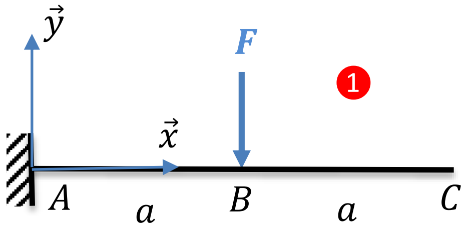
Torseurs de cohésion

Cas 1



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

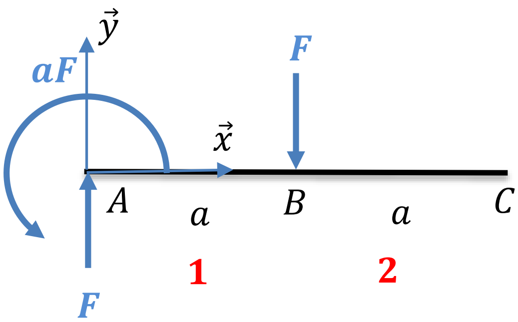
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -aF \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 = 0 \\ Y_A - F = 0 \\ Z_A + 0 = 0 \\ L_A + 0 = 0 \\ M_A + 0 = 0 \\ N_A - aF = 0 \end{cases}$$

$Y_A = F$	$N_A = aF$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



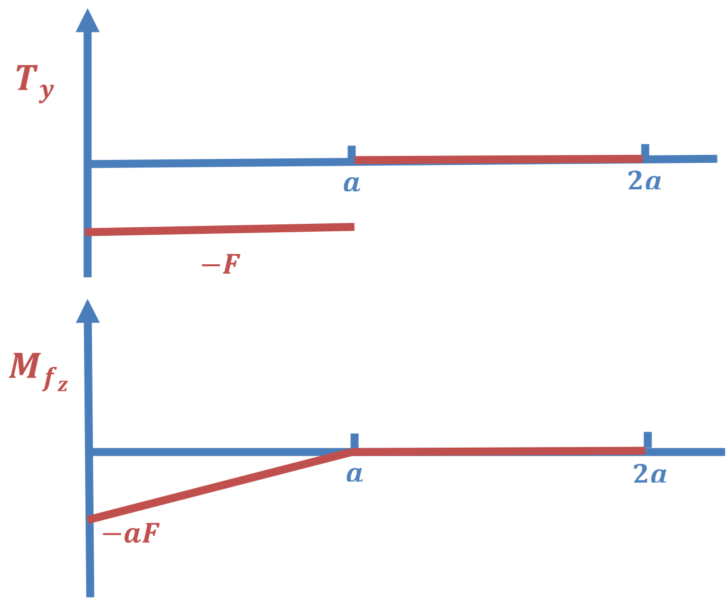
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

2 tronçons : AB et BC

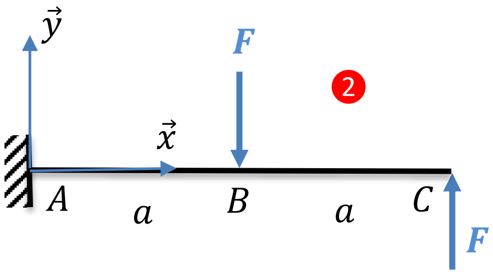
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1	Tronçon 2
$x \in]0, a[$	$x \in]a, 2a[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(a-x) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 2



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

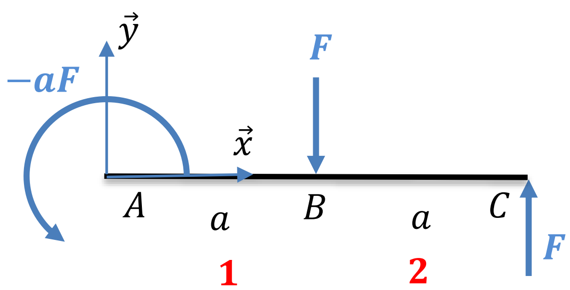
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -aF \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 2aF \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 + 0 = 0 \\ Y_A - F + F = 0 \\ Z_A + 0 + 0 = 0 \\ L_A + 0 + 0 = 0 \\ M_A + 0 + 0 = 0 \\ N_A - aF + 2aF = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{N_A = -aF}$$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



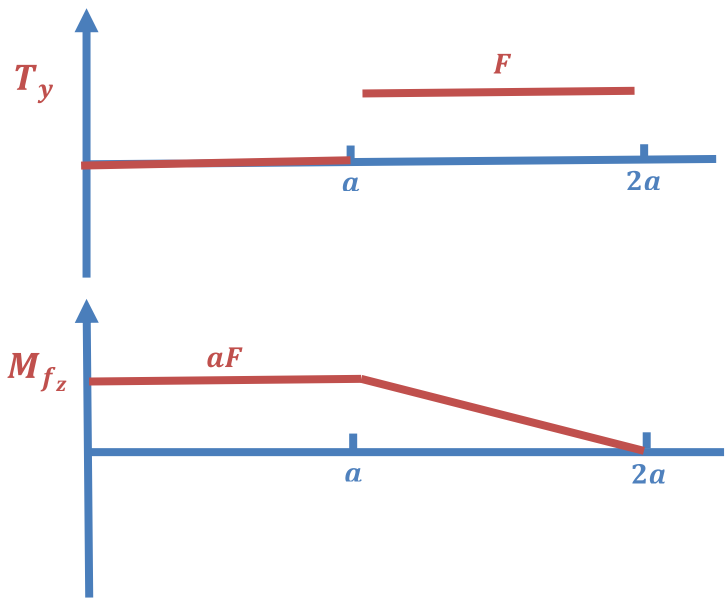
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

2 tronçons : AB et BC

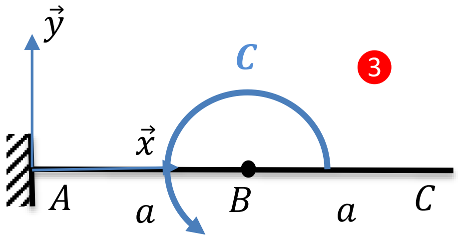
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1	Tronçon 2
$x \in]0, a[$	$x \in]a, 2a[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext\to I}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & aF \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F(2a-x) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 3



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

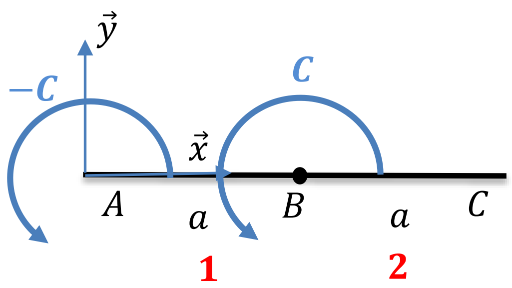
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 = 0 \\ Y_A + 0 = 0 \\ Z_A + 0 = 0 \\ L_A + 0 = 0 \\ M_A + 0 = 0 \\ N_A + C = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{N_A = -C}$$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



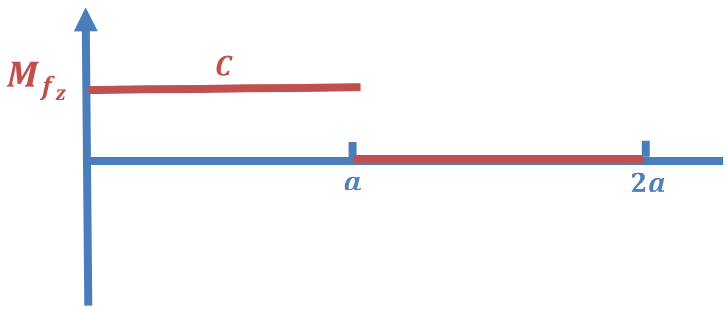
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

2 tronçons : AB et BC

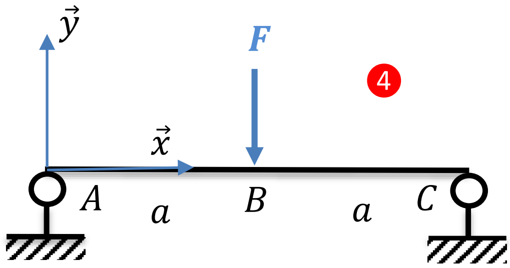
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1	Tronçon 2
$x \in]0, a[$	$x \in]a, 2a[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext\to I}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 4



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

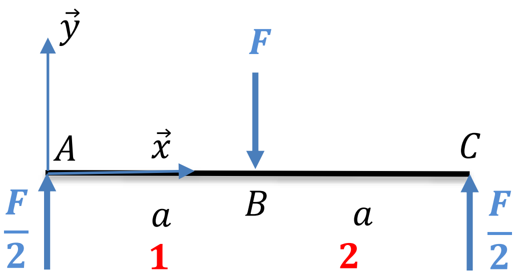
$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -aF \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 2aY_C \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} 0+0+0=0 \\ Y_A - F + Y_C = 0 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+0=0 \\ 0 - aF + 2aY_C = 0 \end{cases}$$

$Y_A = \frac{F}{2}$	$Y_C = \frac{F}{2}$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



