

CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS

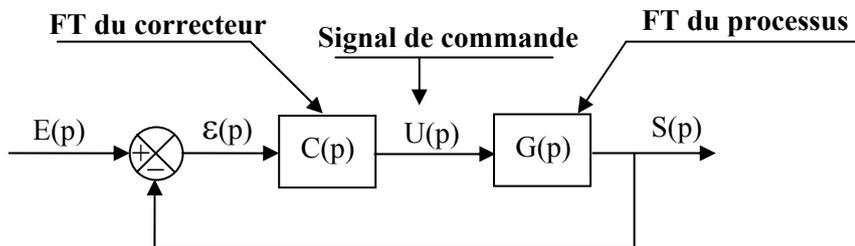
I. INTRODUCTION :

En général le comportement attendu d'un système asservi doit satisfaire un cahier des charges :

- Précision : – erreur statique $\epsilon_s = 0$ ou $\epsilon_s \leq \epsilon_{s0}$;
– erreur de traînage $\epsilon_T = 0$ ou $\epsilon_T \leq \epsilon_{T0}$;
- Rapidité : $t_{r5\%} \leq t_{r0}$;
- Stabilité : respect des marges de stabilité : $MP \geq MP_0$ et $MG \geq MG_0$;
- Amortissement : premier dépassement relatif $D_1\% \leq X\%$ ou D_1 nul .

Dans la plus part des cas le système ne peut satisfaire toutes les exigences. Il est donc souvent nécessaire d'implanter dans la chaîne d'asservissement un composant supplémentaire appelé correcteur.

Le correcteur aura pour but d'améliorer les exigences non satisfaites sans nuire aux autres, en effet on a vu dans le chapitre précédent que la précision et la stabilité sont deux performances en conflit.



Le correcteur C(p) doit permettre de réaliser le meilleur compromis entre la précision , la stabilité et la rapidité du système asservi.

II. CORRECTION PROPORTIONNELLE :

La fonction de transfert d'un correcteur proportionnel est $C(p) = K_C$, le gain K_C étant réglable.

La réalisation de ce type de correcteur peut être à base d'amplificateurs opérationnels.

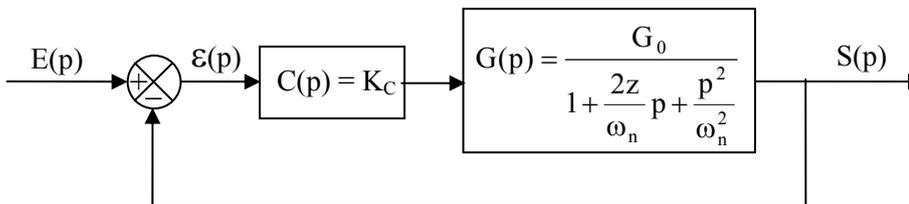
La FTBO du système corrigé est : $H_{bo_c}(p) = C(p).G(p) = K_C.G(p)$.

En posant : $G(p) = \frac{G_0}{p^\alpha D(p)}$ avec $N(0)=1$ et $D(0)=1$, on aura $H_{bo_c}(p) = \frac{K_C.G_0}{p^\alpha D(p)}$

Donc le gain de boucle ouverte est $K_{bo} = K_C.G_0$.

L'augmentation du gain K_C du correcteur \Rightarrow augmentation du gain de boucle ouverte K_{bo} donc l'augmentation de la précision et de la rapidité du système asservi, mais la diminution de la stabilité (diminution des marges de phase et de gain) et le risque même d'instabilité.

Exemple :

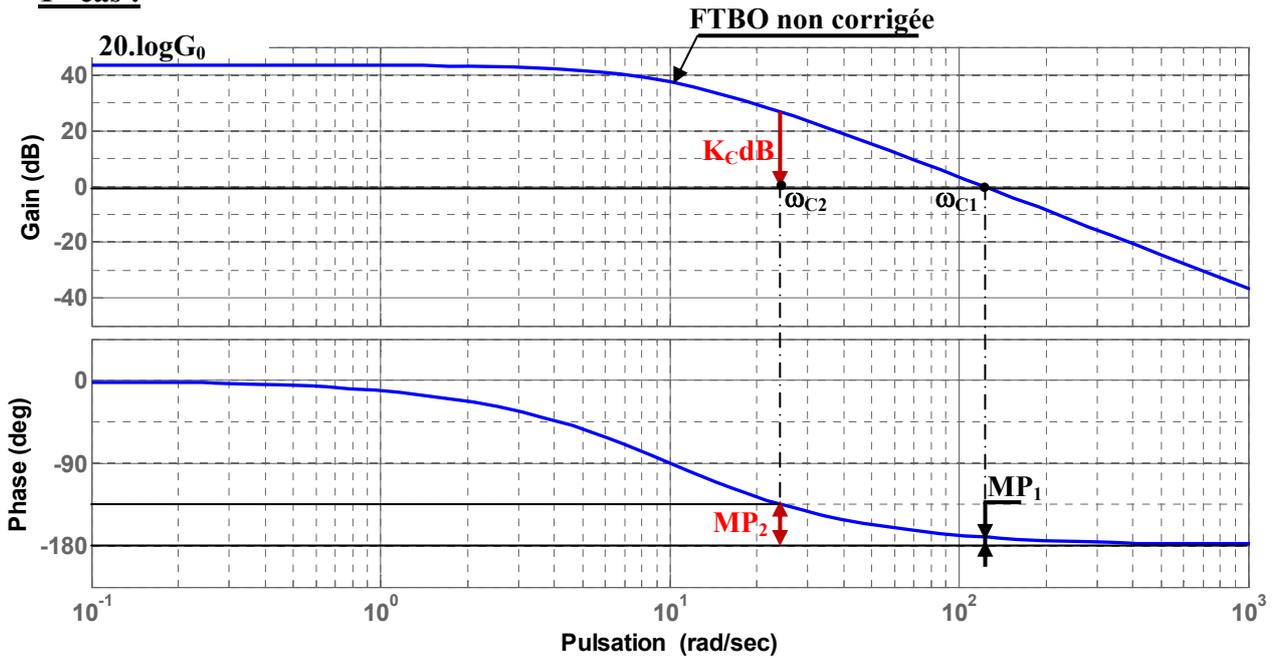


La FTBO du système non corrigé ($K_C = 1$) est $H_{bo}(p) = G(p)$, de gain de boucle ouverte $K_{bo} = G_0$, c'est la FT d'un système de second ordre, d'où :

