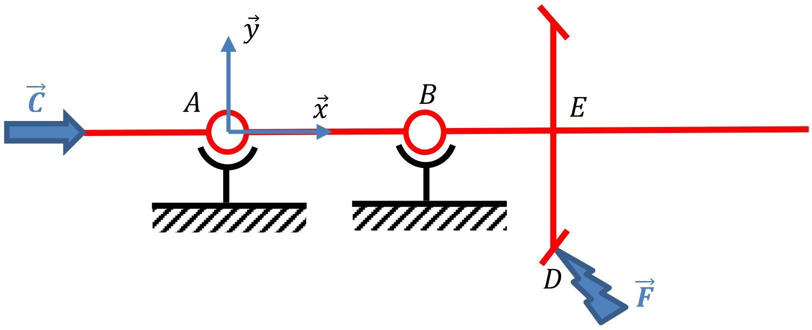
Exercice 1: Déformation d'un arbre sur deux roulements



$$AB = a = 106\,mm - BE = b = 42.59\,mm - ED = R = 28.6\,mm$$
$$a + b = l$$
$$d = 2r = 65\,mm$$
$$E = 210\,GPa$$
$$C = -1160\,Nm$$
$$F = 53593\,N$$
$$\{\mathcal{T}_{F\to arbre}\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} -24160 & 0 \\ 25366 & 0 \\ -40559 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}}$$

Question 1: Déterminer les actions dans les roulements en A et B.

$$\begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & aZ_A \\ Z_A & -aY_A \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} F_x & -RF_z \\ F_y & -bF_z \\ F_z & bF_y + RF_x \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \wedge \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ aZ_A \\ -aY_A \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{bmatrix} b \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \wedge \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -RF_z \\ -bF_z \\ bF_y + RF_x \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} X_A + X_B + F_x = 0 \\ Y_A + Y_B + F_y = 0 \\ Z_A + Z_B + F_z = 0 \\ C - RF_z = 0 \\ aZ_A - bF_z = 0 \\ -aY_A + bF_y + RF_x = 0 \end{cases}$$

$-aY_A + bF_y + RF_x$	$Y_A + Y_B + F_y = 0$ $Y_B = -Y_A - F_y$	$aZ_A - bF_z = 0$	$Z_A + Z_B + F_z = 0$ $Z_B = -Z_A - F_z$

$Y_A = \frac{bF_y + RF_x}{a}$	$Y_B = -\frac{(b+a)F_y + RF_x}{a}$	$Z_A = \frac{b}{a}F_z$	$Z_B = -\frac{a+b}{a}F_z$

$Y_A = \frac{42.59 * 25366 + 28.6 * (-24160)}{106}$	$Y_B = -\frac{(42.59 + 106) * 25366 + 28.6 * (-24160)}{106}$
$Z_A = -\frac{42.59}{106}40559$	$Z_B = \frac{106 + 42.59}{106}40559$

$Y_A = 3673{,}2$	$Y_B = -29039{,}2$
$Z_A = -16296{,}3$	$Z_B = 56855{,}3$

Question 2: Déterminer le torseur de cohésion le long de l'arbre.

Tronçon AB : $\in]0, a[$	Tronçon BE : $\in]a, l[$
$\{\mathcal{T}_C\} = -\{\mathcal{T}_{ext\to I}\}$ $= -\begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}} - \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}}$ $= -\begin{Bmatrix} X_A & C \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}}$ $\begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \wedge \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ xZ_A \\ -xY_A \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$ $= -\begin{Bmatrix} X_A & C \\ Y_A & xZ_A \\ Z_A & -xY_A \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}}$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} -X_A & -C \\ -Y_A & -xZ_A \\ -Z_A & xY_A \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}}$ $= \begin{Bmatrix} -X_A & 1160 \\ -3673 & 16296x \\ 16296 & 3673x \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}}$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\}$ $= \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}}$ $\begin{bmatrix} l-x \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \wedge \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -RF_z \\ (x-l)F_z \\ (l-x)F_y + RF_x \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$ $= \begin{Bmatrix} F_x & -RF_z \\ F_y & F_z x - F_z l \\ F_z & -xF_y + RF_x + lF_y \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}}$ $= \begin{Bmatrix} F_x & -RF_z \\ F_y & F_z(x-l) \\ F_z & F_y(l-x) + RF_x \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}}$ $= \begin{Bmatrix} -24160 & 1160 \\ 25366 & -40559x + 6027 \\ -40559 & 3078 - 25366x \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}}$

Question 3: Compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs numériques.