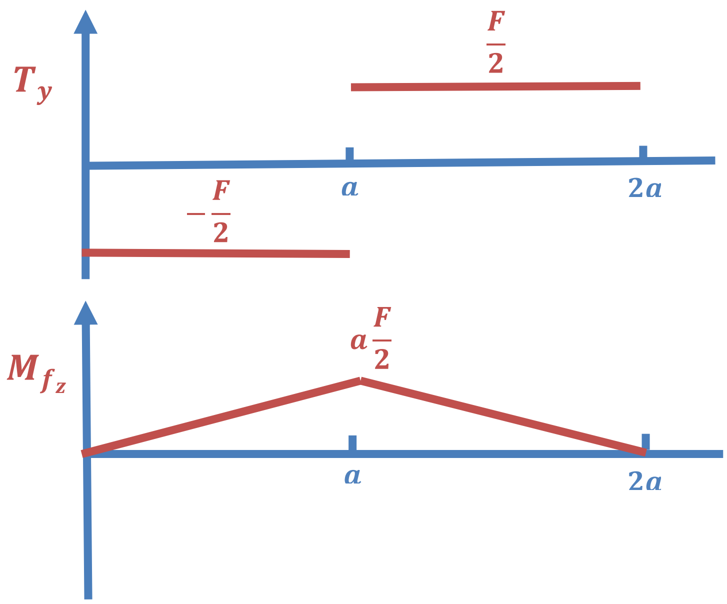
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

2 tronçons : AB et BC

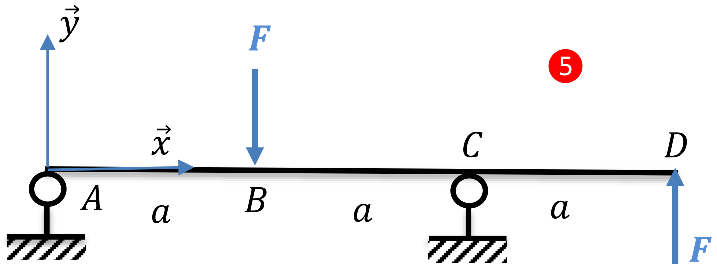
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1	Tronçon 2
$x \in]0, a[$	$x \in]a, 2a[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext \to I}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & x\frac{F}{2} \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2}(2a - x) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 5



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

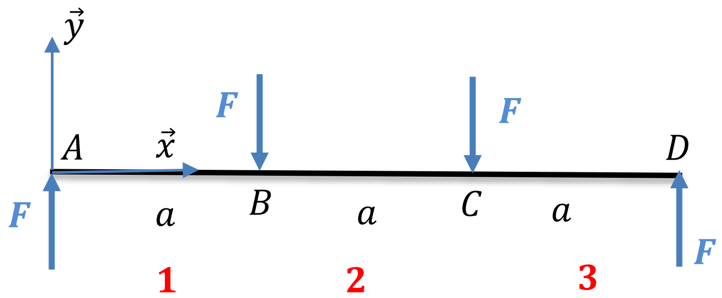
$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -aF \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 2aY_C \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 3aF \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 \\ Y_A - F + Y_C + F = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 - aF + 2aY_C + 3aF = 0 \end{cases}$$

$Y_A = F$	$Y_C = -F$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



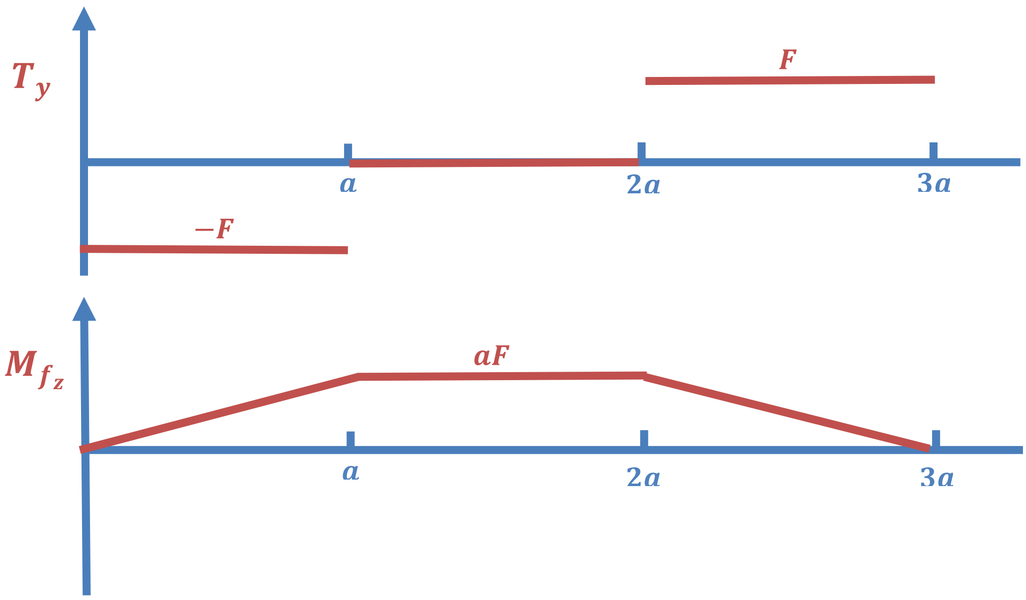
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

3 tronçons : AB, BC et CD

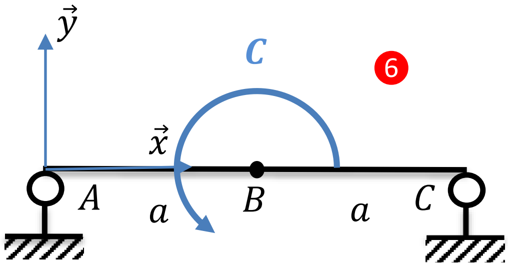
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1	Tronçon 2	Tronçon 3
$x \in]0, a[$	$x \in]a, 2a[$	$x \in]2a, 3a[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext\to I}\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & xF \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & aF \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$ $-F(2a-x)+F(3a-x) = aF$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F(3a-x) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 6



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

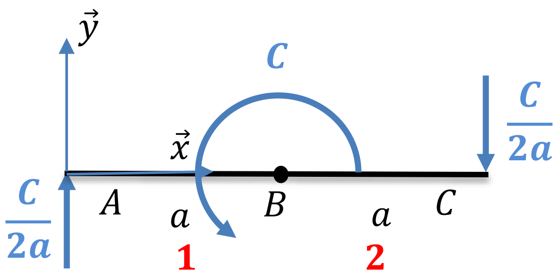
$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 2aY_C \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} 0 + 0 += 0 \\ Y_A + 0 + Y_C = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + C + 2aY_C = 0 \end{cases}$$

$Y_A = \frac{C}{2a}$	$Y_C = -\frac{C}{2a}$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



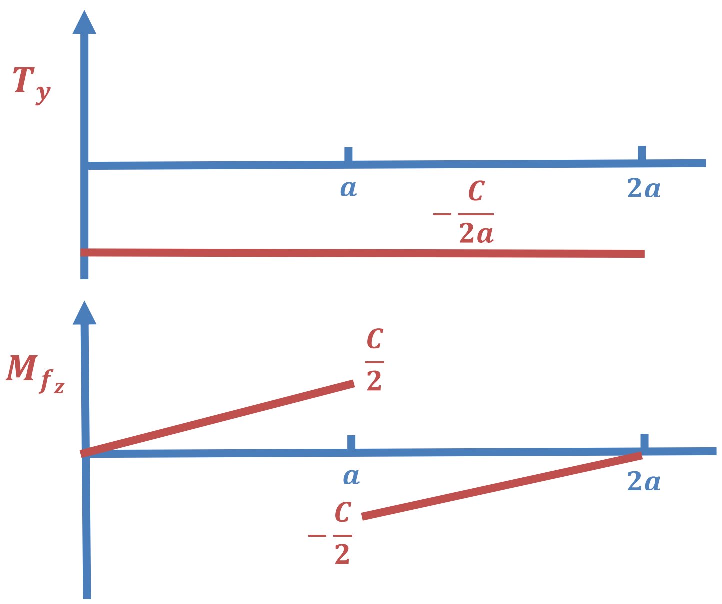
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

2 tronçons : AB et BC

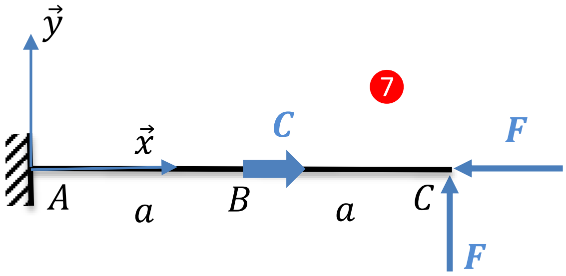
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1	Tronçon 2
$x \in]0, a[$	$x \in]a, 2a[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext\to I}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{C}{2a} & 0 \\ 0 & x\frac{C}{2a} \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{C}{2a} & 0 \\ 0 & -(2a-x)\frac{C}{2a} \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 7