$\forall \omega \quad \Phi(\omega) > -180^\circ \Rightarrow$ une marge de phase $MP > 0$ et une marge du gain $MG = \infty$. Le système est donc théoriquement stable, cependant pour une valeur trop élevée de G_0 , la marge de phase peut être insuffisante.

**** Supposons que le critère choisi pour corriger le système est la marge de phase : $MP = 45^\circ$.**

1^{er} cas :



La marge de phase MP_1 du système non corrigé est jugée insuffisante ($MP_1 = 10^\circ$). Pour régler la marge de phase à $MP_2 = 45^\circ$, il faut chercher la nouvelle pulsation de coupure à 0dB : ω_{C2} telle que :

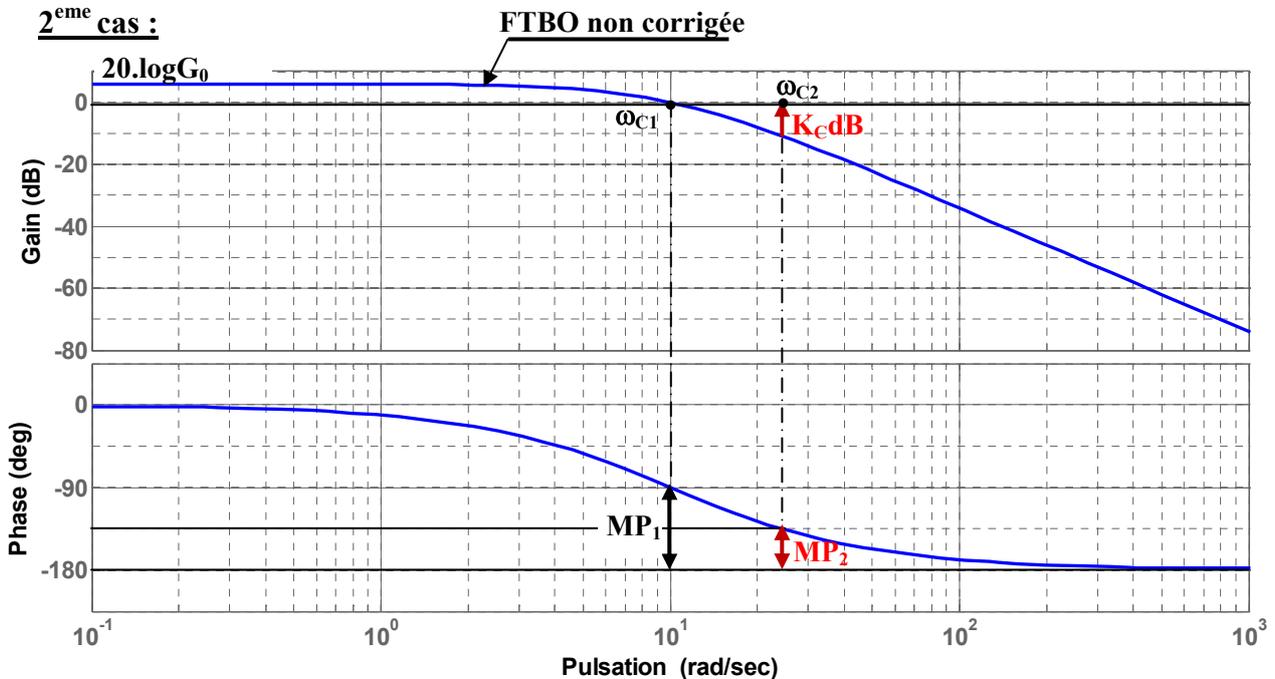
$$MP_2 = 180^\circ + \Phi(\omega_{C2}) = 45^\circ \text{ donc } \Phi(\omega_{C2}) = -135^\circ.$$

Il faut donc translater la courbe du gain vers le bas de $K_C \text{ dB} = 20 \cdot \log K_C = -27 \text{ dB}$

$$K_C = 10^{\frac{-27}{20}} = 0.0447 ; \quad K_C < 1 \text{ (atténuation).}$$

Après correction le gain de boucle ouverte devient $K_{bo} = K_C \cdot G_0 < G_0$, ainsi on a diminué la précision et la rapidité mais on a amélioré la stabilité.

2^{eme} cas :



Pour ce cas, la marge de phase du système non corrigé est très suffisante ($MP_1 = 90^\circ$). Pour régler la marge de phase à $MP_2 = 45^\circ$, il faut translater la courbe du gain vers le haut de $K_C \text{ dB} = 20 \cdot \log K_C = 11 \text{ dB}$

$$K_C = 10^{\frac{11}{20}} = 3.548 ; \quad K_C > 1 \text{ (amplification).}$$

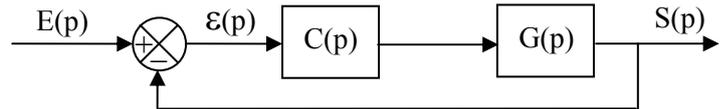
Après correction le gain de boucle ouverte devient $K_{bo} = K_C \cdot G_0 > G_0$, ainsi la stabilité du système reste satisfaisante, et on a amélioré la précision et la rapidité.

