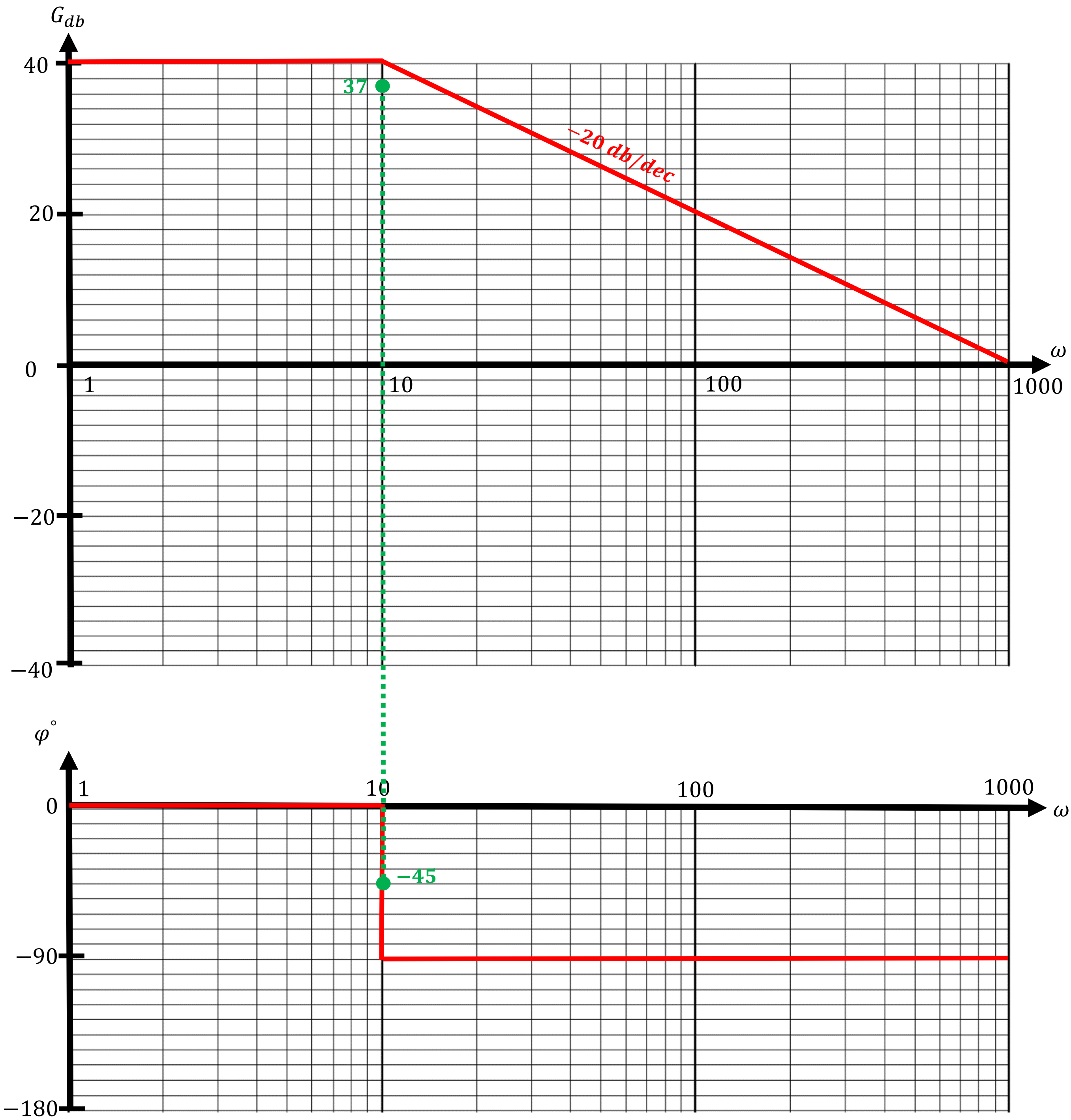
Exercice 1: Diagramme de Bode

$$H_1(p) = \frac{100}{1 + 0{,}1p}$$
$$e(t) = 2\sin(10t)$$

Question 1: Répondre aux questions pour la fonction $H_1(p)$

Document réponse Q1



$e(t) = 2\sin(10t)$	
Lecture graphique	Formules (peu utile)
$20log(\underline{H}) = 40$ $\lvert\underline{H}\rvert = 10^{\frac{40}{20}} = 100$ $\varphi = -\frac{\pi}{4} = -0{,}79$ On peut faire mieux en ce point particulier : $20log(\underline{H}) = \mathbf{37}$ $\lvert\underline{H}\rvert = 10^{\frac{37}{20}} = 70{,}8$ $\varphi = -\frac{\pi}{4} = -0{,}79$	$H(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = \mathbf{70{,}71}$ $20\log(\lvert H(i\omega)\rvert) = \mathbf{36{,}99}$ $\varphi = \arg\left(\frac{K}{1 + jT\omega}\right) = -\arg(1 + jT\omega)$ $\varphi = \arg(1 - jT\omega)$ $sign(cos\varphi) = \mathrm{sign}(1) = 1$ $\varphi = \arctan(-T\omega) = \mathbf{-0{,}79}$