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

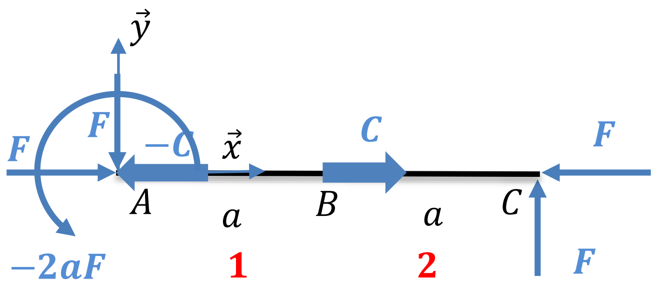
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B + \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 2aF \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 - F = 0 \\ Y_A + 0 + F = 0 \\ Z_A + 0 + 0 = 0 \\ L_A + C + 0 = 0 \\ M_A + 0 + 0 = 0 \\ N_A + 0 + 2aF = 0 \end{cases}$$

$X_A = F$	$Y_A = -F$	$N_A - 2aF$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



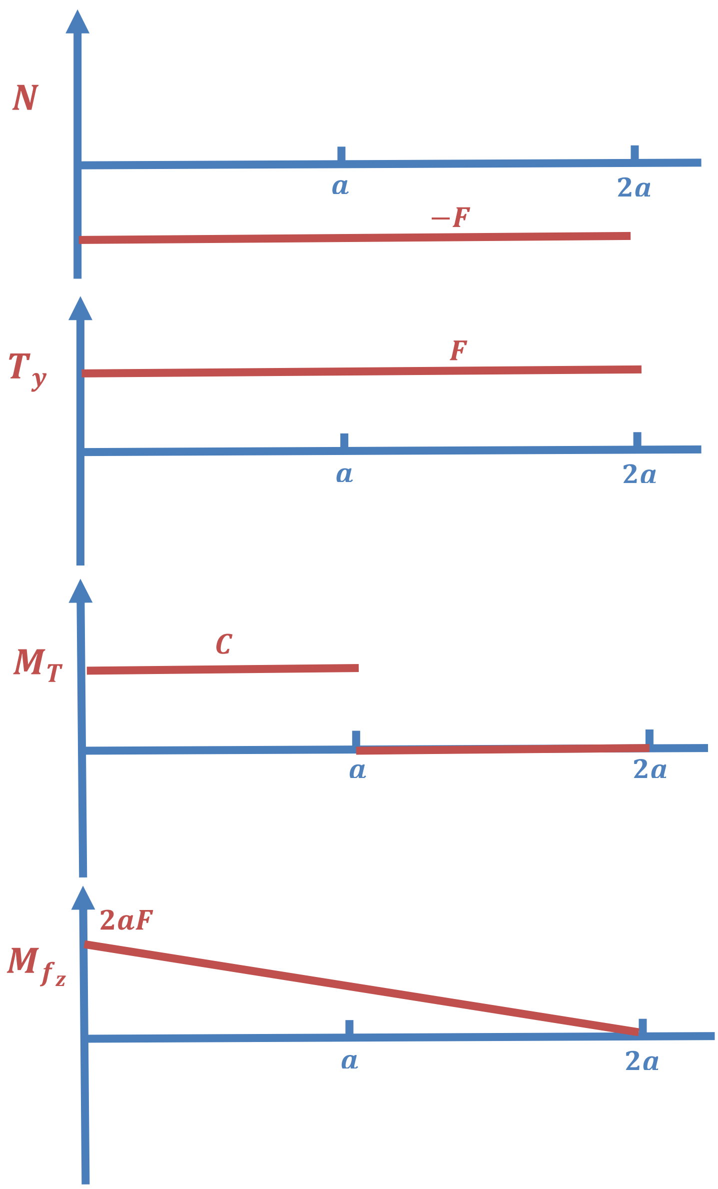
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

2 tronçons : AB et BC

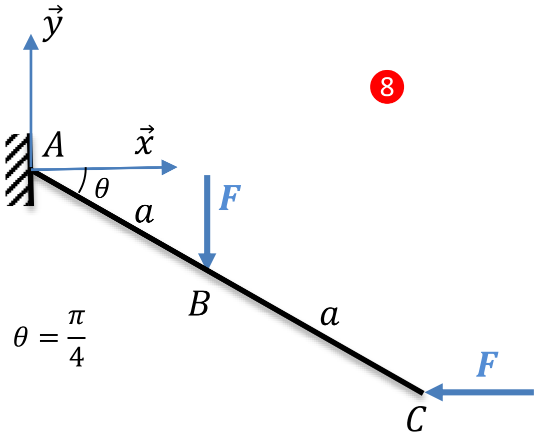
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1	Tronçon 2
$x \in]0, a[$	$x \in]a, 2a[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext\to I}\} = \begin{Bmatrix} -F & C \\ F & 0 \\ 0 & F(2a-x) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$ $-Fx + 2aF = F(2a-x)$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F(2a-x) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 8



Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

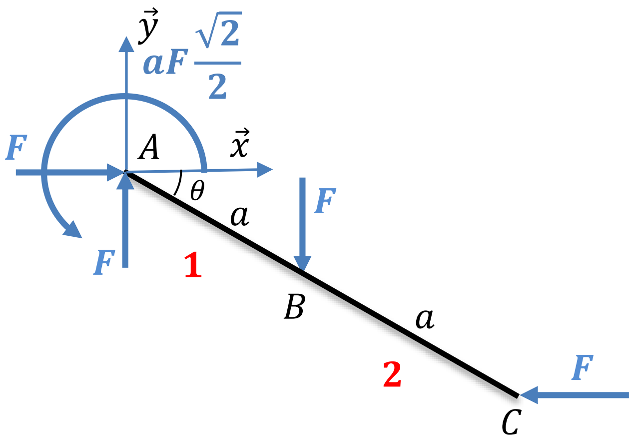
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B + \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -a\frac{\sqrt{2}}{2}F \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2a\frac{\sqrt{2}}{2}F \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 - F = 0 \\ Y_A - F + 0 = 0 \\ Z_A + 0 + 0 = 0 \\ L_A + 0 + 0 = 0 \\ M_A + 0 + 0 = 0 \\ N_A - a\frac{\sqrt{2}}{2}F - a\sqrt{2}F = N_A + aF\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

$X_A = F$	$Y_A = F$	$N_A = aF\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

2 tronçons : AB et BC

Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

<table>
<tr><td>Tronçon 1</td><td>Tronçon 2</td></tr>
<tr><td>$x \in]0, a[$</td><td>$x \in]a, 2a[$</td></tr>
<tr><td>

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\rightarrow II}\}$$

$$\left\{\begin{matrix} -F & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(a-x)\frac{\sqrt{2}}{2} - F(2a-x)\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{matrix}\right\}_M^B$$

$$\left\{\begin{matrix} -F\frac{\sqrt{2}}{2} + F\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -F\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -F(a-x)\frac{\sqrt{2}}{2} - F(2a-x)\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{matrix}\right\}_M^{B_\Sigma}$$

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2}F & 0 \\ 0 & F\frac{\sqrt{2}}{2}(2x-3a) \end{matrix}\right\}_M^{B_\Sigma}$$

$$-Fa\frac{\sqrt{2}}{2} + Fx\frac{\sqrt{2}}{2} - 2Fa\frac{\sqrt{2}}{2} + Fx\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F\frac{\sqrt{2}}{2}(2x-3a)$$

</td><td>

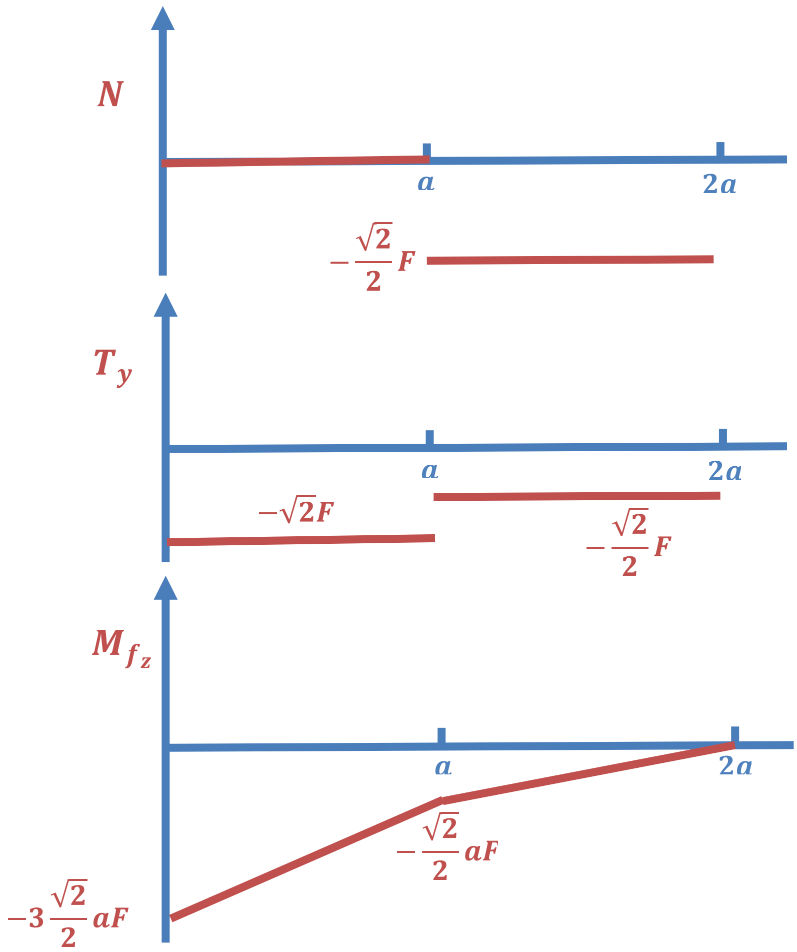
$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\rightarrow II}\}$$

$$\left\{\begin{matrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -F(2a-x)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\}_M^B$$

$$\left\{\begin{matrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}F & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}F & 0 \\ 0 & -F\frac{\sqrt{2}}{2}(2a-x) \end{matrix}\right\}_M^{B_\Sigma}$$

</td></tr>
</table>

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.

