsque :
  - **La masse** du système étudié est **négligeable**.
  - Le système étudié est en équilibre par rapport à R_g (Système au repos ou en translation uniforme par exemple : $\vec{\Omega}(S/Rg)=\vec{0}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{Cste}$).

2.2. Théorème de la résultante dynamique (T.R.D.) :

Pour tout sous-ensemble (e) d'un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g, **la résultante dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g** est **égale à la résultante générale du torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques extérieures** appliquées à (e) :

$$m.\vec{\Gamma}(G/Rg) = \vec{R}(\bar{e} \rightarrow e)$$

2.3. Théorème du moment dynamique (T.M.D.) :

Pour tout sous-ensemble (e) d'un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère galiléen Rg, **le moment dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g** est **égal au moment résultant du torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques extérieures** appliquées à (e) :

$$\underset{A}{\vec{\delta}}(e/Rg) = \underset{A}{\vec{M}}(\bar{e} \rightarrow e)$$

Où A est un point quelconque.

Remarque :

- Dans une logique de causes (actions mécaniques) et effets (grandeurs dynamiques), résoudre un problème de mécanique classique revient donc à :

- Déterminer des inconnues de liaison ou des efforts, si les grandeurs dynamiques sont imposées.
- Déterminer l'équation différentielle du second ordre découlant des théorèmes de la résultante et du moment dynamiques, en éliminant toutes les composantes inconnues des actions mécaniques**. Cette équation différentielle est appelée équation de mouvement.**

2.4. Théorème des actions mutuelles :

Pour formuler ce théorème, prenons un cas concret qui est celui du robot Ericc 3 dont le schéma cinématique simplifié est représenté ci-dessous :

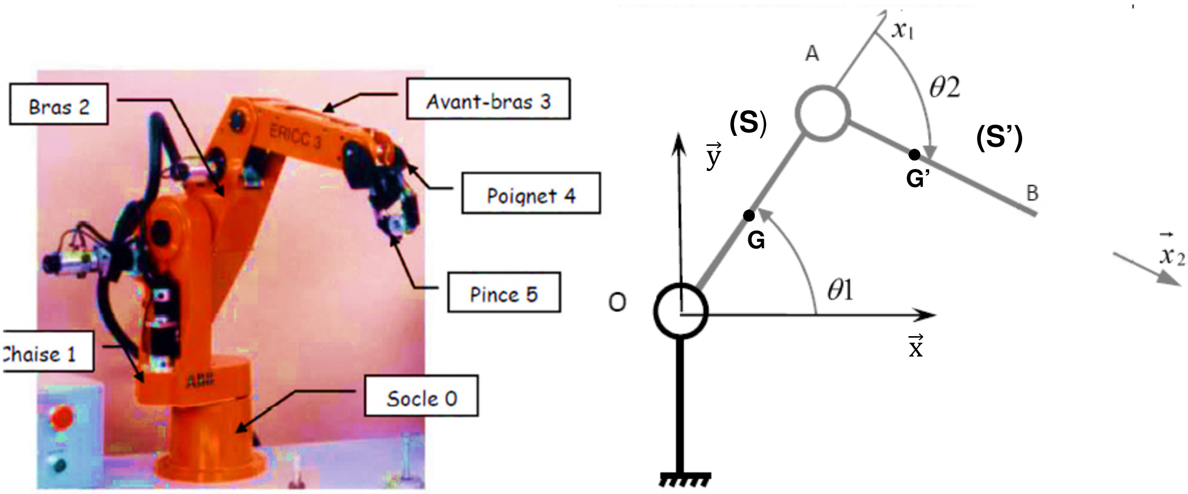

Figure.1. Robot Ericc 3, mécanisme réel et schéma cinématique simplifié à deux bras.

On considère le modèle du robot à deux bras indéformables et homogènes :

- (S) de masse m, de centre d'inertie G et de longueur L.
- (S') de masse m', de centre d'inertie G' et de longueur L'

Considérons l'ensemble des deux bras (**E**)={**S**∪**S'**} en mouvement par rapport au repère galiléen lié au bâti $\mathbf{R}(\mathbf{O},\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}})$.

- Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (**S**) seul, s'écrit :

$$\{\mathcal{D}\ (S/R)\} = \{\mathcal{T}\ (\overline{S} \to S)\}$$

Où $\overline{\mathbf{S}}$ représente l'extérieur de (**S**), il est donc constitué de (**S'**) et de l'extérieur de (**E**) : $\overline{\mathbf{S}}$ = **S'**∪ $\overline{\mathbf{E}}$, d'où l'écriture de **l'expression 1** :

$$\{\mathcal{D}\ (S/R)\} = \{\mathcal{T}\ (S' \to S)\} + \{\mathcal{T}\ (\overline{E} \to S)\}$$

- De même, le principe fondamental de la dynamique appliqué à (**S'**) seul, s'écrit :

$$\{\mathcal{D}\ (S'/R)\} = \{\mathcal{T}\ (\overline{S'} \to S')\}$$

Où $\overline{\mathbf{S'}}$ représente l'extérieur de (**S'**), il est donc constitué de (**S**) et de l'extérieur de (**E**) : $\overline{\mathbf{S'}}$ = **S**∪ $\overline{\mathbf{E}}$, d'où l'écriture de **l'expression 2** :

$$\{\mathcal{D}\ (S'/R)\} = \{\mathcal{T}\ (S \to S')\} + \{\mathcal{T}\ (\overline{E} \to S')\}$$

- En sommant membre à membre les deux expressions 1 et 2, on obtient **l'expression 3** :

$$\{\mathcal{D}\,(S/R)\} + \{\mathcal{D}\,(S'/R)\} = \{\mathcal{T}\,(S' \to S)\} + \{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to S)\} + \{\mathcal{T}\,(S \to S')\} + \{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to S')\}$$

- Remarquons que :
  - $\{\mathcal{D}\,(S/R)\} + \{\mathcal{D}\,(S'/R)\} = \{\mathcal{D}\,(E = S \cup S'/R)\}$.
  - $\{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to S)\} + \{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to S')\} = \{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to E = S \cup S')\}$.
- Par conséquent, on obtient une nouvelle **expression 4** :

$$\{\mathcal{D}\,(E/R)\} = \{\mathcal{T}\,(S' \to S)\} + \{\mathcal{T}\,(S \to S')\} + \{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to E)\}$$

- En fin, L'application du principe fondamental de la dynamique à (**E**) s'écrit :

$$\{\mathcal{D}\,(E/R)\} = \{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to E)\}$$

- **L'expression 4** devient :

$$\{\mathcal{T}\,(S' \to S)\} + \{\mathcal{T}\,(S \to S')\} = \{0\}$$

De manière générale pour des sous-ensembles **(S)** et **(S')** d'un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g, **Le torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques** exercées par (S) sur (S') est égal à **l'opposé du torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques** exercées par (S') sur (S) :

$$\{\mathcal{T}\,(S' \to S)\} = -\{\mathcal{T}\,(S \to S')\}$$

Remarque :

- Le torseur des actions mécaniques $\{\mathcal{T}\,(\overline{S} \to S)\}$ rassemble :
  - Les actions mécaniques venant de (S') $\{\mathcal{T}\,(S' \to S)\}$ telle l'action mécanique transmissible de la liaison pivot entre (S) et (S').
  - Les actions mécaniques venant de ($\overline{E}$) $\{\mathcal{T}\,(\overline{E} \to S)\}$ tels le poids du bras (**S**), l'action mécanique transmissible de la liaison pivot entre (S) et le bâti, le couple moteur au niveau de cette liaison bâti-bras (**S**)…etc.

3. Démarche de résolution d'un problème dynamique :

Le Principe Fondamental de la dynamique s'applique à un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g, cet ensemble peut être composé de plusieurs sous-ensembles (Si), **pour lesquels on peut appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique.** Ainsi une étude dynamique rigoureuse comporte en général les étapes suivantes :

1. Etablir **un graphe de structure** faisant apparaitre les données et les inconnues.
2. Exprimer les torseurs des **actions mécaniques extérieures, à savoir** :
   - **Les actions mécaniques à distance**, tel que le poids (**bien repérer les solides à masse négligeable**).
   - **Les actions mécaniques de contact,** tel que les efforts et les couples extérieurs (couple moteur par exemple) ; les efforts de frottements ainsi que les actions mécaniques de liaisons.
3. Dans le cas où le système à isoler n'est pas défini, isoler **les solides ou ensembles de solides pour lesquels une ou plusieurs actions mécaniques sont connues**.
4. Appliquant **le Principe Fondamental de dynamique :**
   - Déterminer le ou les théorèmes à exprimer (T.R.D ou/et T.M.D).
   - Déterminer **les projections** du T.R.D ou/et T.M.D. à exprimer ainsi que **le point de réduction pour le T.M.D** (bien repérer les solides à masse concentrée au centre d'inertie).
5. Ecrire explicitement le T.R.D. ou/et le T.M.D suivant ces projections.