Calcul	
$H_1(10j) = \frac{100}{1 + \mathrm{j}}$ $\varphi = \arg\left(\frac{100}{1 + \mathrm{j}}\right) = -\arg(1 + \mathrm{j}) = -\tan^{-1} 1 = -\frac{\pi}{4}$	
$s(t) = 200\, sin(10t - 0{,}79)$	$s(t) = 141{,}42 sin(10t - 0{,}79)u(t)$

Question 2: Répondre aux questions pour la fonction $H_2(p)$

$$H_2(p) = \frac{100}{1 + 0{,}11p + 0{,}001p^2}$$
$$e(t) = 10sin(50t)$$

Méthode *: Vérifier si le dénominateur est factorisable en calculant son discriminant ou z.*

$$H_2(p) = \frac{100}{1 + 0{,}11p + 0{,}001p^2}$$
$$\Delta = 0{,}11^2 - 4 * 0{,}001 * 1 = 0{,}0081 = 0{,}09^2$$
$$p_i = \frac{-0{,}11 \pm 0{,}09}{2 * \mathbf{0{,}001}} = \begin{cases} \dfrac{-0{,}11 + 0{,}09}{2 * \mathbf{0{,}001}} = \dfrac{-0{,}02}{2 * 0{,}001} = -10 \\ \dfrac{-0{,}2}{2 * \mathbf{0{,}001}} = -100 \end{cases}$$
$$0{,}001p^2 + 0{,}11p + 1 = \mathbf{0{,}001}(p + 100)(p + 10) = (1 + 0{,}01p)(1 + 0{,}1p)$$