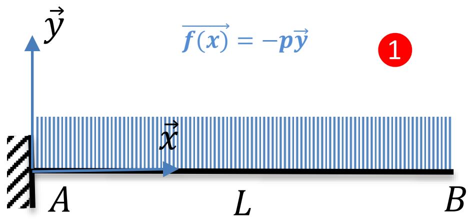


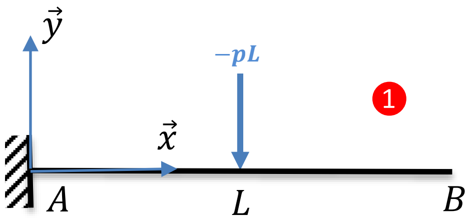
Exercice 2: Calcul de torseurs de cohésion avec des actions réparties

Rappels :

$$\frac{d\vec{R}(s)}{ds} + f(s) = \vec{0}$$
$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \overrightarrow{x_\Sigma} \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

Cas 1





Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

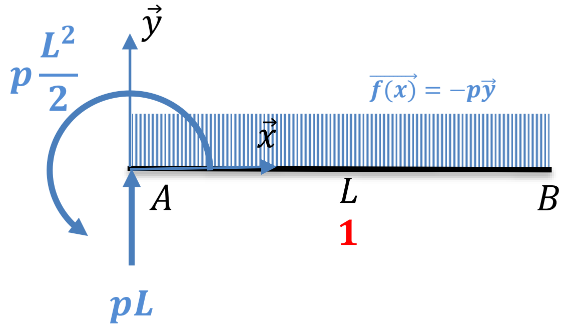
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_0^L -pdx & 0 \\ 0 & \int_0^L -pxdx \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ 0 & -p\frac{L^2}{2} \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 = 0 \\ Y_A - pL = 0 \\ Z_A + 0 = 0 \\ L_A + 0 = 0 \\ M_A + 0 = 0 \\ N_A - p\dfrac{L^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$Y_A = pL$	$N_A = p\dfrac{L^2}{2}$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



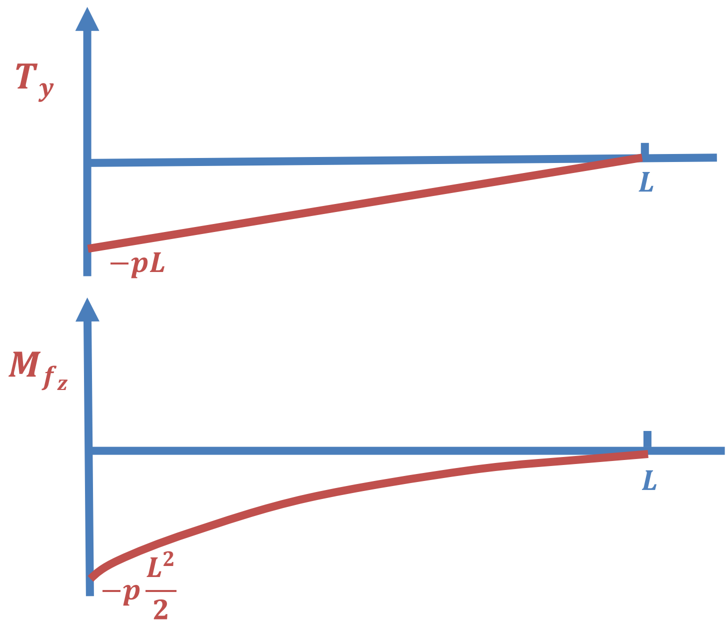
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

1 tronçon : AB

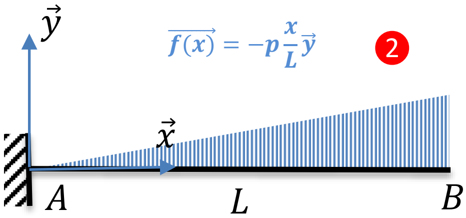
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

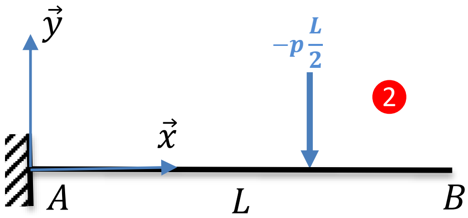
Tronçon 1
$x \in]0, L[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\}$ $$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_x^L -p du & 0 \\ 0 & \int_x^L -p(u-x)du \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$ $$\int_x^L -p(u-x)du = -p\left[\frac{u^2}{2} - ux\right]_x^L = -p\left(\frac{L^2}{2} - Lx - \frac{x^2}{2} + x^2\right) = -\frac{p}{2}(L^2 - 2Lx + x^2)$$ $$\int_x^L -p(u-x)du \underset{v=u-x}{=} \int_0^{L-x} -pvdv = -p\frac{(L-x)^2}{2}$$ $$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p(L-x) & 0 \\ 0 & -p\frac{(L-x)^2}{2} \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 2





Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

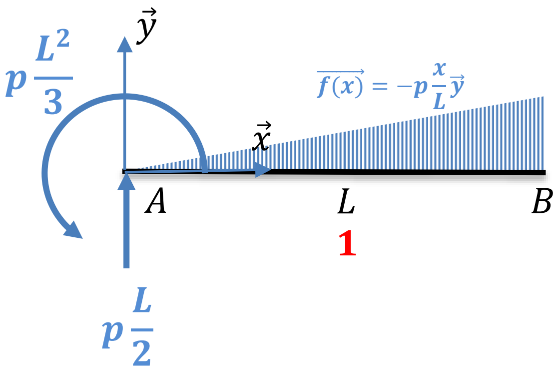
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_0^L -p\frac{x}{L}dx & 0 \\ 0 & \int_0^L -p\frac{x^2}{L}dx \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\frac{L}{2} & 0 \\ 0 & -p\frac{L^2}{3} \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 = 0 \\ Y_A - p\frac{L}{2} = 0 \\ Z_A + 0 = 0 \\ L_A + 0 = 0 \\ M_A + 0 = 0 \\ N_A - p\frac{L^2}{3} = 0 \end{cases}$$

$Y_A = p\frac{L}{2}$	$N_A = p\frac{L^2}{3}$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



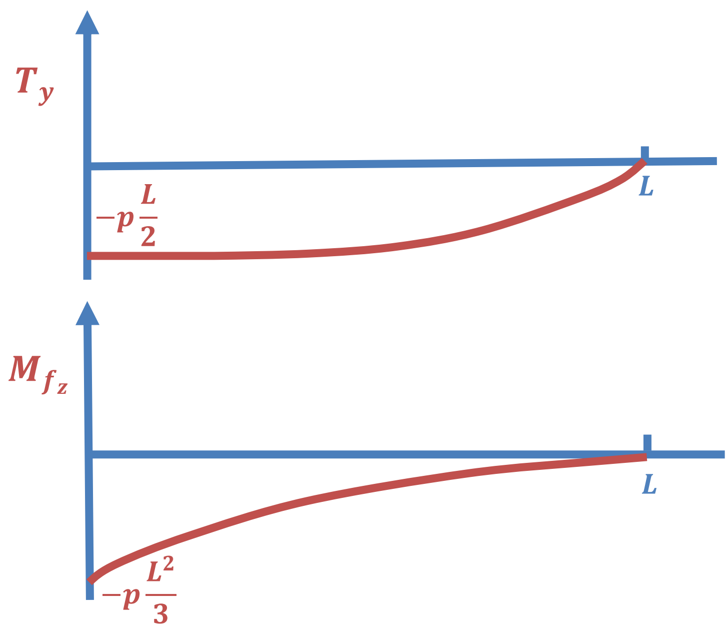
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

1 tronçon : AB

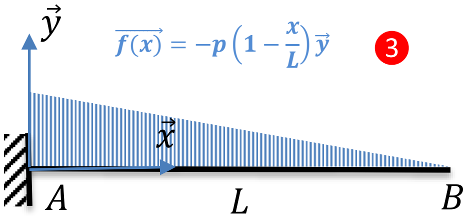
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

