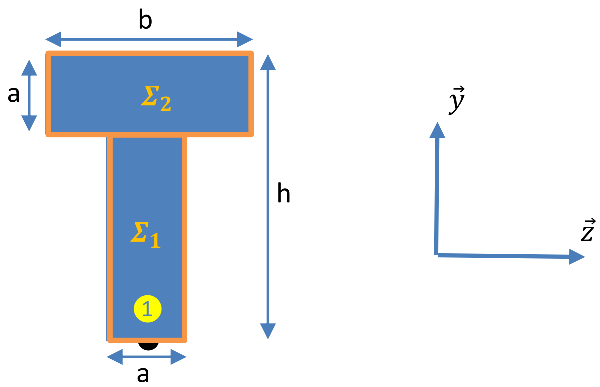
Caractéristiques des sections droites

Exercice 1: Section en T



Question 1: Déterminer la position de son centre de gravité G.

Méthode 1 : Calcul intégral

Il y a un plan de symétrie vertical, G est dessus.

Il suffit donc de calculer le moment statique selon $\vec{y}$.

On choisit un point O au pied du T. On se place dans la base $(O,\vec{y},\vec{z})$.

$$\boldsymbol{Z_G = 0}$$

$$A(O,\vec{z}) = \int_{\Sigma} y\,dS = \int_{\Sigma_1} y\,dS + \int_{\Sigma_2} y\,dS = \int_0^{h-a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y\,dzdy + \int_{h-a}^{h}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y\,dzdy$$

$$A(O,\vec{z}) = a\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{h-a} + b\left[\frac{y^2}{2}\right]_{h-a}^{h}$$

$$A(O,\vec{z}) = a\frac{(h-a)^2}{2} + b\frac{h^2}{2} - b\frac{(h-a)^2}{2}$$

$$A(O,\vec{z}) = a\frac{(h-a)^2}{2} + b\frac{h^2}{2} - b\frac{h^2-2ha+a^2}{2}$$

$$A(O,\vec{z}) = a\frac{(h-a)^2}{2} + b\frac{h^2}{2} - b\frac{h^2}{2} + b\frac{2ha}{2} - b\frac{a^2}{2}$$

$$\boldsymbol{A(O,\vec{z}) = a\frac{(h-a)^2}{2} + bha - \frac{ba^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{S = a(h-a) + ab = a(h-a+b)}$$

$$Y_G = \frac{1}{S}A(O,\vec{z}) = \frac{a\frac{(h-a)^2}{2} + bha - \frac{ba^2}{2}}{a(h-a+b)}$$

$$Y_G = \frac{\frac{(h-a)^2}{2} + bh - \frac{ba}{2}}{(h-a+b)}$$

$$\boldsymbol{Y_G = \frac{\frac{(h-a)^2}{2} + b\left(h-\frac{a}{2}\right)}{(h-a+b)}}$$

Méthode 2 : Sous sections

$$\overrightarrow{OG} = \frac{S_1\overrightarrow{OG_1} + S_2\overrightarrow{OG_2}}{S_1 + S_2}$$

$$Y_G = \overrightarrow{OG}.\vec{y} = \frac{S_1\overrightarrow{OG_1}.\vec{y} + S_2\overrightarrow{OG_2}.\vec{y}}{S_1 + S_2}$$

$$S_1 = a(h-a)$$

$$S_2 = ab$$

$$S = a(h+b-a)$$

$$\overrightarrow{OG_1}.\vec{y} = \frac{h-a}{2}$$

$$\overrightarrow{OG_2}.\vec{y} = h - \frac{a}{2}$$

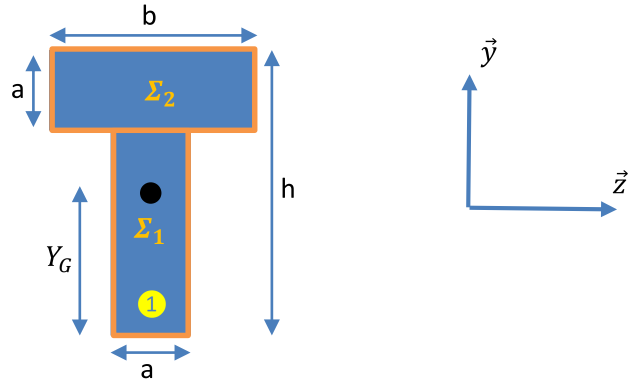
$$Y_G = \frac{a(h-a)\frac{h-a}{2} + ab\left(h - \frac{a}{2}\right)}{a(h+b-a)}$$

$$\boldsymbol{Y_G = \frac{\frac{(h-a)^2}{2} + b\left(h - \frac{a}{2}\right)}{h+b-a}}$$

Question 2: Déterminer ses moments quadratiques I_{G_y} et I_{G_z}.