III. CORRECTION PROPORTIONNELLE – INTEGRALE :

VI.1. Correcteur intégrateur pur

$$C(p) = \frac{1}{T_i \cdot p}$$

L'insertion de ce type de correcteur dans la chaîne d'asservissement permet d'améliorer la précision mais risque de rendre le système instable ($\forall \omega \quad \arg[C(j\omega)] = -90^\circ$)

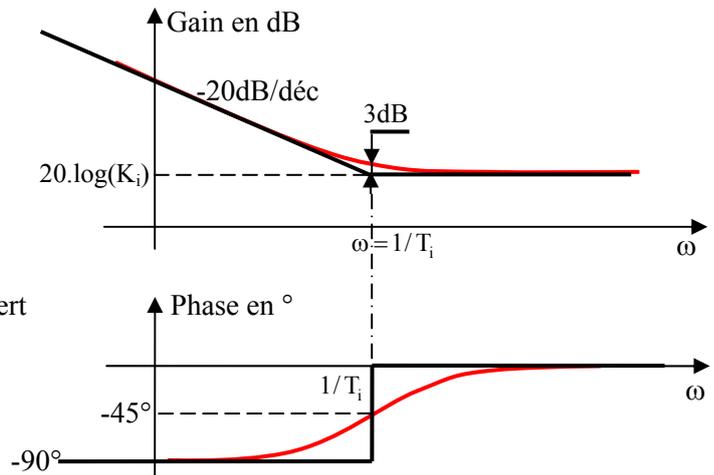


VI.2. Correcteur proportionnel intégral (P.I)

En général Le correcteur intégrateur pur est associé au correcteur proportionnel :

$$C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

$$C(p) = K_i \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$$



La figure ci-contre représente le lieu de transfert de C(p) dans le plan de Bode.

Remarque : pour $\omega = 10/T_i$ on a $\arg(C(j\omega)) = \arg\left(C\left(\frac{10}{T_i} j\right)\right) = \arctan(10) - 90^\circ = -5.75^\circ$

Le correcteur P.I agit en basses fréquences, pour $K_i = 1$ il permet d'améliorer la précision à stabilité constante.
Pour ne pas influencer la stabilité, la constante du temps T_i est telle que $1/T_i \ll \omega_c$, on choisit souvent $1/T_i = \omega_c/10$ (ω_c la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO à corriger).

Réglage du correcteur :

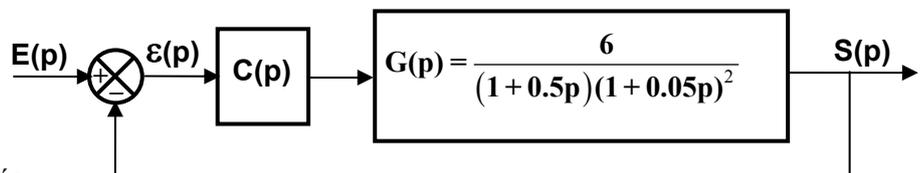
- Choix de K_i pour satisfaire le critère de stabilité (réglage de l'une des marges de phase ou de gain) : Démarche de la correction proportionnelle.
- Choix de T_i telle que $1/T_i = \omega_c/10$ (ω_c la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO à corriger) et **Attention** : Ce réglage diminue la marge de phase après correction de $5.75^\circ \approx 6^\circ$.

Exemple

Soit à corriger le système asservi ci-contre.

Le cahier des charges impose :

- une erreur statique à une entrée en échelon unitaire (erreur indicielle) $\epsilon_{s\infty} = 0$.
- Une marge de phase $MP = 45^\circ$.



La FTBO du système non corrigé ($C(p) = 1$) est : $H_{BO_{NC}}(p) = G(p) = \frac{6}{(1 + 0.5p)(1 + 0.05p)^2}$.

Sur les diagrammes de Bode de $H_{BO_{NC}}(p)$ on remarque que l'asservissement non corrigé est stable avec une marge de phase $MP_0 = 51^\circ$. La classe de $H_{BO_{NC}}(p)$ est $\alpha = 0$ donc l'erreur statique à un échelon unitaire $\epsilon_{s\infty}$ est non nulle.