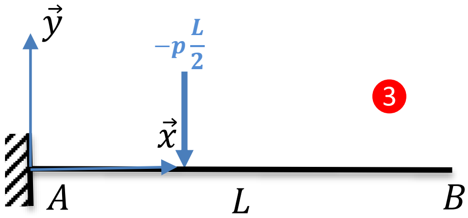
Tronçon 1
$x \in]0, L[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\}$ $$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_x^L -p\frac{u}{L}du & 0 \\ 0 & \int_x^L -p\frac{u}{L}(u-x)du \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$ $$\int_x^L -p\frac{u}{L}(u-x)du = -\frac{p}{L}\int_x^L u(u-x)du \underset{v=u-x}{=} -\frac{p}{L}\int_0^{L-x} v(v+x)dv = -\frac{p}{L}\left[\frac{v^3}{3}+\frac{v^2}{2}x\right]_0^{L-x}$$ $$= -\frac{p}{6L}(L-x)^2(2L+x) = -\frac{p}{6L}(L^2-2Lx+x^2)(2L+x)$$ $$= -\frac{p}{6L}(2L^3-4L^2x+2Lx^2+xL^2-2Lx^2+x^3) = -\frac{p}{6L}(2L^3-3L^2x+x^3)$$ $$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\frac{L^2-x^2}{2L} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{6L}(2L^3-3L^2x+x^3) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 3





Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

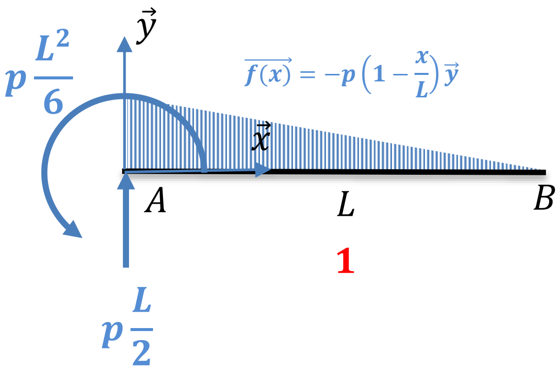
$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_0^L -p\left(1-\frac{x}{L}\right)dx & 0 \\ 0 & \int_0^L -p\left(1-\frac{x}{L}\right)xdx \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\frac{L}{2} & 0 \\ 0 & -p\frac{L^2}{6} \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 = 0 \\ Y_A - p\frac{L}{2} = 0 \\ Z_A + 0 = 0 \\ L_A + 0 = 0 \\ M_A + 0 = 0 \\ N_A - p\frac{L^2}{6} = 0 \end{cases}$$

$Y_A = p\frac{L}{2}$	$N_A = p\frac{L^2}{6}$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



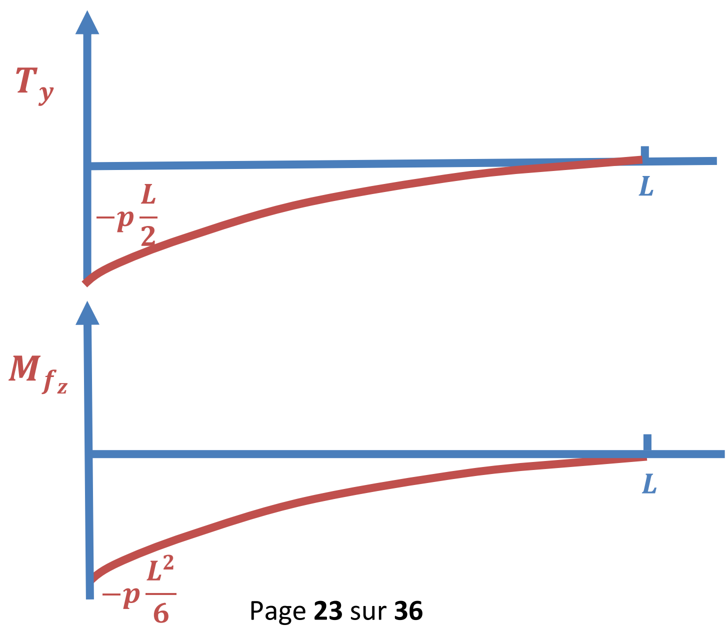
Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

1 tronçon : AB

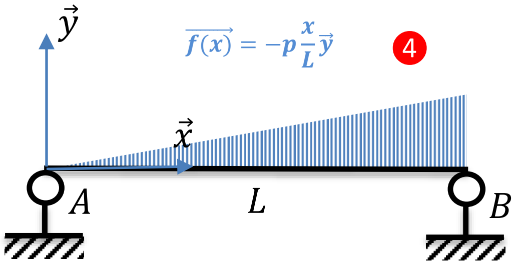
Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

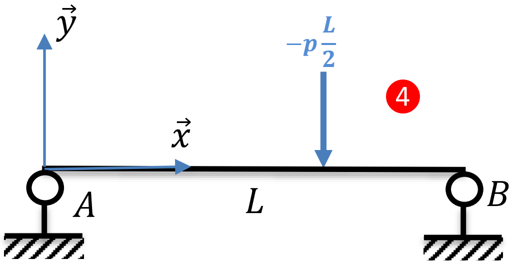
Tronçon 1
$x \in]0, L[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_x^L -\frac{p}{L}(L-u)du & 0 \\ 0 & \int_x^L -\frac{p}{L}(L-u)(u-x)du \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$ $\int_x^L -\frac{p}{L}(L-u)du \underset{v=L-u}{=} \frac{p}{L}\int_{L-x}^{0} vdv = -p\frac{(L-x)^2}{2L}$ $\int_x^L -\frac{p}{L}(L-u)(u-x)du = -\frac{p}{L}\int_x^L (Lu - Lx - u^2 + ux)du$ $\underset{v=u-x}{=} -\frac{p}{L}\int_0^{L-x}(Lv + Lx - Lx - v^2 - 2vx - x^2 + vx + x^2)dv$ $= -\frac{p}{L}\int_0^{L-x}(v(L-x) - v^2)dv = -\frac{p}{L}\left[v^2\frac{L-x}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_0^{L-x}$ $= -\frac{p}{L}\left[\frac{(L-x)^3}{2} - \frac{(L-x)^3}{3}\right] = -\frac{p}{6L}(L-x)^3$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\frac{(L-x)^2}{2L} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{6L}(L-x)^3 \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.



Cas 4





Question 1: Isoler le solide et déterminer les torseurs des actions extérieures sur celui-ci.

Dans ce cas, l'application du PFS est nécessaire car quelle que soit la partie de poutre (I ou II), il y a une cation de liaison à déterminer.

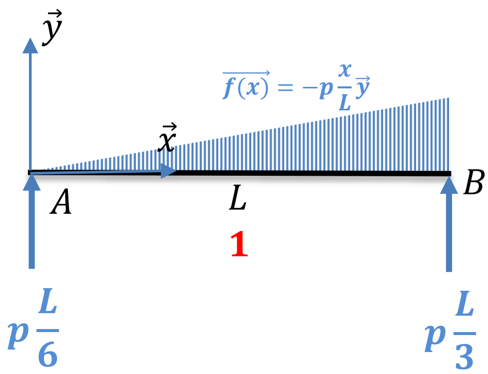
$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_0^L -p\frac{x}{L}dx & 0 \\ 0 & \int_0^L -p\frac{x^2}{L}dx \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\frac{L}{2} & 0 \\ 0 & -p\frac{L^2}{3} \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & LY_B \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + 0 = 0 \\ Y_A - p\frac{L}{2} + Y_B = 0 \\ Z_A + 0 = 0 \\ L_A + 0 = 0 \\ M_A + 0 = 0 \\ -p\frac{L^2}{3} + LY_B = 0 \end{cases}$$

$Y_A = p\frac{L}{6}$	$Y_B = p\frac{L}{3}$

Question 2: Représenter graphiquement la poutre et son chargement.



Question 3: Identifier les différents tronçons de la poutre où le torseur de cohésion sera différent.

1 tronçon : AB

Question 4: Exprimer le torseur de cohésion dans chacun de ces tronçons.

Tronçon 1

$x \in]0, L[$

Calcul complet

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ p\frac{L}{3} + \int_x^L -p\frac{u}{L}du & 0 \\ 0 & p\frac{L}{3}(L-x) + \int_x^L -p\frac{u}{L}(u-x)du \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

$$p\frac{L}{3} + \int_x^L -p\frac{u}{L}du = p\frac{2L^2}{6L} - 3p\frac{L^2-x^2}{6L} = \frac{p}{6L}(2L^2 - 3L^2 + 3x^2) = \frac{p}{6L}(3x^2 - L^2)$$

$$\int_x^L -p\frac{u}{L}(u-x)du = -\frac{p}{L}\int_x^L u(u-x)du \underset{v=u-x}{=} -\frac{p}{L}\int_0^{L-x} v(v+x)dv = -\frac{p}{L}\left[\frac{v^3}{3} + \frac{v^2}{2}x\right]_0^{L-x}$$

$$= -\frac{p}{6L}(L-x)^2(2L+x) = -\frac{p}{6L}(L^2 - 2Lx + x^2)(2L+x)$$

$$= -\frac{p}{6L}(2L^3 - 4L^2x + 2Lx^2 + xL^2 - 2Lx^2 + x^3) = -\frac{p}{6L}(2L^3 - 3L^2x + x^3)$$

$$p\frac{L}{3}(L-x) + \int_x^L -p\frac{u}{L}(u-x)du = \frac{p}{6L}(2L^3 - 2L^2x) - \frac{p}{6L}(2L^3 - 3L^2x + x^3)$$

$$= \frac{p}{6L}(2L^3 - 2L^2x - 2L^3 + 3L^2x - x^3) = \frac{p}{6L}x(L^2 - x^2)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{p}{6L}(3x^2 - L^2) & 0 \\ 0 & \frac{p}{6L}x(L^2 - x^2) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Utilisation du résultat du cas 2