$$H_2(p) = \frac{100}{(1 + 0{,}01p)(1 + 0{,}1p)}$$

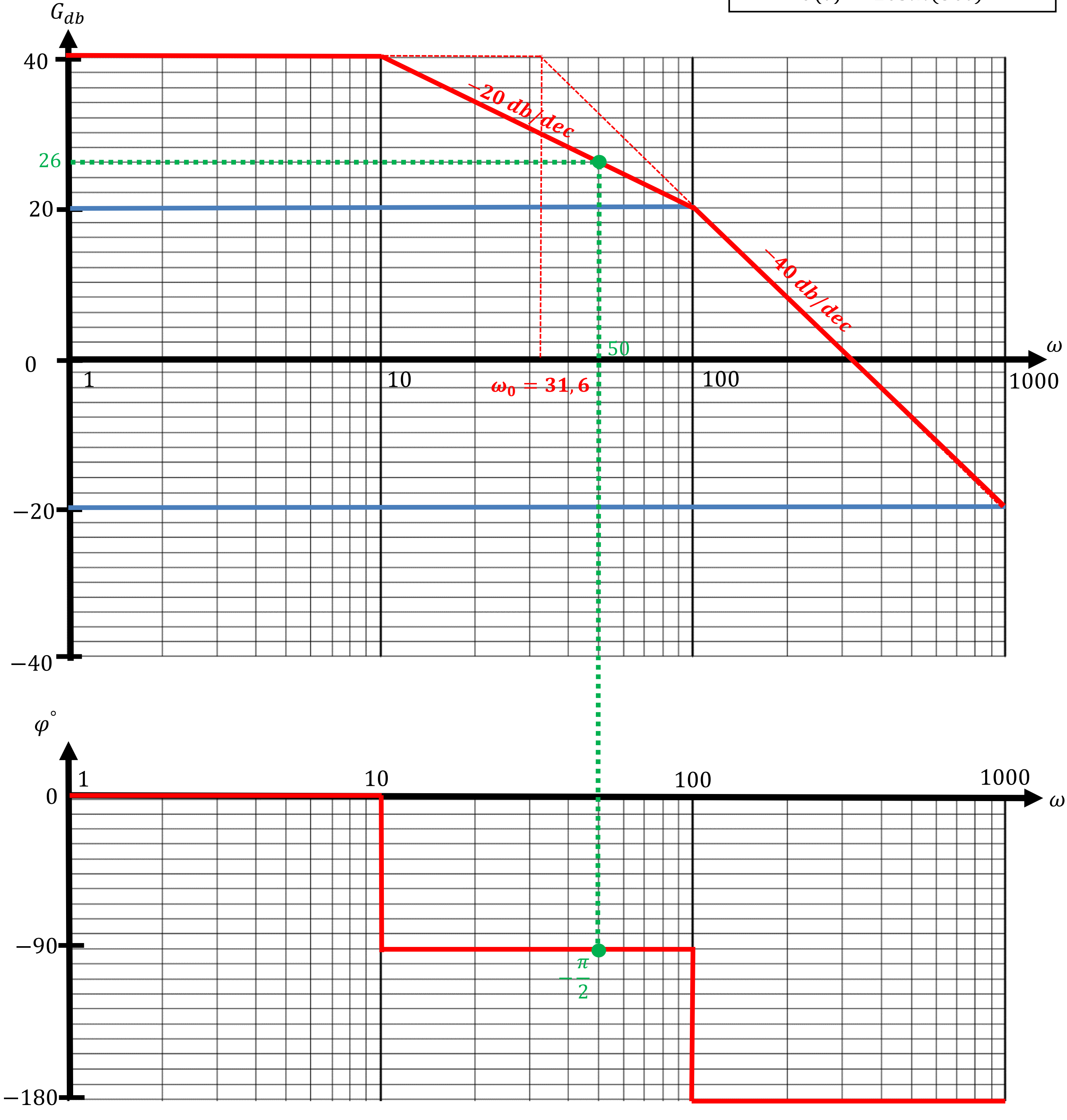
Attention *: Les erreurs souvent rencontrées ici sont de considérer le « a » de $ap^2 + bp + c$ valant 1 car on lit de gauche à droite $c + bp + ap^2$, à la fois dans le dénominateur des racines et dans la factorisation (mis en gras ci-dessus) – Ou vous oublier de vous ramener à la forme $(1 + \cdots p)$ au dénominateur en passant 10^3 au numérateur ☹ et parfois en interprétant mal les 2 pulsations de coupure 100 ou 0,01 et 10 ou 0,1…*

Calcul des coefficients caractéristiques (non obligatoire) :

$$H_2(p) = \frac{100}{1 + 0{,}11p + 0{,}001p^2} = \frac{\mathrm{K}}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$
$$\begin{cases} K = 100 \\ \omega_0 = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31{,}6 \\ z = \dfrac{31{,}6}{2} 0{,}11 = 1{,}73 \end{cases}$$

Document réponse Q2

$$H_2(p) = \frac{100}{1 + 0{,}11p + 0{,}001p^2}$$
$$e(t) = 10sin(50t)$$



Attention *: je vois trop souvent des élèves qui quand ils cherchent à placer 50, partent de 0 dans leur tête et qui compte donc 10, 20, 30… à partir de la graduation après 10. Ils décalent donc tout vers la droite d'une graduation. Après 10, il faut compter à partir de 20 !*