Méthode 1 : Calcul intégral

On place le repère en G. On se place dans la base $(G, \vec{y}, \vec{z})$.



$$I_{G_y} = \int_{\Sigma} z^2\, dS = \int_{\Sigma_1} z^2\, dS + \int_{\Sigma_2} z^2\, dS$$

$$I_{G_y} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dz \int_{-Y_G}^{h-a-Y_G} dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz \int_{h-a-Y_G}^{h-Y_G} dy$$

$$I_{G_y} = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{-Y_G}^{h-a-Y_G} + \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [y]_{h-a-Y_G}^{h-Y_G}$$

$$\boldsymbol{I_{G_y} = \frac{a^3}{12}(h-a) + \frac{b^3}{12}a}$$

Remarque : comme $(O, \vec{y})$ est axe de symétrie, on peut calculer I_{G_y} avec un repère placé en O

$$I_{G_y} = \int_{\Sigma} z^2\, dS = \int_{\Sigma_1} z^2\, dS + \int_{\Sigma_2} z^2\, dS$$

$$I_{G_y} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dz \int_{0}^{h-a} dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz \int_{h-a}^{h} dy$$

$$I_{G_y} = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{0}^{h-a} + \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [y]_{h-a}^{h}$$

$$\boldsymbol{I_{G_y} = \frac{a^3}{12}(h-a) + \frac{b^3}{12}a}$$

$$I_{G_z} = \int_{\Sigma} y^2 \, dS = \int_{\Sigma_1} y^2 \, dS + \int_{\Sigma_2} y^2 \, dS$$

$$I_{G_z} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \int_{-Y_G}^{h-a-Y_G} y^2 dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_{h-a-Y_G}^{h-Y_G} y^2 dy$$

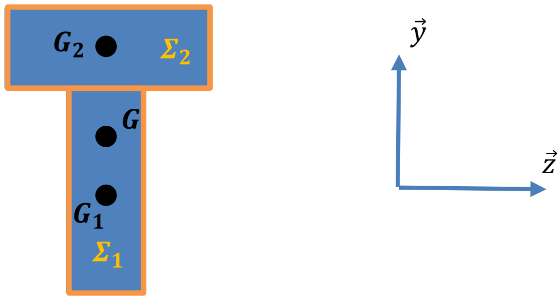
$$I_{G_z} = a \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-Y_G}^{h-a-Y_G} + b \left[\frac{y^3}{3}\right]_{h-a-Y_G}^{h-Y_G}$$

$$I_{G_z} = a \left[\frac{(h-a-Y_G)^3}{3} - \frac{(-Y_G)^3}{3}\right] + b \left[\frac{(h-Y_G)^3}{3} - \frac{(h-a-Y_G)^3}{3}\right]$$

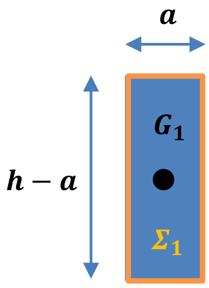
$$I_{G_z} = a \frac{(h-a-Y_G)^3}{3} + a \frac{{Y_G}^3}{3} + b \frac{(h-Y_G)^3}{3} - b \frac{(h-a-Y_G)^3}{3}$$

$$\boldsymbol{I_{G_z} = (a-b) \frac{(h-a-Y_G)^3}{3} + \frac{a{Y_G}^3 + b(h-Y_G)^3}{3}}$$

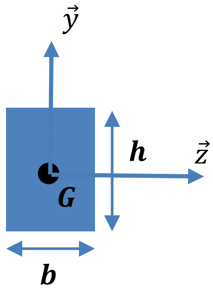
Méthode 2 : Sous sections



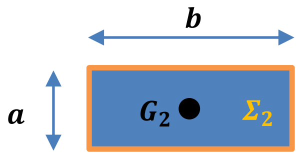
On reconnaît deux sections rectangulaires de largeur b et de hauteur h dont on connaît les caractéristiques d'inertie :