	$Tronçon\ 1$	$Tronçon\ 2$
$y(x)$ $M_{f_i}{}^y = A_i{}^y x + B_i{}^y$	$A_1{}^y = 3673$	$A_2{}^y = -25366$
	$B_1{}^y = 0$	$B_2{}^y = 3078$
$z(x)$ $M_{f_i}{}^z = A_i{}^z x + B_i{}^z$	$A_1{}^z = 16296$	$A_2{}^z = -40559$
	$B_1{}^z = 0$	$B_2{}^z = 6027$

Question 4: Déterminer la déformée suivant y ou z dans le tronçon 2 (au signe près) $f_2(x)$, de manière générale en fonction des coefficients A_i, B_i.

Attention : dans le cas du calcul de z(x), il faudra ajouter un moins.

$EIf_1''(x) = \pm(A_1x + B_1)$ Conditions aux limites de la poutre : $f_1(0) = f_1(a) = 0$ I étant constant : $EIf_1'(x) = A_1\frac{x^2}{2} + B_1x + K_1^1$ $EIf_1(x) = A_1\frac{x^3}{6} + B_1\frac{x^2}{2} + K_1^1x + K_1^2$ $f_1(0) = 0 \Rightarrow K_1^2 = 0$ $EIf_1(x) = A_1\frac{x^3}{6} + B_1\frac{x^2}{2} + K_1^1x$ $f_1(a) = 0 \Rightarrow A_1\frac{a^3}{6} + B_1\frac{a^2}{2} + K_1^1a = 0$ $K_1^1a = -A_1\frac{a^3}{6} - B_1\frac{a^2}{2}$ $K_1^1 = -\left(A_1\frac{a^2}{6} + B_1\frac{a}{2}\right)$ $K_1^1 = -\frac{a}{6}(aA_1 + 3B_1)$ $EIf_1(x) = A_1\frac{x^3}{6} + B_1\frac{x^2}{2} + K_1^1x$ On aura besoin par la suite de : $EIf_1'(x) = \frac{A_1}{2}x^2 + B_1x + K_1^1$	$EIf_2''(x) = \pm(A_2x + B_2)$ Continuité de la poutre : $f_2(a) = f_1(a) = 0 \quad ; \quad f_2'(a) = f_1'(a)$ I étant constant : $EIf_2'(x) = A_2\frac{x^2}{2} + B_2x + K_2^1$ $EIf_2(x) = A_2\frac{x^3}{6} + B_2\frac{x^2}{2} + K_2^1x + K_2^2$ $f_2'(a) = f_1'(a)$ $\Rightarrow A_2\frac{a^2}{2} + B_2a + K_2^1 = \frac{A_1}{2}a^2 + B_1a + K_1^1$ $\Rightarrow K_2^1 = \frac{A_1}{2}a^2 + B_1a + K_1^1 - A_2\frac{a^2}{2} - B_2a$ $\Rightarrow K_2^1 = \frac{a^2}{2}(A_1 - A_2) + a(B_1 - B_2) + K_1^1$ $f_2(a) = 0$ $\Rightarrow A_2\frac{a^3}{6} + B_2\frac{a^2}{2} + K_2^1a + K_2^2 = 0$ $\Rightarrow K_2^2 = -A_2\frac{a^3}{6} - B_2\frac{a^2}{2} - K_2^1a$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x)\ \forall x \epsilon]0, a[\\ f_2(x)\ \forall x \epsilon]l, 2a[\end{cases}$$

Au bilan :

$$f_1 = \frac{1}{EI}\left[A_1\frac{x^3}{6} + B_1\frac{x^2}{2} + K_1^1x\right]$$

$$f_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{A_2}{6}x^3 + \frac{B_2}{2}x^2 + K_2^1x + K_2^2\right]$$

$$K_1^1 = -\frac{a}{6}(aA_1 + 3B_1)$$

$$K_2^1 = \frac{a^2}{2}(A_1 - A_2) + a(B_1 - B_2) + K_1^1$$

$$K_2^2 = -A_2\frac{a^3}{6} - B_2\frac{a^2}{2} - K_2^1a$$

Question 5: En déduire la flèche de l'arbre en E suivant y et z.