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$e(t) = 10sin(50t)$</td></tr>
<tr><td align="center">Lecture graphique</td><td align="center">Formules (peu utile)</td></tr>
<tr><td align="center">$\log 50 = 1{,}7$
$1 \to 40$
$2 \to 20$
$1{,}7 \to 40 - 0{,}7 * 20 = 26$
$20\log|H(j\omega)| = 26$
$|H(j\omega)| = e^{\frac{26}{20}\ln 10} = 20$
$\varphi = -\frac{\pi}{2} = \mathbf{-1{,}57}$</td><td align="center">$H(j\omega) = \frac{K}{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$
$H(j\omega) = \frac{K}{1 - T_1T_2\omega^2 + j(T_1+T_2)\omega}$
$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-T_1T_2\omega^2)^2 + (T_1+T_2)^2\omega^2}}$
$|H(j\omega)| = \mathbf{17{,}54}$
$20\,log(|H(i\omega)|) = \mathbf{24{,}88}$

$\varphi = arg\left(\frac{K}{(1-T_1T_2\omega^2) + j(T_1+T_2)\omega}\right)$
$\varphi = -arg\big((1-T_1T_2\omega^2) + j(T_1+T_2)\omega\big)$
$\varphi = arg\big((1-T_1T_2\omega^2) - j(T_1+T_2)\omega\big)$
$\cos(\varphi) = \frac{(1-T_1T_2\omega^2)}{\sqrt{(1-T_1T_2\omega^2)^2 + \big((T_1+T_2)\omega\big)^2}}$
$\sin(\varphi) = \frac{-(T_1+T_2)\omega}{\sqrt{(1-T_1T_2\omega^2)^2 + \big((T_1+T_2)\omega\big)^2}}$
$\sin(\varphi) < 0$
$\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{(1-T_1T_2\omega^2)}{\sqrt{(1-T_1T_2\omega^2)^2 + \big((T_1+T_2)\omega\big)^2}}\right)$
$\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{-1{,}5}{5{,}7}\right) = -\cos^{-1}(-0{,}26) = \mathbf{-1{,}84\ rd}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Calcul</td></tr>
<tr><td colspan="2">Il serait dommage de ne pas profiter de la factorisation, surtout pour la phase !

$H(50j) = \frac{100}{(1+0{,}01*50\mathrm{j})(1+0{,}1*50\mathrm{j})} = \frac{100}{(1+0{,}5\mathrm{j})(1+5\mathrm{j})}$

$|H(j\omega)| = \left|\frac{100}{(1+0{,}5\mathrm{j})(1+5\mathrm{j})}\right| = \frac{100}{\sqrt{1+0{,}5^2}\sqrt{1+5^2}} = \frac{100}{\sqrt{1{,}25}\sqrt{26}} = \mathbf{17{,}54}$

$\varphi = \arg\left(\frac{100}{(1+0{,}5\mathrm{j})(1+5\mathrm{j})}\right) = -\arg(1+0{,}5\mathrm{j}) - \arg(1+5\mathrm{j}) = -\tan^{-1}0{,}5 - \tan^{-1}5$
$= \mathbf{-1{,}84}$</td></tr>
<tr><td align="center">$s(t) = 200\ sin(50t - 1.57)$</td><td align="center">$s(t) = 175{,}41 sin(50t - 1{,}84)u(t)$</td></tr>
</table>

Question 3: Répondre aux questions pour la fonction $H_3(p)$

$$H_3(p) = \frac{10}{1 + 0{,}1\text{p} + 0{,}01p^2}$$
$$e_1(t) = 2sin(10t)$$
$$e_2(t) = 2sin(100t)$$

Méthode *: Vérifier si le dénominateur est factorisable en calculant son discriminant ou z.*

$$H_3(p) = \frac{10}{1 + 0{,}1\text{p} + 0{,}01p^2}$$
$$\Delta = 0{,}1^2 - 4 * 1 * 0{,}01 = -0{,}03$$