$I_{G_{1y}}{}^{1}$	$\frac{(h-a)a^3}{12}$
$I_{G_{1z}}{}^{1}$	$\frac{a(h-a)^3}{12}$
S^1	$a(h-a)$



$$I_{G_z} = \frac{bh^3}{12}$$



$I_{G_{2y}}{}^{2}$	$\frac{ab^3}{12}$
$I_{G_{2z}}{}^{2}$	$\frac{ba^3}{12}$
S^2	ab

$$\overrightarrow{GG_1} = \left(\frac{h-a}{2} - Y_G\right)\vec{y}$$

$$\overrightarrow{GG_2} = \left(h - a + \frac{a}{2} - Y_G\right)\vec{y} = \left(h - \frac{a}{2} - Y_G\right)\vec{y}$$

$$I_{G_y} = \int_{\Sigma} z^2\, dS = \int_{\Sigma_1} z^2\, dS + \int_{\Sigma_2} z^2\, dS = I_{G_y}{}^{1} + I_{G_y}{}^{2}$$

$$I_{G_z} = \int_{\Sigma} y^2\, dS = \int_{\Sigma_1} y^2\, dS + \int_{\Sigma_2} y^2\, dS = I_{G_z}{}^{1} + I_{G_z}{}^{2}$$

$$I_{G_y}{}^{1} = I_{G_{1y}}{}^{1} + S^1\left(\overrightarrow{GG_1}.\vec{z}\right)^2 = \frac{(h-a)a^3}{12}$$

$$I_{G_y}{}^{2} = I_{G_{2y}}{}^{2} + S^2\left(\overrightarrow{GG_2}.\vec{z}\right)^2 = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_{G_z}{}^{1} = I_{G_{1z}}{}^{1} + S^1\left(\overrightarrow{GG_1}.\vec{y}\right)^2 = \frac{a(h-a)^3}{12} + a(h-a)\left(\frac{h-a}{2} - Y_G\right)^2$$

$$I_{G_z}{}^{2} = I_{G_{2z}}{}^{2} + S^2\left(\overrightarrow{GG_2}.\vec{y}\right)^2 = \frac{ba^3}{12} + ab\left(h - \frac{a}{2} - Y_G\right)^2$$

$$\boldsymbol{I_{G_y} = \frac{(h-a)a^3}{12} + \frac{ab^3}{12}}$$

$$I_{G_z} = \frac{a(h-a)^3}{12} + a(h-a)\left(\frac{h-a}{2} - Y_G\right)^2 + \frac{ba^3}{12} + ab\left(h - \frac{a}{2} - Y_G\right)^2$$

$$I_{G_z} = \frac{ba^3 + a(h-a)^3}{12} + a(h-a)\left(\frac{h-a}{2} - Y_G\right)^2 + ab\left(h - \frac{a}{2} - Y_G\right)^2$$

Sans aller jusqu'à simplifier cette expression, si on vérifie la valeur numérique, on retombe sur 85000 $\boldsymbol{mm^4}$.

Question 3: Application numérique

$$Y_G = \frac{\frac{(h-a)^2}{2} + b\left(h - \frac{a}{2}\right)}{h+b-a} = \frac{\frac{(0.04-0.01)^2}{2} + 0.03\left(0.04 - \frac{0.01}{2}\right)}{0.04+0.03-0.01}$$

$$\boldsymbol{Y_G = 25\ mm}$$

$$I_{G_y} = \frac{a^3}{12}(h-a) + \frac{b^3}{12}a$$

$$I_{G_y} = \frac{0.01^3}{12}(0.04-0.01) + \frac{0.03^3}{12}0.01$$

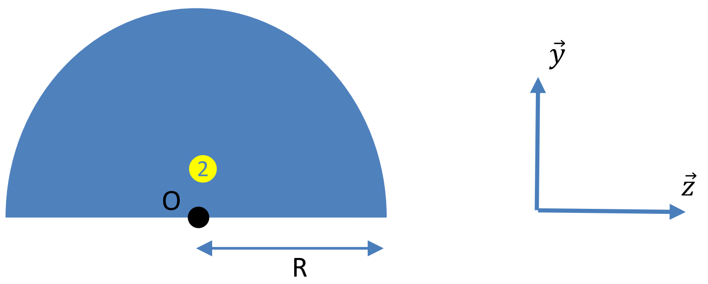
$$\boldsymbol{I_{G_y} = 25000\ mm^4}$$

$$I_{G_z} = (a-b)\frac{(h-a-Y_G)^3}{3} + \frac{a{Y_G}^3 + b(h-Y_G)^3}{3}$$

$$I_{G_z} = (0.01-0.03)\frac{(0.04-0.01-0.025)^3}{3} + \frac{0.01 * 0.025^3 + 0.03(0.04-0.025)^3}{3}$$

$$\boldsymbol{I_{G_z} = 85000\ mm^4}$$

Exercice 2: Portion de disque



R	20 mm

Question 1: Déterminer la position de son centre de gravité G.