Etude de $y(x)$			
xY_A		$-xF_y + RF_x + lF_y$	
A_1	B_1	A_2	B_2
3673	0	-25366	3078
$\frac{A_2}{6}$	$\frac{B_2}{2}$	${K_2}^1$	${K_2}^2$
-4228	1539	-170	5,7
$y_2(x) = \frac{1}{EI_{G_z}}\left[\frac{A_2}{6}x^3 + \frac{B_2}{2}x^2 + {K_2}^1 x + {K_2}^2\right]$			
$\boldsymbol{y(l) = 3,33\ \mu m}$			

Etude de $z(x)$			
$-xZ_A$		$F_z x - F_z l$	
A_1	B_1	A_2	B_2
16293,3	0	-40559	6026,7
$\frac{A_2}{6}$	$\frac{B_2}{2}$	${K_2}^1$	${K_2}^2$
-6760	3013	-350	11,3
$z_2(x) = -\frac{1}{EI_{G_y}}\left[\frac{A_2}{6}x^3 + \frac{B_2}{2}x^2 + {K_2}^1 x + {K_2}^2\right]$ Attention : il faut mettre 1 moins pour le moment autour de y			
$\boldsymbol{z(l) = -19.80\ \mu m}$			

Question 6: Déterminer la rotation de la section suivant y et z en E.

$$\theta_y = -{z_2}'(l) = \frac{1}{EI_{G_y}}\left[\frac{A_2}{2}l^2 + B_2 l + {K_2}^1\right] = 0.00053\ rd$$

$$\theta_z = {y_2}'(l) = \frac{1}{EI_{G_z}}\left[\frac{A_2}{2}l^2 + B_2 l + {K_2}^1\right] = 0.00004\ rd$$

Question 7: En déduire le torseur des petits déplacements en E issu de la déformation de l'arbre uniquement par flexion.

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0.00053 & 3,33.10^{-6} \\ 0.00004 & -19,80.10^{-6} \end{Bmatrix}_E^{\mathcal{B}}$$

Question 8: Déterminer le déplacement du point E suivant x issu de la traction compression de l'arbre.

$$dx = x(l) = \frac{F_x b}{ES} = \frac{-24160 * 0.04259}{210000000000 * 0.003318307} = -1,48\ \mu m$$

Question 9: Justifier le fait que la torsion de l'arbre ne soit pas étudiée.

Le mouvement de torsion de l'arbre ne va que décaler l'arbre de sortie par rapport à sa position théorique s'il n'y avait pas de torsion, mais en aucun cas il ne va altérer le contact entre les roues dentées.
C'est un mouvement sur la mobilité du système…

Question 10: Finalement, donner l'expression du déplacement du point D issu de la déformation en flexion de l'arbre.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} R\theta_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & x(l) \\ \theta_y & y(l) \\ \theta_z & z(l) \end{Bmatrix}_E^{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & x(l) + R\theta_z \\ \theta_y & y(l) \\ \theta_z & z(l) \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & -0{,}34.10^{-6} \\ 0.00053 & 3{,}33.10^{-6} \\ 0.00004 & -19{,}80.10^{-6} \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}}$$

$$D = \sqrt{R^2{\theta_z}^2 + y(l)^2 + z(l)^2} = 20{,}08\ \mu m$$

Question 11: Les déplacements obtenus respectent-ils les critères du cahier des charges ?

$$D = 20{,}08\ \mu m$$
$$D_{max} = 5\ \mu m$$

Le déplacement du point de contact est trop important, de l'ordre de 4 fois la valeur admissible.

Question 12: En déduire l'intérêt de la réalisation d'un montage hyperstatique comme dans la solution réelle.

Il est donc nécessaire de limiter les déformations en flexion de l'arbre afin de diminuer ce déplacement, pour cela un 3° roulement est ajouté et rend le système hyperstatique.