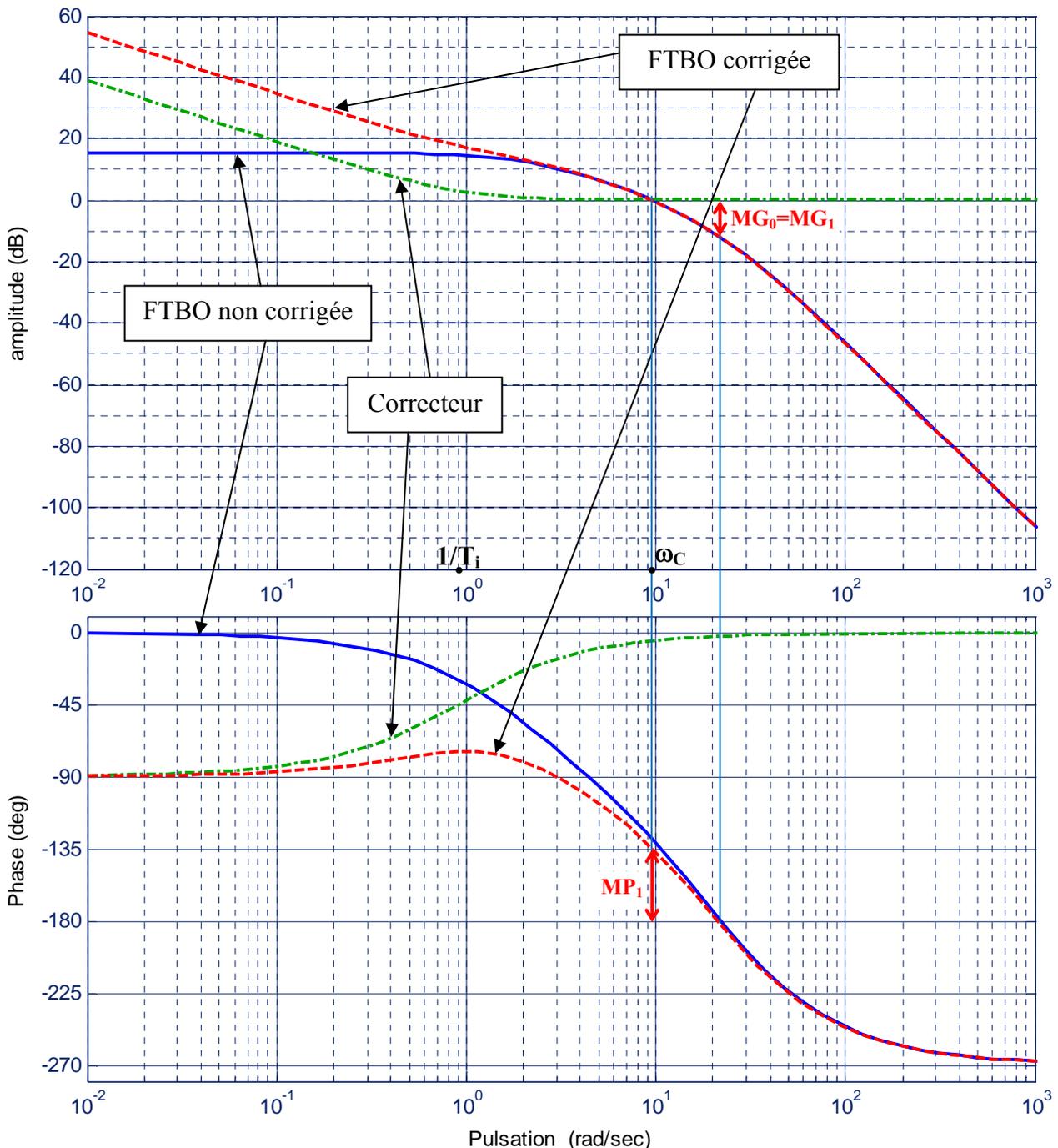
Pour satisfaire le critère de précision (annuler l'erreur statique ε_{ss} à un échelon unitaire) on corrige le système par un correcteur proportionnel intégral : $C(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p}$.

On a une marge de phase $MP_0 = 51^\circ = 45^\circ + 6^\circ$ on a donc une réserve de 6° . On choisit alors $K_i = 1$ (la correction proportionnelle n'est pas nécessaire dans ce cas). On choisit $1/T_i = \omega_c/10$ avec $\omega_c = 9.6$ rd/s la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO non corrigée, soit $1/T_i = 0.96$. On prend $1/T_i = 0.9$ ce qui donne $T_i = 1.11$

Donc $C(p) = \frac{1 + 1.11p}{1.11p}$. La FTBO du système corrigé devient :

$$H_{BO_c}(p) = C(p).G(p) = \frac{6(1 + 1.11p)}{1.11p(1 + 0.5p)(1 + 0.05p)^2} = \frac{5.4(1 + 1.11p)}{p(1 + 0.5p)(1 + 0.05p)^2}$$

La classe de la FTBO corrigée $H_{BO_c}(p)$ devient $\alpha = 1$ donc $\varepsilon_{ss} = 0$, et en examinant le tracé de Bode de la FTBO corrigée, on remarque que la marge de phase est $MP_1 = 45^\circ$. Le cahier des charges est donc respecté.



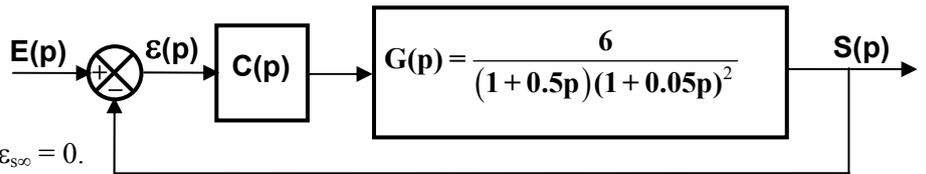
Autre méthode de réglage du correcteur P.I (compensation du pôle dominant)

Une autre méthode de réglage du correcteur P.I consiste à choisir T_i pour compenser le pôle dominant de la FTBO à corriger.

Reprenons l'exemple précédent :

Le cahier des charges impose :

- une erreur statique à une entrée en échelon unitaire (erreur indicielle) $\epsilon_{s\infty} = 0$.
- Une marge de phase $MP = 45^\circ$.