Il y a un plan de symétrie vertical, G est dessus.
Il suffit donc de calculer le moment statique selon $\vec{y}$.
On choisit un point O au centre du demi disque. On se place dans la base $(O, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\boldsymbol{Z_G = 0}$$

$$A(O,\vec{z}) = \int_{\Sigma} y\, dS = \int_{-R}^{R} \int_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}} y\, dydz$$

$$A(O,\vec{z}) = \int_{-R}^{R} \frac{R^2-z^2}{2} dz$$

$$A(O,\vec{z}) = \left[\frac{R^2 z - \frac{z^3}{3}}{2}\right]_{-R}^{R} = \frac{R^2 R - \frac{R^3}{3}}{2} - \frac{-R^2 R + \frac{R^3}{3}}{2}$$

$$A(O,\vec{z}) = \left[\frac{R^2 z - \frac{z^3}{3}}{2}\right]_{-R}^{R} = \frac{R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}}{2} = \frac{2R^3 - 2\frac{R^3}{3}}{2} = \frac{6R^3 - 2R^3}{6} = \frac{2}{3}R^3$$

Ou alors :

$$A(O,\vec{z}) = \int_{\Sigma} y\, dS = \int_{0}^{R} \int_{0}^{\pi} r \sin\theta\, r dr d\theta = \frac{R^3}{3}[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{R^3}{3}(\cos 0 - \cos\pi) = \frac{2}{3}R^3$$

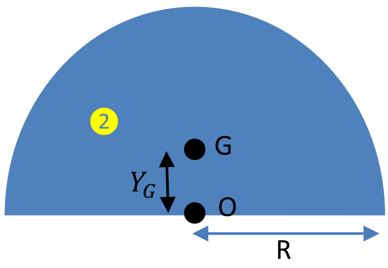
$$\boldsymbol{A(O,\vec{z}) = \frac{2}{3}R^3}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{\pi R^2}{2}}$$

$$Y_G = \frac{1}{S}A(O,\vec{z}) = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2}{3}R^3 \frac{2}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\boldsymbol{Y_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

Question 2: Déterminer ses moments quadratiques I_{G_y} et I_{G_z}.



Si on place le repère en G. On se place dans la base $(G, \vec{y}, \vec{z})$. L'intégrale ne va pas être évidente.
On va donc calculer I_{O_y} et I_{O_z} puis utiliser le théorème de Huygens, sachant que comme $(G, \vec{y})$ est axe de symétrie, $I_{O_y} = I_{G_y}$

$$I_{O_y} = \int_{\Sigma} z^2\, dS = \frac{1}{2}\int_{Disque} z^2\, dS = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_{Disque} r^2\, dS = \frac{1}{4}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta = \frac{1}{4}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta$$

$$I_{O_y} = \frac{2\pi}{4}\frac{R^4}{4} = \pi\frac{R^4}{8} = \frac{\pi D^4}{128}$$

Sinon, on savait que :

$$\int_{Disque} z^2\, dS = \frac{\pi D^4}{64}$$

Finalement :

$$I_{G_y} = I_{O_y} - S{Z_G}^2 = \frac{\pi D^4}{128} - \frac{\pi R^2}{2} * 0^2 = \frac{\pi D^4}{128}$$

$$\boldsymbol{I_{G_y} = \frac{\pi D^4}{128}}$$

Par ailleurs, si on s'intéressait à des quarts de disques :

$$\int_{Disque} z^2\, dS = \int_{z\le 0\ \&\ y\le 0} z^2\, dS + \int_{z\le 0\ \&\ y\ge 0} z^2\, dS + \int_{z\ge 0\ \&\ y\le 0} z^2\, dS + \int_{z\ge 0\ \&\ y\ge 0} z^2\, dS$$

$$\int_{z\le 0\ \&\ y\le 0} z^2\, dS = \int_{z\le 0\ \&\ y\ge 0} z^2\, dS = \int_{z\ge 0\ \&\ y\le 0} z^2\, dS = \int_{z\ge 0\ \&\ y\ge 0} z^2\, dS$$

$$\int_{Disque} z^2\, dS = 4\int_{z\ge 0\ \&\ y\ge 0} z^2\, dS = 2\int_{y\ge 0} z^2\, dS$$