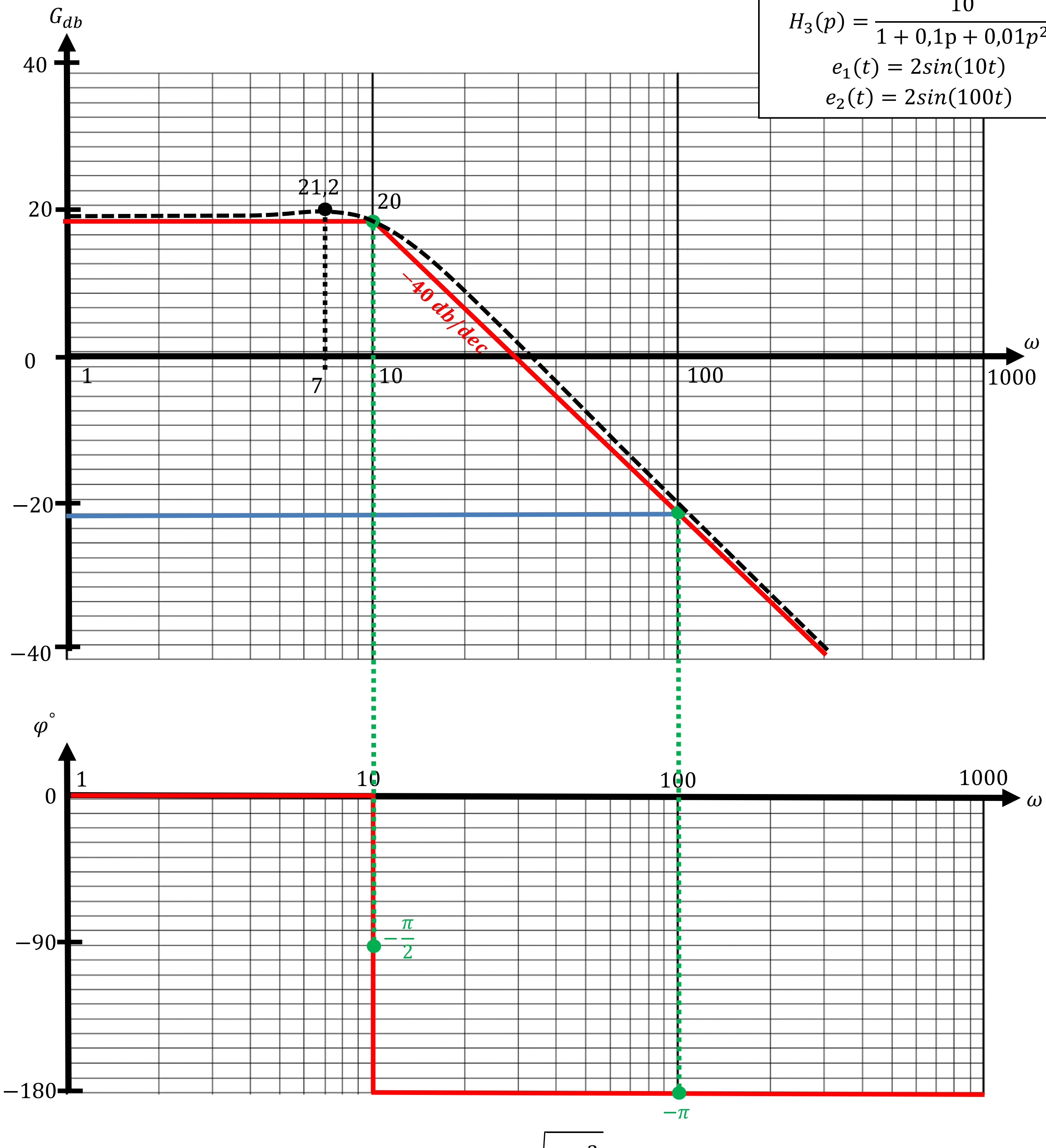
Déterminons les coefficients caractéristiques :

$$H_3(p) = \frac{10}{1 + 0{,}1\text{p} + 0{,}01p^2}$$

$$\begin{cases} K = 10 \\ \omega_0 = \sqrt{100} = 10 \\ z = \dfrac{10}{2} 0{,}1 = 0{,}5 \end{cases}$$

Document réponse Q3

$$H_3(p) = \frac{10}{1 + 0{,}1p + 0{,}01p^2}$$
$$e_1(t) = 2sin(10t)$$
$$e_2(t) = 2sin(100t)$$



$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} = 10\sqrt{1-\frac{2}{2^2}} = 10\sqrt{0{,}5} \approx 7$$

Attention *: Ne pas confondre ω_r avec $\omega_n = \omega_0\sqrt{1-z^2}$, pseudo pulsation de la réponse à un échelon d'un second ordre. Dites-vous cela : 1 pour la formule vue en premier en 1° année (temporel) puis 2 pour le fréquentiel*

$$G_r = 20\log(|H(j\omega_r)|) = 20\log\left(\frac{10}{\sqrt{(1-0{,}01{\omega_r}^2)+(0{,}1\omega_r)}}\right) \approx 21{,}2$$
$$G_{\omega_0} = G_0 - 20\log(2z) = G_0 - 20\log(1) = G_0 = 20$$