Le pôle dominant de la FTBO à corriger (de $G(p)$) est $-1/0.5$. On choisit donc $T_i = 0.5$ donc

$$C(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p} = \frac{K_i(1 + 0.5p)}{0.5p}$$

La FTBO corrigé devient $H_{BO_c}(p) = C(p).G(p) = \frac{6K_i(1 + 0.5p)}{0.5p(1 + 0.5p)(1 + 0.05p)^2} = \frac{12K_i}{p(1 + 0.05p)^2}$

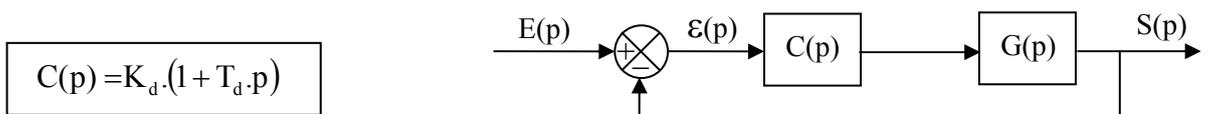
La classe de la FTBO corrigée $H_{BO_c}(p)$ devient $\alpha = 1$ donc $\epsilon_{s\infty} = 0$, donc le critère de précision est satisfait.

Pour satisfaire par la suite le critère de stabilité on trace les diagrammes de Bode de $H_{BO_c}(p)$ pour $K_i = 1$ puis on détermine la valeur de K_i pour régler la marge de phase à $MP = 45^\circ$ (démarche de correction proportionnelle).

La méthode de compensation du pôle dominant permet aussi d'améliorer la rapidité du système.

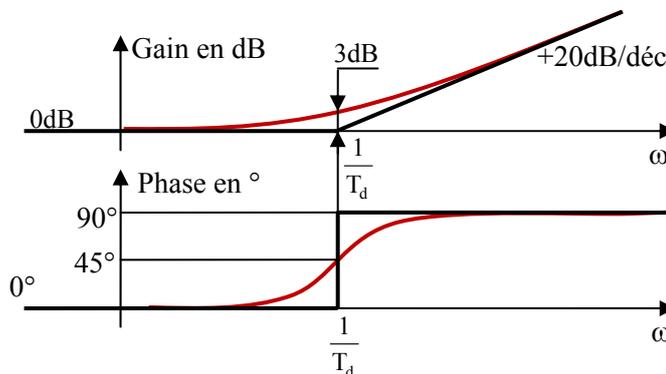
IV. CORRECTION PROPORTIONNELLE – DERIVEE :

III.1. Correcteur proportionnel dérivée (PD) théorique:



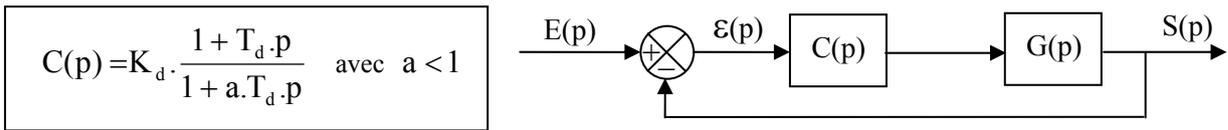
Ce correcteur est physiquement non réalisable, en effet le degré du numérateur de $C(p)$ est supérieur au degré du dénominateur.

La figure ci-dessous représente le lieu de transfert de $C(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_d = 1$. On remarque que pour les hautes fréquences, le gain du correcteur est infini ce qui a pour inconvénient d'amplifier les signaux parasites de hautes fréquences (Ex : Bruit).

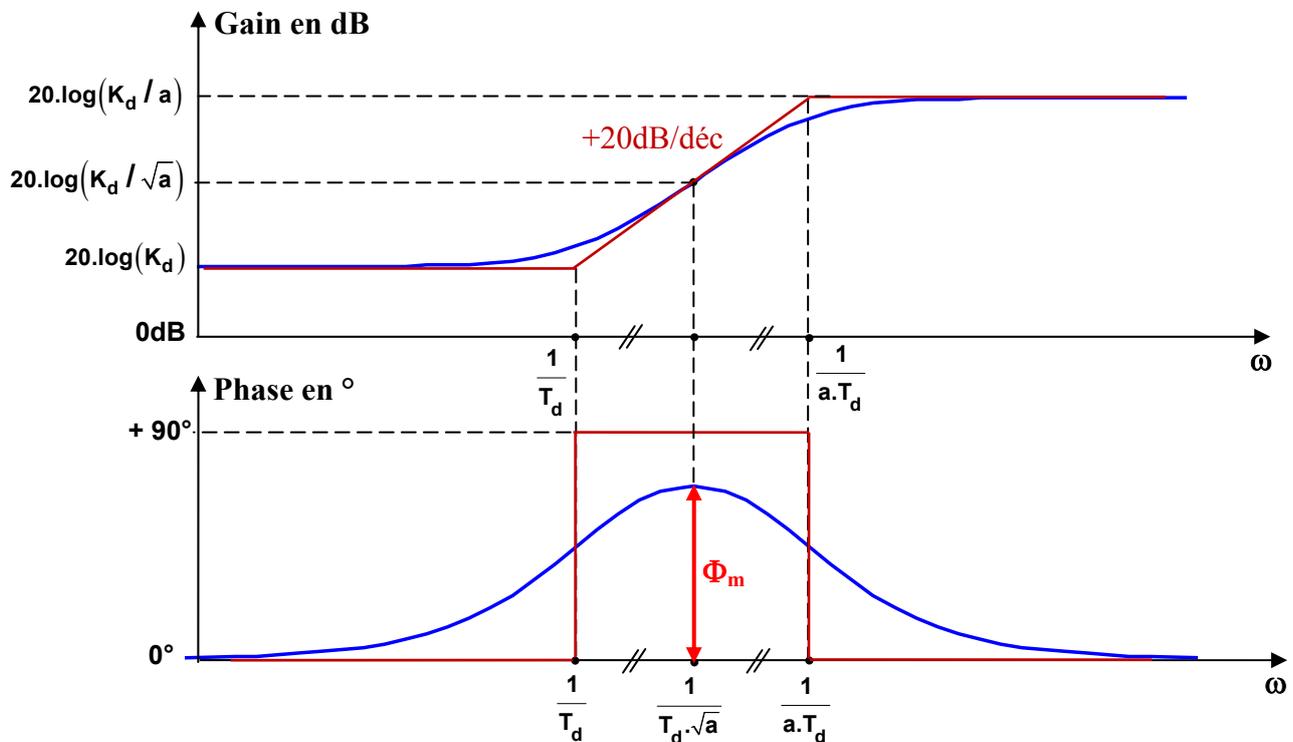


Ce correcteur agit en hautes fréquences, pour $k_d = 1$ il permet d'améliorer la stabilité à précision constante. La constante du temps T_d est choisie de telle sorte que $1 / T_d$ soit au voisinage du point critique (au voisinage de la pulsation de coupure ω_c à 0 dB de la FTBO à corriger).