De même :

$$\int_{Disque} y^2\, dS = 4\int_{z\ge 0\ \&\ y\ge 0} y^2\, dS = 2\int_{y\ge 0} y^2\, dS$$

$$I_{O_z} = \int_{\Sigma} y^2 \, dS = \frac{1}{2}\int_{Disque} y^2 \, dS = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_{Disque} r^2 \, dS = \pi\frac{R^4}{8} = \frac{\pi D^4}{128}$$

$$I_{G_z} = I_{O_z} - S{Y_G}^2 = \frac{\pi D^4}{128} - \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \frac{\pi D^4}{8*16} - \frac{R^4}{2}\frac{16}{9\pi}$$

$$I_{G_z} = \frac{\pi D^4}{8*16} - \frac{8D^4}{16*9\pi} = \frac{D^4}{16}\left[\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right]$$

$$\boldsymbol{I_{G_z} = \frac{D^4}{16}\left[\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right]}$$

Question 3: Application numérique

$$Y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$Y_G = \frac{4*0.02}{3\pi}$$

$$\boldsymbol{Y_G = 8,48\ mm}$$

$$I_{G_y} = \frac{\pi D^4}{128}$$

$$I_{G_y} = \frac{\pi 0.04^4}{128}$$

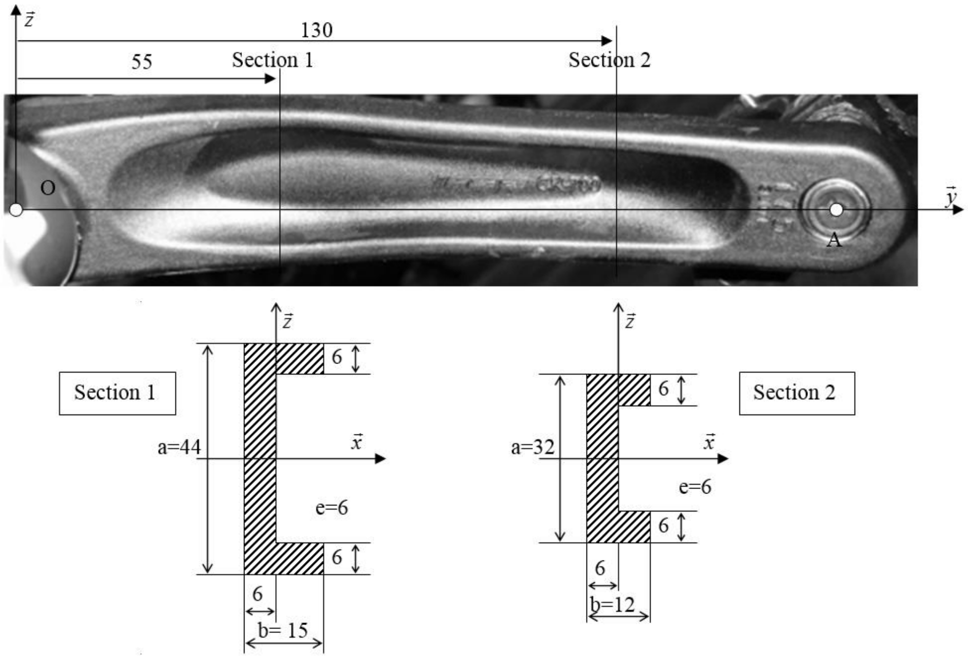
$$\boldsymbol{I_{G_y} = 62831\ \ mm^4}$$

$$I_{G_z} = \frac{D^4}{16}\left[\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right]$$

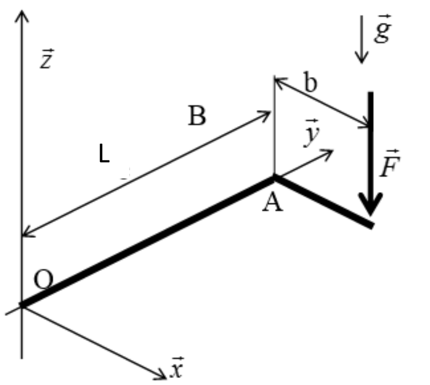
$$I_{G_z} = \frac{0.04^4}{16}\left[\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right]$$

$$\boldsymbol{I_{G_z} = 17600\ mm^4}$$

Exercice 3: Moment quadratique d'une manivelle de VTT



Question 1: Déterminer le moment M de la force $\vec{F}$ suivant $\vec{x}$ sur le segment OA en fonction de F, L et y.