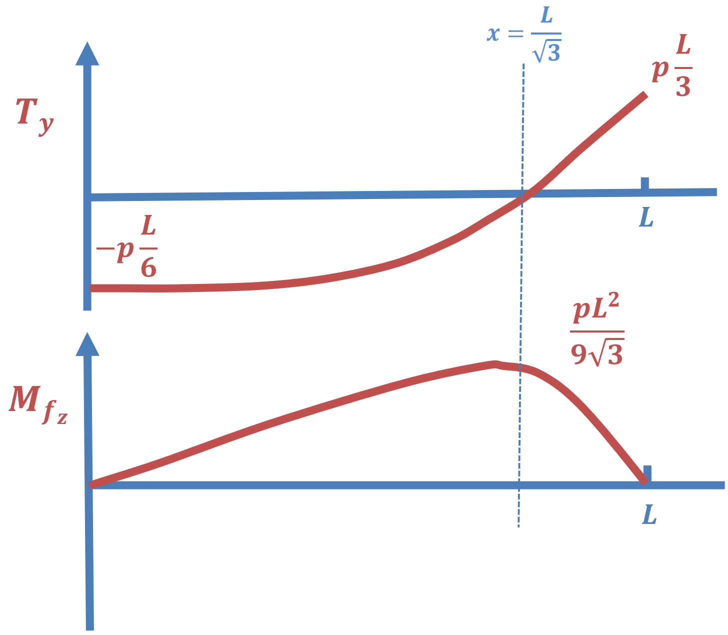
$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\frac{L^2-x^2}{2L} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{6L}(2L^3 - 3L^2x + x^3) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ p\frac{L}{3} & 0 \\ 0 & (L-x)\frac{pL}{3} \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\frac{L^2-x^2}{2L} + p\frac{L}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{6L}(2L^3 - 3L^2x + x^3) + (L-x)\frac{pL}{3} \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{p}{6L}(3L^2 - 3x^2 - 2L^2) & 0 \\ 0 & -\frac{p}{6L}[2L^3 - 3L^2x + x^3 - 2L^2(L-x)] \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

$$-\frac{p}{6L}[(2L^3 - 3L^2x + x^3) + 2L^2(L-x)] = -\frac{p}{6L}[2L^3 - 3L^2x + x^3 - 2L^3 + 2L^2x] = -\frac{p}{6L}x[x^2 - L^2]$$

Question 5: Tracer les diagrammes des sollicitations.

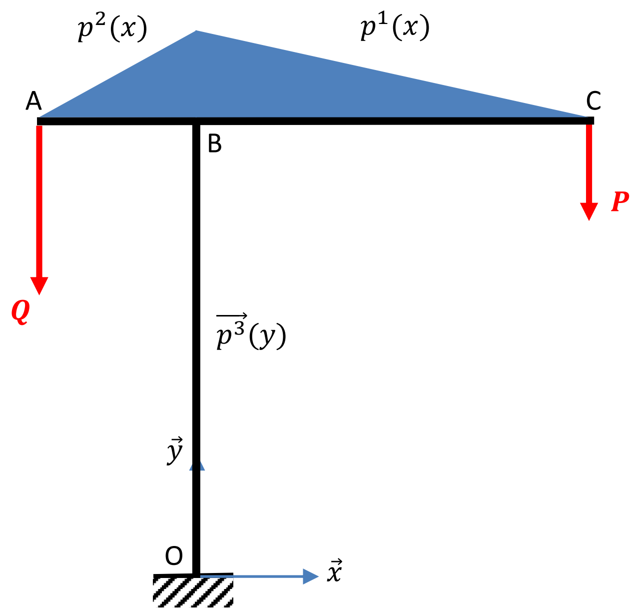


Exercice 3: Poutre à géométrie complexe

$$\overrightarrow{p^1}(x) = -p\frac{L_{21} - x}{L_{21}}\vec{y} = -p\left(1 - \frac{x}{L_{21}}\right)\vec{y}$$

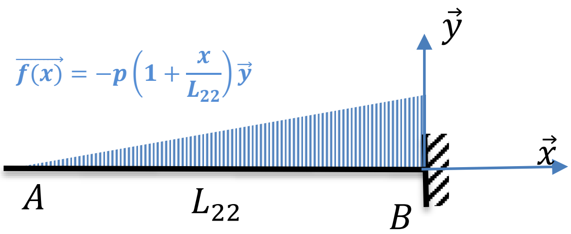
$$\overrightarrow{p^2}(x) = -p\frac{L_{22} + x}{L_{22}}\vec{y} = -p\left(1 + \frac{x}{L_{22}}\right)\vec{y}$$

$$\overrightarrow{p^3}(y) = -p\vec{y}$$



$$OB = H \quad - \quad AB = L_{21} \quad - \quad BC = L_{22}$$

Question 1: Déterminer le torseur de cohésion dans la partie AB de cette structure.



Tronçon AB
$x \in]-L_{22}, 0[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext\to I}\}$ $-\begin{Bmatrix} \int_{-L_{22}}^{x} -\frac{p}{L_{22}}(L_{22}+u)du & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \int_{-L_{22}}^{x} -\frac{p}{L_{22}}(L_{22}+u)(u-x)du \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma} - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_\Sigma}$ $-\int_{-L_{22}}^{x} -\frac{p}{L_{22}}(L_{22}+u)du \underset{v=u-x}{=} \frac{p}{L_{22}}\int_{-(L_{22}+x)}^{0} [(L_{22}+x)+v]dv$

$$= \frac{p}{L_{22}}\left[(L_{22}+x)v+\frac{v^2}{2}\right]_{-(L_{22}+x)}^{0} = \frac{p}{L_{22}}\left[(L_{22}+x)^2-\frac{(L_{22}+x)^2}{2}\right] = \frac{p}{L_{22}}\frac{(L_{22}+x)^2}{2}$$

$$-\int_{-L_{22}}^{x} -\frac{p}{L_{22}}(L_{22}+u)(u-x)du = \frac{p}{L_{22}}\int_{-L_{22}}^{x}(L_{22}+u)(u-x)du$$

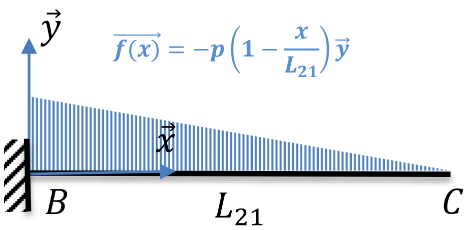
$$\underset{v=u-x}{=} \frac{p}{L_{22}}\int_{-(L_{22}+x)}^{0}(L_{22}+v+x)vdv = \frac{p}{L_{22}}\int_{-(L_{22}+x)}^{0}[(L_{22}+x)v+v^2]dv$$

$$= \frac{p}{L_{22}}\left[(L_{22}+x)\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}\right]_{-(L_{22}+x)}^{0} = \frac{p}{L_{22}}\left[-\frac{(L_{22}+x)^3}{2}+\frac{(L_{22}+x)^3}{3}\right]$$

$$= -\frac{p}{6L_{22}}(L_{22}+x)^3$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ p\dfrac{(L_{22}+x)^2}{2L_{22}} + Q & 0 \\ 0 & -\dfrac{p}{6L_{22}}(L_{22}+x)^3 - Q(L_{22}+x) \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma}$$

Question 2: Déterminer le torseur de cohésion dans la partie BC de cette structure.



Tronçon BC
$x \in]0, L_{21}[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\}$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \int_x^{L} -\frac{p}{L_{21}}(L_{21}-u)du & 0 \\ 0 & \int_x^{L_{21}} -\frac{p}{L_{21}}(L_{21}-u)(u-x)du \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C}^{B_\Sigma}$$

$$\int_x^{L_{21}} -\frac{p}{L_{21}}(L_{21}-u)du \underset{v=L_{21}-u}{=} \frac{p}{L_{21}}\int_{L_{21}-x}^{0} vdv = -p\frac{(L_{21}-x)^2}{2L_{21}}$$

$$\int_x^{L_{21}} -\frac{p}{L_{21}}(L_{21}-u)(u-x)du = -\frac{p}{L_{21}}\int_x^{L_{21}}(L_{21}u-L_{21}x-u^2+ux)du$$

$$\underset{v=u-x}{=} -\frac{p}{L_{21}}\int_0^{L_{21}-x}(L_{21}v+L_{21}x-L_{21}x-v^2-2vx-x^2+vx+x^2)dv$$

$$= -\frac{p}{L_{21}}\int_0^{L_{21}-x}(v(L_{21}-x)-v^2)dv = -\frac{p}{L_{21}}\left[v^2\frac{L_{21}-x}{2}-\frac{v^3}{3}\right]_0^{L_{21}-x}$$

$$= -\frac{p}{L_{21}}\left[\frac{(L_{21}-x)^3}{2}-\frac{(L_{21}-x)^3}{3}\right] = -\frac{p}{6L_{21}}(L_{21}-x)^3$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -p\dfrac{(L_{21}-x)^2}{2L_{21}} - P & 0 \\ 0 & -\dfrac{p}{6L_{21}}(L_{21}-x)^3 - P(L_{21}-x) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Question 3: Pour chacune des actions $\overrightarrow{p^1}$ et $\overrightarrow{p^2}$, proposer un effort concentré dont l'action est équivalente à l'action de la charge répartie p^i.