III.2. Correcteur proportionnel dérivée (PD) réel: (correcteur à avance de phase)



La figure ci-dessous représente le lieu de transfert de C(p) dans le plan de Bode.



La phase est positive et elle est maximale pour : $\omega_m = \frac{1}{T_d \cdot \sqrt{a}}$. On a : $C(p) = K_d \cdot \frac{1 + T_d \cdot p}{1 + a \cdot T_d \cdot p}$ Donc :

$$\arg(C(j\omega)) = \Phi(\omega) = \arctan(T_d \cdot \omega) - \arctan(a \cdot T_d \cdot \omega)$$

La phase maximale apportée par ce correcteur est :

$$\Phi_m = \arg(C(j\omega_m)) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) - \arctan(\sqrt{a})$$

Donc :

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctan(\sqrt{a})$$

$$\Phi_m^\circ = 90^\circ - 2 \cdot \arctan(\sqrt{a})$$

ou on peut monter de même :

$$\sin(\Phi_m) = \frac{1 - a}{1 + a}$$

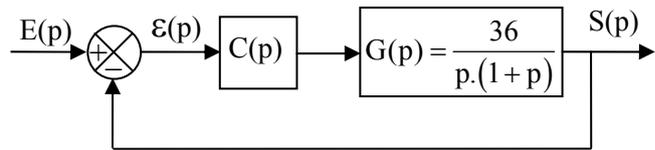
Le correcteur PD réel agit en hautes fréquences, pour $K_d = 1$ il permet d'améliorer la stabilité du système à précision constante.
Pour augmenter la marge de phase, le correcteur doit être centré au voisinage de la pulsation de coupure à 0dB de la FTBO à corriger :

$$\omega_m = \frac{1}{T_d \cdot \sqrt{a}} \approx \omega_c$$

Remarque : Il n'existe pas de **méthode générale** pour régler les paramètres de ce correcteur !

Exemple de réglage : (page 53)

soit à corriger le système asservi ci-contre ; C(p) désigne la fonction de transfert du correcteur.



Le cahier des charges impose :

- Pour la rapidité : la pulsation de coupure à 0dB $\omega_C = 10$ rad/s (bande passante à 0dB de la FTBO)
- Pour la stabilité : la marge de phase $MP = 45^\circ$

La FTBO non corrigée ($C(p) = 1$) est $H_{BO-NC}(p) = G(p) = \frac{36}{p \cdot (1 + p)}$, d'après son lieu de transfert dans

le plan de Bode la pulsation de coupure à 0dB est $\omega_{C1} = 6$ rad/s donc le critère de rapidité est non satisfait.

La marge de phase est : $MP_1 = 10^\circ$ donc de même le critère de stabilité du système est non satisfait.

Correction du système :

On corrige le système par un correcteur PD réel (à avance de phase) :

$$C(p) = K_d \frac{1 + T_d \cdot p}{1 + a \cdot T_d \cdot p} \quad (\text{avec } a < 1)$$

- Pour régler la marge de phase à $MP_2 = 45^\circ$ pour $\omega_C = \omega_{C2} = 10$ rad/s :

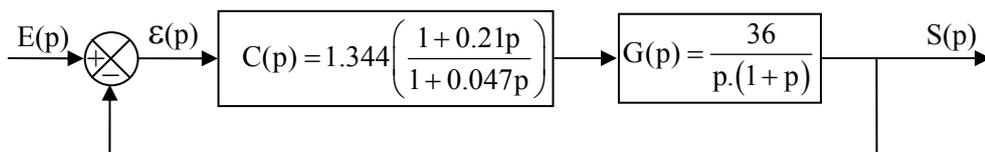
$$\begin{aligned} \text{On doit avoir } MP_2 = 45^\circ &= 180 + \arg(H_{BO-C}(j\omega_{C2})) \\ &= 180 + \arg(H_{BO-NC}(j\omega_{C2})) + \Phi_m \\ &= 180 - 174 + \Phi_m \end{aligned}$$

On doit donc choisir un correcteur qui apporte une phase maximale $\Phi_m = 39^\circ$ alors :

$$\Phi_m = 39^\circ = 90^\circ - 2 \cdot \arctan(\sqrt{a}) \Rightarrow a = 0.227$$

- On doit avoir $\omega_m = \frac{1}{T_d \cdot \sqrt{a}} = \omega_{C2} = 10$ rad/s donc $T_d = 0.21$ sec
- Pour régler la pulsation de coupure à 0dB à $\omega_C = \omega_{C2} = 10$ rad/s on doit avoir $20 \cdot \log(K_d / \sqrt{a}) = +9$ dB donc $K_d = 1.344$