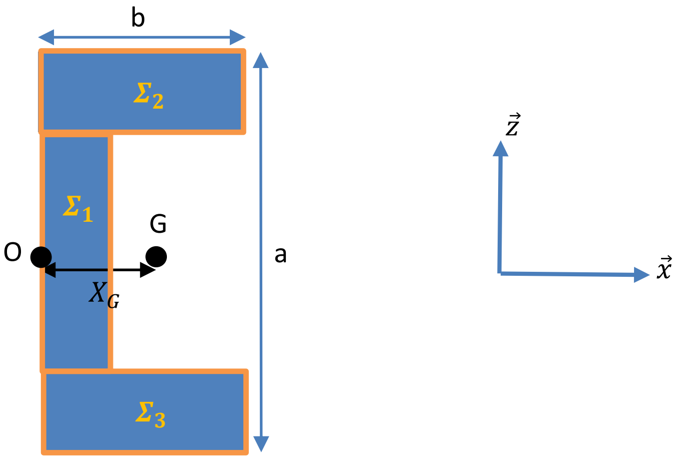


$$M_x = F(L - y)$$

Question 2: Que vaut le moment M dans les sections 1 et 2 ?

$$M^1 = 1000(0.175 - 0,055) = 120\ Nm$$
$$M^2 = 1000(0.175 - 0,13) = 45\ Nm$$

Question 3: Déterminer la position de son centre de gravité G.



Le plan contenant $\vec{x}$ est plan de symétrie, G est donc placé sur ce plan.

$$\boldsymbol{Z_G = 0}$$

Méthode intégrale :

$$A(O,\vec{x}) = \int_{\Sigma} x\,dS = \int_{\Sigma_1} x\,dS + \int_{\Sigma_2} x\,dS + \int_{\Sigma_3} x\,dS$$

$$A(O,\vec{x}) = \int_{-\frac{a}{2}+e}^{\frac{a}{2}-e}\int_0^e x\,dxdz + \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}+e}\int_0^b x\,dxdz + \int_{\frac{a}{2}-e}^{\frac{a}{2}}\int_0^b x\,dxdz$$

$$A(O,\vec{x}) = \frac{e^2}{2}(a-2e) + e\frac{b^2}{2} + e\frac{b^2}{2}$$

$$A(O,\vec{x}) = \frac{e^2}{2}(a-2e) + eb^2 = \frac{ae^2}{2} - e^3 + eb^2 = \frac{ae^2}{2} + e(b^2-e^2)$$

$$\boldsymbol{A(O,\vec{x}) = \frac{ae^2}{2} + e\left(b^2-e^2\right)}$$

$$S = 2be + e(a-2e) = e[2b + (a-2e)]$$

$$\boldsymbol{S = e[2b + (a-2e)]}$$

$$X_G = \frac{1}{S}A(O,\vec{x}) = \frac{\frac{ae^2}{2} + e(b^2-e^2)}{e[2b+(a-2e)]} = \frac{\frac{ae}{2} + (b^2-e^2)}{2b+(a-2e)} = \frac{ae + 2(b^2-e^2)}{4b+2(a-2e)}$$

$$\boldsymbol{X_G = \frac{ae + 2\left(b^2-e^2\right)}{4b+2(a-2e)}}$$

Application numérique :

$$X_G{}^1 = \frac{0.044 * 0.006 + 2(0.015^2 - 0.006^2)}{4 * 0.015 + 2(0.044 - 2 * 0.006)}$$

$$\boldsymbol{X_G{}^1 = 5.1774\ mm}$$

$$X_G{}^2 = \frac{0.032 * 0.006 + 2(0.012^2 - 0.006^2)}{4 * 0.012 + 2(0.032 - 2 * 0.006)}$$

$$\boldsymbol{X_G{}^2 = 4.6363\ mm}$$

Méthode sections :

$$X_G = \overrightarrow{OG}.\vec{x} = \frac{X_{G_1}S_1 + X_{G_2}S_2 + X_{G_3}S_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

$$X_G = \frac{\frac{b}{2}eb + \frac{e}{2}(a-2e)e + \frac{b}{2}eb}{2eb + (a-2e)e} = \frac{ae + 2(b^2 - e^2)}{4b + 2(a-2e)}$$

Question 4: Déterminer ses moments quadratiques I_{G_x} et I_{G_z}.