Pour la charge $\overrightarrow{p_2}(x)$, on a la résultante du torseur de cohésion et son moment en M qui valent :

$$\vec{R} = \int_{-L_{22}}^{0} p_2(u)\vec{y}du = \frac{pL}{2}$$

$$\vec{M} = \int_{-L_{22}}^{0} \overrightarrow{MU} \wedge p_2(u)\vec{y}du$$

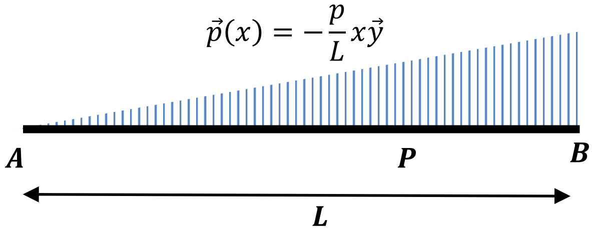
On sait que le moment est nul au point P_2.

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \displaystyle\int_{-L_{22}}^{0} p_2(u)du & 0 \\ 0 & \displaystyle\int_{-L_{22}}^{0} u * p_2(u)du \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{pL}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_2}^{B_\Sigma}$$

On peut donc modéliser l'action p_2 à l'aide d'un effort de droite d'action $(P_2, \vec{y})$

Démonstration dans un cas général :

$$\vec{p}(x) = -\frac{p}{L}x\vec{y}$$



Calcul du moment en P de la répartition d'effort :

$$M = \int_{-x}^{-x+L} \overrightarrow{PU} \wedge \overrightarrow{p(x+u)}du \,.\, \vec{z}$$

$$M = -\int_{-x}^{-x+L} u\frac{p}{L}(x+u)du$$

$$M = \frac{p}{L}\int_{-x}^{-x+L} (ux+u^2)du$$

$$M \underset{v=u+x}{=} \frac{p}{L}\int_{0}^{L} [(v-x)x + (v-x)^2]dv$$

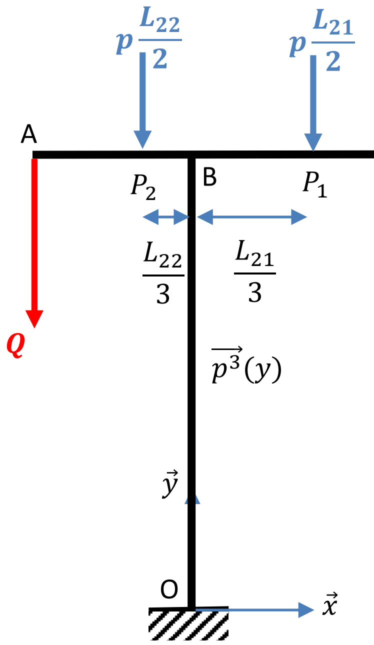
$$M = \frac{p}{L}\int_{0}^{L} [v(v-x)]dv$$

$$M = \frac{p}{L}\int_{0}^{L} [v^2 - vx]dv$$

$$M = \frac{p}{L}\left[\frac{L^3}{3} - \frac{L^2}{2}x\right]$$
$$M = \frac{p}{3}\left[L^2 - \frac{3}{2}xL\right]$$

$$M = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = L^2 - \frac{3}{2}xL$$
$$\Leftrightarrow L = \frac{3}{2}x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}L$$

De même pour p_1.



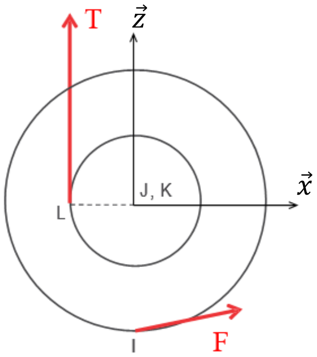
Question 4: Déterminer le torseur de cohésion dans la partie OB.

Attention à la base locale !

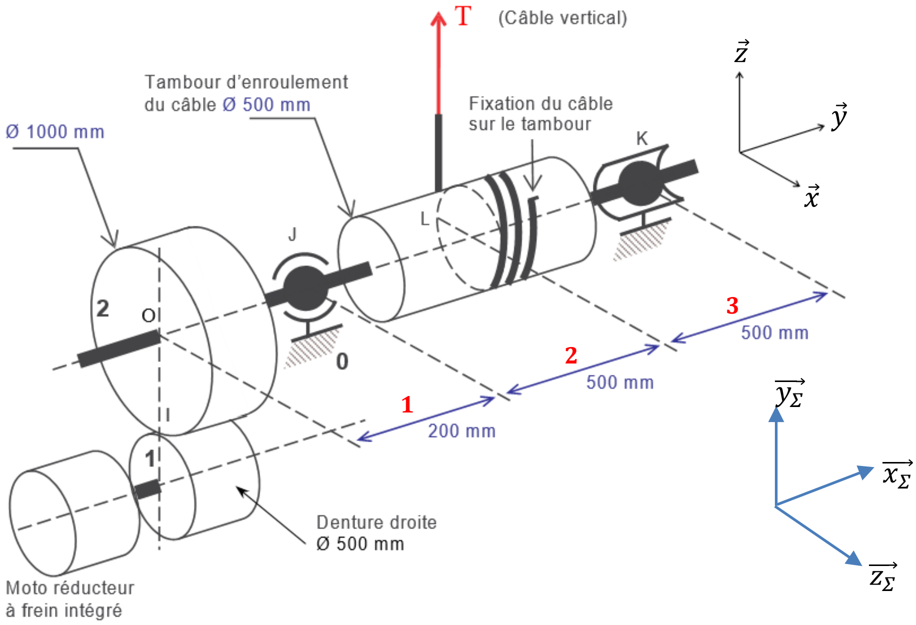
Tronçon BC
$y \in]0, H[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\}$ $$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\left[P + Q + \frac{p}{2}(L_{21} + L_{22})\right] - p(H - y) & 0 \\ 0 & -PL_{21} + QL_{22} + \frac{p}{6}({L_{22}}^2 - {L_{21}}^2) \end{Bmatrix}_M^B$$

$$\begin{Bmatrix} -\left[P+Q+\frac{p}{2}(L_{21}+L_{22})\right]-p(H-y) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -PL_{21}+QL_{22}+\frac{p}{6}\left({L_{22}}^2-{L_{21}}^2\right) \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Exercice 4: Treuil de levage



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ F_x \tan 20 \end{bmatrix}^B$$



Question 1: Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à l'arbre 2 et proposer les différents torseurs en leurs points caractéristiques

$\begin{Bmatrix} X_J & 0 \\ Y_J & 0 \\ Z_J & 0 \end{Bmatrix}_J^B$	$\begin{Bmatrix} X_K & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_K & 0 \end{Bmatrix}_K^B$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T & 0 \end{Bmatrix}_L^B$	$\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ 0 & 0 \\ F_x \tan 20 & 0 \end{Bmatrix}_I^B$

Question 2: Exprimer tous ces torseurs au point J en fonction des longueurs L_1, L_2, L_3, r et R

$\begin{Bmatrix} X_J & 0 \\ Y_J & 0 \\ Z_J & 0 \end{Bmatrix}_J^B$		$\begin{Bmatrix} X_J & 0 \\ Y_J & 0 \\ Z_J & 0 \end{Bmatrix}_J^B$
$\begin{Bmatrix} X_K & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_K & 0 \end{Bmatrix}_K^B$ $\overrightarrow{JK} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 + L_3 \\ 0 \end{bmatrix}^B$	$\overrightarrow{M_J} = \overrightarrow{M_K} + \begin{bmatrix} 0 \\ (L_2 + L_3) \\ 0 \end{bmatrix}^B \wedge \begin{bmatrix} X_K \\ 0 \\ Z_K \end{bmatrix}^B$ $= \begin{bmatrix} (L_2 + L_3) Z_K \\ 0 \\ -(L_2 + L_3) X_K \end{bmatrix}^B$	$\begin{Bmatrix} X_K & (L_2 + L_3) Z_K \\ 0 & 0 \\ Z_K & -(L_2 + L_3) X_K \end{Bmatrix}_J^B$
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T & 0 \end{Bmatrix}_L^B$ $\overrightarrow{JL} = \begin{bmatrix} -r \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix}^B$	$\overrightarrow{M_J} = \overrightarrow{M_L} + \begin{bmatrix} -r \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix}^B \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} L_2 T \\ rT \\ 0 \end{bmatrix}^B$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_2 T \\ 0 & rT \\ T & 0 \end{Bmatrix}_J^B$

$\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ 0 & 0 \\ F_x \tan 20 & 0 \end{Bmatrix}_I^B$ $\overrightarrow{JI} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1 \\ -R \end{bmatrix}^B$	$\overrightarrow{M_J} = \overrightarrow{M_I} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L_1 \\ -R \end{bmatrix}^B \wedge \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ F_x \tan 20 \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} -L_1 F_x \tan 20 \\ -R \\ L_1 F_x \end{bmatrix}^B$	$\begin{Bmatrix} F_x & -L_1 F_x \tan 20 \\ 0 & -RF_x \\ F_x \tan 20 & L_1 F_x \end{Bmatrix}_J^B$