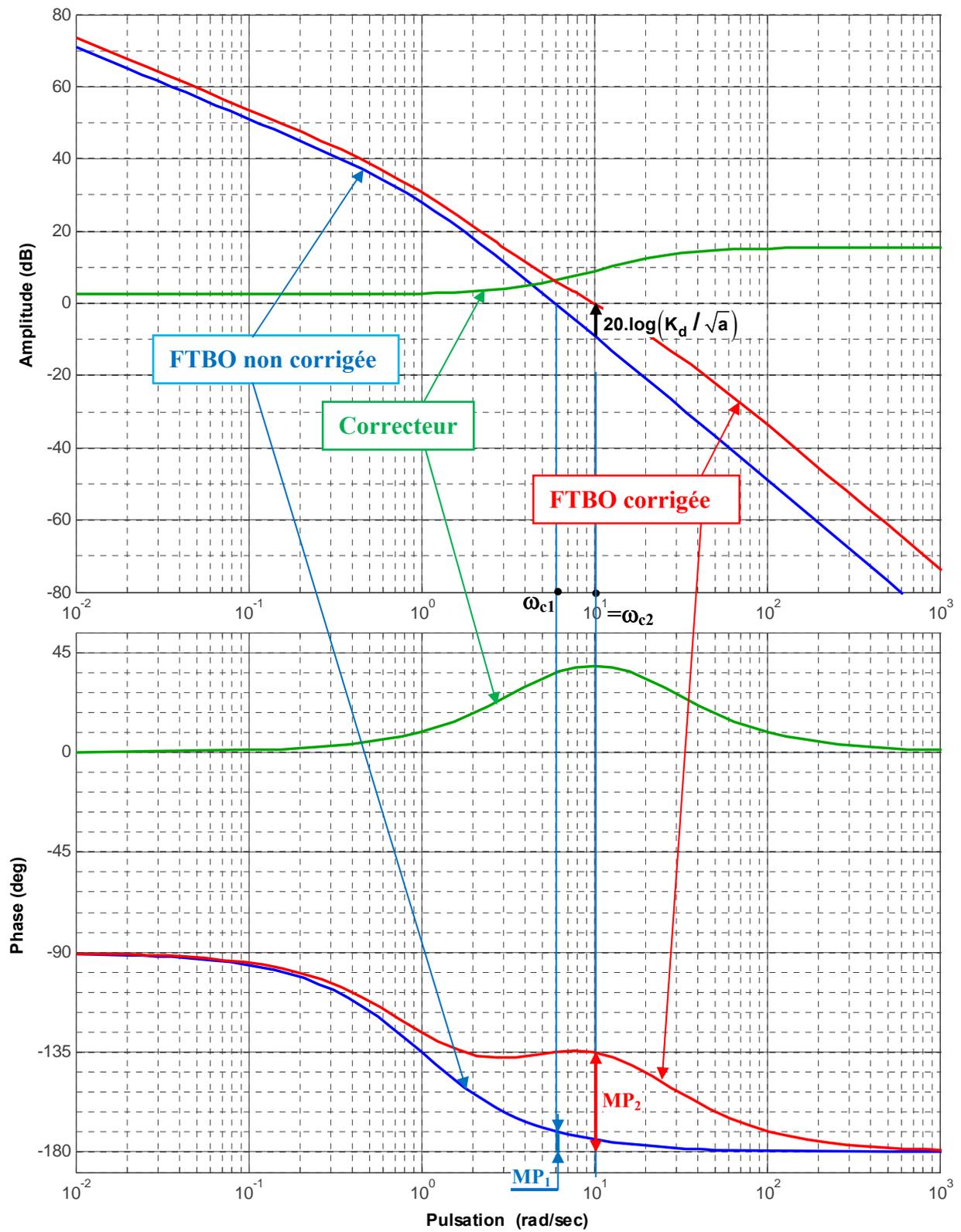
$$\text{D'où : } C(p) = 1.344 \left(\frac{1 + 0.21p}{1 + 0.227 \times 0.21p} \right) = 1.344 \left(\frac{1 + 0.21p}{1 + 0.047p} \right)$$