Méthode intégrale :

On place le repère en G. On se place dans la base $(G, \vec{x}, \vec{z})$.

$$I_{G_x} = \int_\Sigma z^2\,dS = \int_{\Sigma_1} z^2\,dS + \int_{\Sigma_2} z^2\,dS + \int_{\Sigma_3} z^2\,dS = \int_{\Sigma_1} z^2\,dS + 2\int_{\Sigma_2} z^2\,dS$$

$$I_{G_x} = \int_{-\frac{a}{2}+e}^{\frac{a}{2}-e}\int_0^e z^2\,dxdz + 2\int_{\frac{a}{2}-e}^{\frac{a}{2}}\int_0^b z^2\,dxdz$$

$$I_{G_x} = e\int_{-\frac{a}{2}+e}^{\frac{a}{2}-e} z^2\,dz + 2b\int_{\frac{a}{2}-e}^{\frac{a}{2}} z^2\,dz$$

$$I_{G_x} = e\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}+e}^{\frac{a}{2}-e} + 2b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{\frac{a}{2}-e}^{\frac{a}{2}}$$

$$I_{G_x} = \frac{e}{3}[z^3]_{-\frac{a}{2}+e}^{\frac{a}{2}-e} + \frac{2b}{3}[z^3]_{\frac{a}{2}-e}^{\frac{a}{2}}$$

$$I_{G_x} = \frac{e}{3}\left[\left(\frac{a}{2}-e\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}+e\right)^3\right] + \frac{2b}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{2}-e\right)^3\right]$$

$$I_{G_x} = \frac{e}{3}\left[\left(\frac{a}{2}-e\right)^3 + \left(\frac{a}{2}-e\right)^3\right] + \frac{2b}{3}\left[\frac{a^3}{8} - \left(\frac{a}{2}-e\right)^3\right]$$

$$I_{G_x} = \frac{2e}{3}\left(\frac{a}{2}-e\right)^3 + \frac{2b}{3}\frac{a^3}{8} - \frac{2b}{3}\left(\frac{a}{2}-e\right)^3$$

$$\boldsymbol{I_{G_x} = \frac{2}{3}(e-b)\left(\frac{a}{2}-e\right)^3 + \frac{a^3 b}{12}}$$

Application numérique :

$$I_{G_x}{}^1 = \frac{2}{3}(0.006-0.015)\left(\frac{0.044}{2}-0.006\right)^3 + \frac{0.044^3 0.15}{12}$$

$$\boldsymbol{I_{G_x}{}^1 = 81904\ \mathrm{mm}^4}$$

$$I_{G_x}{}^2 = \frac{2}{3}(0.006-0.012)\left(\frac{0.032}{2}-0.006\right)^3 + \frac{0.032^3 0.12}{12}$$

$$\boldsymbol{I_{G_x}{}^2 = 28768\ \mathrm{mm}^4}$$

$$I_{G_z} = \int_\Sigma x^2\,dS = \int_{\Sigma_1} x^2\,dS + \int_{\Sigma_2} x^2\,dS + \int_{\Sigma_3} x^2\,dS = \int_{\Sigma_1} x^2\,dS + 2\int_{\Sigma_2} x^2\,dS$$

$$I_{G_z} = \int_{-\frac{a}{2}+e}^{\frac{a}{2}-e}\int_{-X_G}^{e-X_G} x^2\,dxdz + 2\int_{\frac{a}{2}-e}^{\frac{a}{2}}\int_{-X_G}^{b-X_G} x^2\,dxdz$$

$$I_{G_z} = \frac{\left[(e-X_G)^3 + X_G{}^3\right](a-2e) + 2e\left[(b-X_G)^3 + X_G{}^3\right]}{3}$$

$$I_{G_z} = \frac{(e - X_G)^3(a - 2e) + a{X_G}^3 - 2e{X_G}^3 + 2e(b - X_G)^3 + 2e{X_G}^3}{3}$$

$$\boldsymbol{I_{G_z} = \frac{(e - X_G)^3(a - 2e) + a{X_G}^3 + 2e(b - X_G)^3}{3}}$$

Application numérique :

$$I_{G_z}{}^1 = \frac{(0.006 - 0.0051774)^3(0.044 - 2 * 0.006) + 0.044 * 0.0051774^3 + 2 * 0.006(0.015 - 0.0051774)^3}{3}$$

$$\boldsymbol{I_{G_z}{}^1 = 5832\ \mathrm{mm}^4}$$

$$I_{G_z}{}^1 = \frac{(0.006 - 0.004636)^3(0.032 - 2 * 0.006) + 0.032 * 0.004636^3 + 2 * 0.006(0.012 - 0.004636)^3}{3}$$

$$\boldsymbol{I_{G_z}{}^2 = 2677\ \mathrm{mm}^4}$$

Section 1	$\boldsymbol{I_{G_x}{}^1 = 81904\ \mathrm{mm}^4}$	$\boldsymbol{I_{G_z}{}^1 = 5832\ \mathrm{mm}^4}$
Section 2	$\boldsymbol{I_{G_x}{}^2 = 28768\ \mathrm{mm}^4}$	$\boldsymbol{I_{G_z}{}^2 = 2677\ \mathrm{mm}^4}$