<table>
<tr><td colspan="2">$e_1(t) = 2sin(10t)$</td></tr>
<tr><td>Lecture graphique</td><td>Formules (peu utile)</td></tr>
<tr><td>$20\log|H(j\omega)| = \mathbf{20}$
$|H(j\omega)| = e^{\frac{20}{20}\ln 10} = \mathbf{10}$
$\varphi = -\frac{\pi}{2} = \mathbf{-1,57}$</td><td>$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + j\frac{2z\omega}{\omega_0}}$
$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + 4\frac{z^2\omega^2}{{\omega_0}^2}}}$
$|H(j\omega)| = \mathbf{10}$
$20\log(|H(i\omega)|) = \mathbf{20}$
Cas particulier $z = 0,5$: $G_{\omega_0} = G_0 - 20\log(2z) = G_0$
$\varphi = \arg\left(\frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + j\frac{2z\omega}{\omega_0}}\right)$
$\varphi = -\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + j\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)$
$\varphi = \arg\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right) - j\left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)\right)$
$sign(\sin\varphi) = \mathrm{sign}\left(-\left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)\right) < 0$
$\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = \mathbf{-1,57}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcul</td></tr>
<tr><td colspan="2">$H(10j) = \frac{10}{1 + 0,1 * 10\mathrm{j} - 0,01 * 10^2} = \frac{10}{j}$
$|H(j\omega)| = \left|\frac{10}{j}\right| = \mathbf{10}$
Remarque : Cas particulier $z = 0,5$: $G_{\omega_0} = G_0 - 20\log(2z) = G_0$
$\varphi = \arg\left(\frac{10}{j}\right) = -\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$</td></tr>
<tr><td>$s_1(t) = 20\,sin(10t - 1,57)$</td><td>$s_1(t) = 20sin(10t - 1,57)u(t)$</td></tr>
</table>

$e_2(t) = 2sin(100t)$	
Lecture graphique	Formules (peu utile)
$20\log\lvert H(j\omega)\rvert = -\mathbf{20}$ $\lvert H(j\omega)\rvert = e^{\frac{-20}{20}\ln 10} = \mathbf{0,1}$ $\varphi = -\pi = -\mathbf{3,14}$	$H(j\omega) = \frac{K}{1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}+j\frac{2z\omega}{\omega_0}}$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+4\frac{z^2\omega^2}{{\omega_0}^2}}}$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \mathbf{0,1}$ $20\log(\lvert H(i\omega)\rvert) = \mathbf{20}$ Cas particulier $z = 0{,}5$: $G_{\omega_0} = G_0 - 20\log(2z) = G_0$ $\varphi = \arg\left(\frac{K}{1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}+j\frac{2z\omega}{\omega_0}}\right)$ $\varphi = -\arg\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}+j\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)$ $\varphi = \arg\left(\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)-j\left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)\right)$ $sign(\sin\varphi) = \mathrm{sign}\left(-\left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)\right) < 0$ $\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+\left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = -\mathbf{3,04}$

Calcul
$H(100j) = \frac{10}{0{,}01(100j)^2+0{,}1(100j)+1} = \frac{10}{-100+1+10j} = \frac{10}{-99+10j}$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \left\lvert\frac{10}{-99+10j}\right\rvert = \mathbf{0,1}$ $\arg\left(\frac{10}{-99+10j}\right) = \arg(-99-10j) = -\cos^{-1}\left(\frac{-99}{\sqrt{99^2+10^2}}\right) = -\mathbf{3,04}$ **Attention** *: Je me répète, vous ratez régulièrement cette question car vous ne faites pas attention au domaine dans lequel l'angle se trouver et vous utilisez* $\tan^{-1}$ *. Relisez la [fiche Calculs d'arguments] si nécessaire, j'y aborde cet exemple !*

$s_2(t) = 0{,}2 * sin(100t - 1{,}57)$	$s_2(t) = 0{,}2 * sin(100t - 3{,}04)u(t)$