Question 3: Déterminer le système littéral d'équations décrivant l'équilibre du système

Par application du PFS à l'arbre, on a :

$$\begin{Bmatrix} X_J & 0 \\ Y_J & 0 \\ Z_J & 0 \end{Bmatrix}_J^B + \begin{Bmatrix} X_K & (L_2+L_3)Z_K \\ 0 & 0 \\ Z_K & -(L_2+L_3)X_K \end{Bmatrix}_J^B + \begin{Bmatrix} 0 & L_2 T \\ 0 & rT \\ T & 0 \end{Bmatrix}_J^B + \begin{Bmatrix} F_x & -L_1 F_x \tan 20 \\ 0 & -RF_x \\ F_x \tan 20 & L_1 F_x \end{Bmatrix}_J^B = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_J + X_K + \boldsymbol{F_x} = 0 \\ Y_J = 0 \\ Z_J + Z_K + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F_x} \tan 20 = 0 \\ (L_2+L_3)Z_K + L_2 \boldsymbol{T} - L_1 \boldsymbol{F_x} \tan 20 = 0 \\ r\boldsymbol{T} - R\boldsymbol{F_x} = 0 \\ -(L_2+L_3)X_K + L_1 \boldsymbol{F_x} = 0 \end{cases}$$

Question 4: Déterminer les valeurs numériques de l'action en I du pignon sur la roue au cours de la montée de la charge à vitesse constante (frein ouvert) et les actions sur les roulements en J et en K

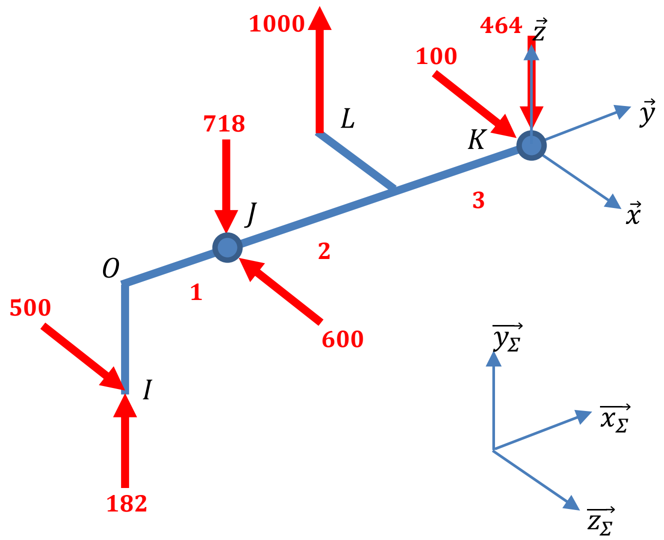
$F_x = \frac{r}{R} T$	$X_K = \frac{L_1}{L_2+L_3} F_x$	$Z_K = -\frac{L_2}{L_2+L_3} T + \frac{L_1}{L_2+L_3} F_x \tan 20$	$Z_J = -Z_K - T - F_x \tan 20$	$X_J = -X_K - F_x$
$F_x = \frac{T}{2}$	$X_K = 0{,}2 F_x$	$Z_K = -0{,}5T + 0{,}2F_x \tan 20$		
$F_x = 500\ N$	$X_K = 100\ N$	$Z_K = -463.6\ N$	$Z_J = -718.4$	$X_J = -600\ N$

$$F_x \tan 20 = 181{,}98\ N$$

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_x}^2 \tan^2 20} = F_x \sqrt{1 + \tan^2 20} = 532.09\ N$$

$$\begin{Bmatrix} -600 & 0 \\ 0 & 0 \\ -718{,}4 & 0 \end{Bmatrix}_J^B + \begin{Bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \\ -463{,}6 & 0 \end{Bmatrix}_K^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1000 & 0 \end{Bmatrix}_L^B + \begin{Bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 0 \\ 182 & 0 \end{Bmatrix}_I^B = \{0\}$$

Question 5: Représenter graphiquement en 3D l'arbre et ses actions extérieures



Question 6: En déduire l'expression littérale et numérique du torseur de cohésion dans les 3 tronçons de la poutre

Attention à la base locale !

Exprimons d'abord les torseurs dans la base générale :

Tronçon 1 : OJ

$x \in]0,0.2[=]0, L_1[$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\}$$

$$= \begin{Bmatrix} X_J & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_J & 0 \end{Bmatrix}_J^B + \begin{Bmatrix} X_K & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_K & 0 \end{Bmatrix}_K^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T & 0 \end{Bmatrix}_L^B$$

$$= \begin{Bmatrix} X_J & (L_1 - x)Z_J \\ 0 & 0 \\ Z_J & -(L_1 - x)X_J \end{Bmatrix}_M^B + \begin{Bmatrix} 0 & (L_1 + L_2 - x)T \\ 0 & rT \\ T & 0 \end{Bmatrix}_M^B + \begin{Bmatrix} X_K & (L_1 + L_2 + L_3 - x)Z_K \\ 0 & 0 \\ Z_K & -(L_1 + L_2 + L_3 - x)X_K \end{Bmatrix}_M^B$$

$$= \begin{Bmatrix} X_J + X_K & (L_1 - x)Z_J + (L_1 + L_2 + L_3 - x)Z_K + (L_1 + L_2 - x)T \\ 0 & rT \\ Z_J + Z_K + T & -(L_1 - x)X_J - (L_1 + L_2 + L_3 - x)X_K \end{Bmatrix}_M^B$$

$$= \begin{Bmatrix} -500 & 182x \\ 0 & 250 \\ -182 & -500x \end{Bmatrix}_M^B$$

Passage dans la base locale :

$$\begin{Bmatrix} 0 & rT \\ Z_J + Z_K + T & -(L_1 - x)X_J - (L_1 + L_2 + L_3 - x)X_K \\ X_J + X_K & (L_1 - x)Z_J + (L_1 + L_2 + L_3 - x)Z_K + (L_1 + L_2 - x)T \end{Bmatrix}_M^B$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & rT \\ Z_J + Z_K + T & x(X_J + X_K) - L_1 X_J - (L_1 + L_2 + L_3)X_K \\ X_J + X_K & -x(Z_J + Z_K + T) + (L_1 + L_2 + L_3)Z_K + (L_1 + L_2)T + L_1 Z_J \end{Bmatrix}_M^B$$

$$=\begin{Bmatrix} 0 & 250 \\ -182 & -500x \\ -500 & 182x \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Tronçon 2 : JL

$x \in]L_1, L_1+L_2[$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\}$$

$$=\begin{Bmatrix} 0 & (L_1+L_2-x)T \\ 0 & rT \\ T & 0 \end{Bmatrix}_M^B + \begin{Bmatrix} X_K & (L_1+L_2+L_3-x)Z_K \\ 0 & 0 \\ Z_K & -(L_1+L_2+L_3-x)X_K \end{Bmatrix}_M^B =$$

$$=\begin{Bmatrix} X_K & (L_1+L_2+L_3-x)Z_K+(L_1+L_2-x)T \\ 0 & rT \\ Z_K+T & -(L_1+L_2+L_3-x)X_K \end{Bmatrix}_M^B = \begin{Bmatrix} 100 & 143.6-536x \\ 0 & 250 \\ 536 & 100x-120 \end{Bmatrix}_M^B$$

Passage dans la base locale :

$$\begin{Bmatrix} 0 & rT \\ Z_K+T & -(L_1+L_2+L_3-x)X_K \\ X_K & (L_1+L_2+L_3-x)Z_K+(L_1+L_2-x)T \end{Bmatrix}_M^B$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & rT \\ Z_K+T & xX_K-(L_1+L_2+L_3)X_K \\ X_K & -x(Z_K+T)+(L_1+L_2+L_3)Z_K+(L_1+L_2)T \end{Bmatrix}_M^B$$

$$=\begin{Bmatrix} 0 & 250 \\ 536 & 100x-120 \\ 100 & 143.6-536x \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Tronçon 3 : LK

$x \in]L_1+L_2, L_1+L_2+L_3[$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\}$$

$$=\begin{Bmatrix} X_K & (L_1+L_2+L_3-x)Z_K \\ 0 & 0 \\ Z_K & -(L_1+L_2+L_3-x)X_K \end{Bmatrix}_M^B = \begin{Bmatrix} 100 & 464x-556.8 \\ 0 & 0 \\ -464 & 100x-120 \end{Bmatrix}_M^B$$

Passage dans la base locale :

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Z_K & -(L_1+L_2+L_3-x)X_K \\ X_K & (L_1+L_2+L_3-x)Z_K \end{Bmatrix}_M^B$$

$$=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Z_K & xX_K-(L_1+L_2+L_3)X_K \\ X_K & -xZ_K+(L_1+L_2+L_3)Z_K \end{Bmatrix}_M^B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -464 & 100x-120 \\ 100 & 464x-556.8 \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Question 7: Tracer les diagrammes de sollicitations associés