Méthode sections :

$$I_{G_x} = I_{G_x}{}^1 + I_{G_x}{}^2 + I_{G_x}{}^3$$

$$I_{G_x}{}^1 = I_{G_{1x}}{}^1 + S_1\left(\overrightarrow{GG_1}.\vec{z}\right)^2 = \frac{be^3}{12} + be\left(\frac{a-e}{2}\right)^2$$

$$I_{G_x}{}^2 = I_{G_{2x}}{}^2 + S_2\left(\overrightarrow{GG_2}.\vec{z}\right)^2 = \frac{e(a-2e)^3}{12} + e(a-2e) * 0$$

$$I_{G_x}{}^3 = I_{G_x}{}^1$$

$$I_{G_x} = \frac{be^3}{6} + 2be\left(\frac{a-e}{2}\right)^2 + \frac{e(a-2e)^3}{12}$$

$$I_{G_z} = I_{G_z}{}^1 + I_{G_z}{}^2 + I_{G_z}{}^3$$

$$I_{G_z}{}^1 = I_{G_{1z}}{}^1 + S_1\left(\overrightarrow{GG_1}.\vec{x}\right)^2 = \frac{eb^3}{12} + be\left(-X_G + X_{G_1}\right) = \frac{eb^3}{12} + be\left(\frac{b}{2} - X_G\right)^2$$

$$I_{G_z}{}^2 = I_{G_{2z}}{}^2 + S_2\left(\overrightarrow{GG_2}.\vec{x}\right)^2 = \frac{(a-2e)e^3}{12} + e(a-2e)\left(\frac{e}{2} - X_G\right)^2$$

$$I_{G_z}{}^3 = I_{G_z}{}^1$$

$$I_{G_z} = 2be\left(\frac{b}{2} - X_G\right)^2 + \frac{(a-2e)e^3 + 2eb^3}{12} + e(a-2e)\left(\frac{e}{2} - X_G\right)^2$$

Question 5: Justifier le moment quadratique plus important pour la section 1.

Le moment étant plus important dans la section 1, il est nécessaire d'avoir plus de matière travaillant afin de retenir le moment qui transite dans la section.

Question 6: Justifier $I_{G_x} > I_{G_z}$.

Il n'y a pas de moment autour de $\vec{z}$, il n'est donc pas nécessaire d'avoir un I_{G_z} important.

Il existe forcément car la matière est présente.

Question 7: En considérant que la section de la poutre est constante sur sa longueur, égale à la section 2, comparer $\frac{Ma}{I_{G_x}}$ pour les deux moments M_1 et M_2.

$$\frac{M^1a^2}{{I_{G_x}}^2} = \frac{120 * 0{,}032}{81904} = 0{,}000133$$

$$\frac{M^2a^2}{{I_{G_x}}^2} = \frac{45 * 0{,}032}{28768} = 0{,}0000501$$

$$\frac{\frac{M^1a^2}{{I_{G_x}}^2}}{\frac{M^1a^2}{{I_{G_x}}^1}} = \frac{{I_{G_x}}^1}{{I_{G_x}}^2} = 0{,}375$$

On a un facteur presque égal à 1/3, la manivelle serait donc 3 fois plus fragile au lieu de la section 1 par rapport au lieu de la section 2 si la section n'était pas adaptée (ie était constante).

Question 8: Comparer $\frac{Ma}{I_{G_x}}$ pour chacune des sections réelles et conclure.

$$\frac{Ma}{I_{G_x}} < 2\sigma$$

$$\frac{M^1a^1}{{I_{G_x}}^1} = \frac{120 * 0{,}044}{81904} = 0{,}0000645$$

$$\frac{M^2a^2}{{I_{G_x}}^2} = \frac{45 * 0{,}032}{28768} = 0{,}0000501$$

$$\frac{\frac{M^1a^1}{{I_{G_x}}^1}}{\frac{M^2a^2}{{I_{G_x}}^2}} = 0{,}776$$

Le dimensionnement de chaque section permet d'avoir une fragilité comparable.

On pourrait augmenter le facteur $\frac{a^2}{{I_{G_x}}^2}$ de 29% environ afin d'avoir le même coefficient, c'est-à-dire diminuer cette section qui est surdimensionnée.