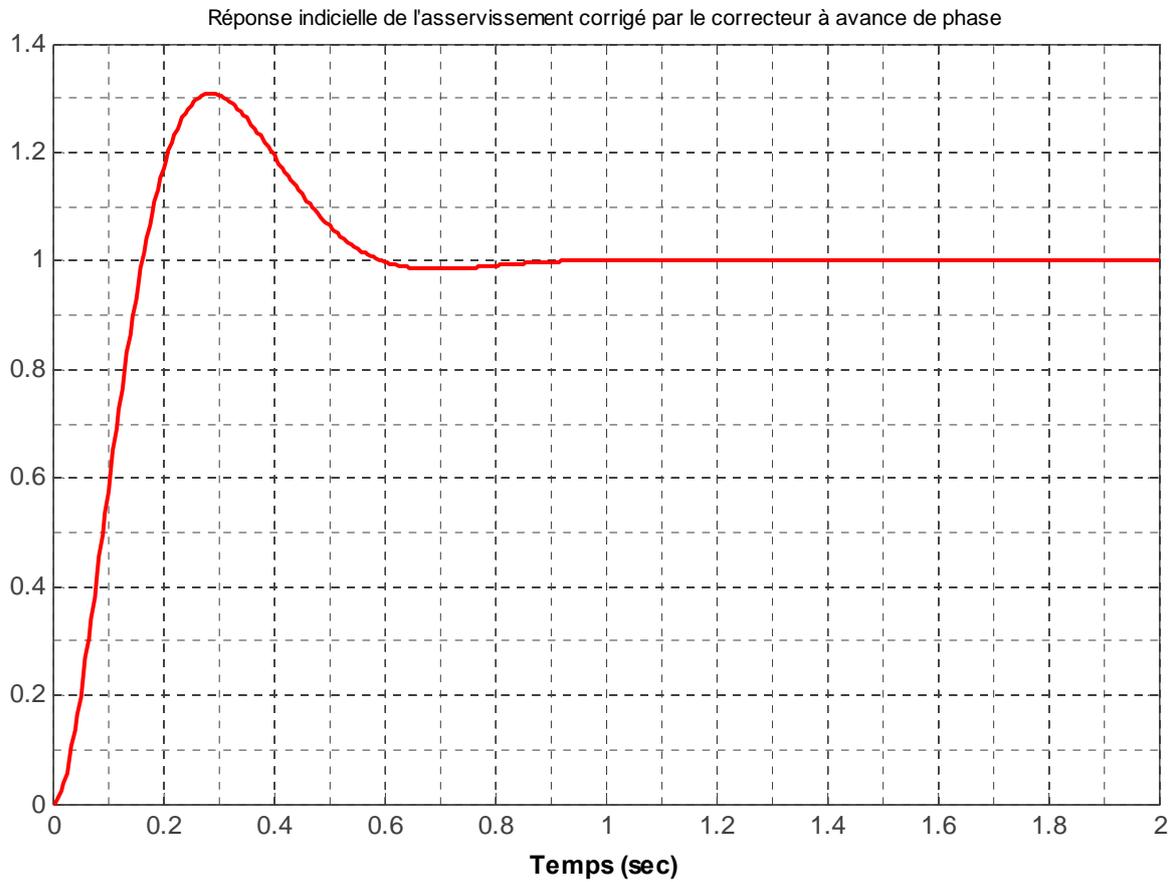
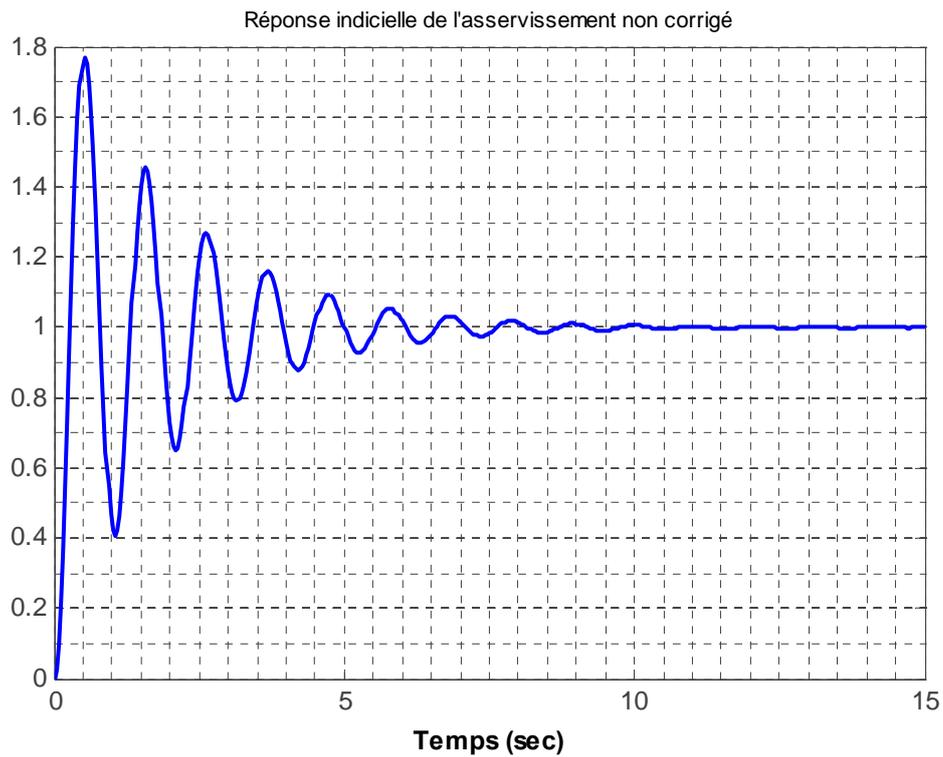


La FTBO du système corrigé est $H_{BO-C}(p) = C(p) \cdot G(p) = \frac{48.38(1 + 0.21p)}{p \cdot (1 + 0.047p) \cdot (1 + p)}$

D'après les diagrammes de Bode de la FTBO corrigé on a bien $\omega_C = 10$ rad/s et la marge de phase est $MP_2 = 45^\circ$. Le cahier des charges est bien satisfait.

La page 54 représente les réponses indicielles (à un échelon unitaire : $e(t) = u(t)$) de l'asservissement non corrigé et de l'asservissement corrigé par le correcteur à avance de phase.





**TABLEAU DES TRANSFORMEES DE LAPLACE
DES FONCTIONS USUELLES**

$F(p) = \mathcal{L}(f(t).u(t))$	$f(t)$
1	$\delta(t)$ (impulsion unitaire de Dirac)
$\frac{1}{p}$	1 (échelon unitaire : $u(t)$)
$\frac{1}{p^2}$	t (rampe)
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ($n \geq 1$)
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t.e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-at}$ ($n \geq 1$)
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega.t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega.t)$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at}.\sin(\omega.t)$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at}.\cos(\omega.t)$
$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{sh}(\omega.t)$
$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{ch}(\omega.t)$
$\frac{\alpha.p + \beta}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$A.e^{-at}.\cos(\omega.t + \Phi)$ avec $\begin{cases} A = \frac{1}{\omega}.\sqrt{\alpha^2\omega^2 + (\beta - a.\alpha)^2} \\ \Phi = -\text{arctg}\left(\frac{\beta - a.\alpha}{\alpha.\omega}\right) \end{cases}$