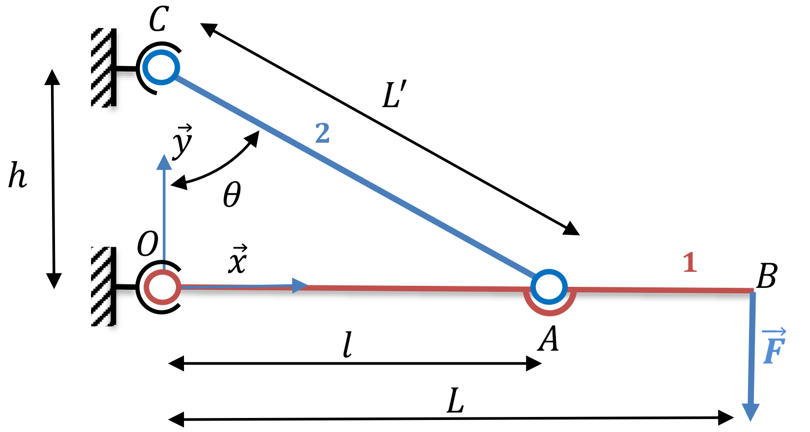
Exercice 1: Etude d'un câble soumis à de la traction



On donne : $F = 20000\,N \;-\; h = 9\,m \;-\; l = 45\,m \;-\; L = 65\,m$

Question 1: Déterminer l'expression littérale des actions en O, A et C en fonction de F puis leurs valeurs numériques.

Pièce 1	Pièce 2
$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_O^B + \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^B = \{0\}$ $\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_O^B + \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & -Z_{21}l \\ Z_{21} & Y_{21}l \end{Bmatrix}_O^B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -FL \end{Bmatrix}_O^B = \{0\}$ $\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} - F = 0 \\ Z_{01} + Z_{21} = 0 \\ 0 = 0 \\ -Z_{21}l = 0 \\ Y_{21}l - FL = 0 \end{cases}$	$\begin{Bmatrix} X_{02} & 0 \\ Y_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_C^B + \begin{Bmatrix} -X_{21} & 0 \\ -Y_{21} & 0 \\ -Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^B = \{0\}$ $\begin{Bmatrix} X_{02} & 0 \\ Y_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_C^B + \begin{Bmatrix} -X_{21} & hZ_{21} \\ -Y_{21} & lZ_{21} \\ -Z_{21} & -lY_{21} - hX_{21} \end{Bmatrix}_C^B = \{0\}$ $\begin{cases} X_{02} - X_{21} = 0 \\ Y_{02} - Y_{21} = 0 \\ Z_{02} - Z_{21} = 0 \\ hZ_{21} = 0 \\ lZ_{21} = 0 \\ -lY_{21} - hX_{21} = 0 \end{cases}$

$X_{01} = \frac{L}{h}F$	$X_{21} = -\frac{l}{h}Y_{21} = -\frac{L}{h}F$	$X_{02} = -\frac{L}{h}F$
$Y_{01} = F - Y_{21} = F\frac{l - L}{l}$	$Y_{21} = \frac{L}{l}F$	$Y_{02} = \frac{L}{l}F$
$Z_{01} = 0$	$Z_{21} = 0$	$Z_{02} = 0$

$X_{01} = \frac{65}{9}20000 = 144444$	$X_{21} = -144444$	$X_{02} = -144444$
$Y_{01} = 20000\frac{45 - 65}{45} = -8889$	$Y_{21} = \frac{65}{45}20000 = 28889$	$Y_{02} = 28888$
$Z_{01} = 0$	$Z_{21} = 0$	$Z_{02} = 0$

Question 2: Déterminer le torseur de cohésion le long du câble.

Rappel des actions extérieures :

$$(2)\begin{Bmatrix} 144444 & 0 \\ -28889 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B \begin{Bmatrix} -144444 & 0 \\ 28889 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^B$$

Tronçon

$s \in]0, L'[$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \to II}\} = \begin{Bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F} & 0 \\ -\frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B$$

Méthode 1 : Solide soumis à deux efforts, ils sont donc supportés par l'axe CA et on connaît leurs projections dans la base B. Appelons $\overrightarrow{C_A}$ la charge en A :

$$\overrightarrow{C_A} = \frac{L}{h}\mathrm{F}\vec{x} - \frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F}\vec{y} =$$

On a donc :

$$\overrightarrow{C_A} // CA$$

$$\overrightarrow{C_A} = \sqrt{\left(\frac{L}{h}\mathrm{F}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F}\right)^2}\,\overrightarrow{x_\Sigma} = \sqrt{144444^2 + 28889^2}\,\overrightarrow{x_\Sigma} = 147305\overrightarrow{x_\Sigma}$$

On a donc :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 147305 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Méthode 2 : Changement de base du torseur de l'effort en A puis changement de point

$$\begin{Bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F} & 0 \\ -\frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B$$

$$\vec{x} = \sin\theta\,\overrightarrow{x_\Sigma} + \cos\theta\,\overrightarrow{y_\Sigma} = \frac{l}{L'}\overrightarrow{x_\Sigma} + \frac{h}{L'}\overrightarrow{y_\Sigma}$$

$$\vec{y} = -\cos\theta\,\overrightarrow{x_\Sigma} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_\Sigma} = -\frac{h}{L'}\overrightarrow{x_\Sigma} + \frac{l}{L'}\overrightarrow{y_\Sigma}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F}\frac{l}{L'} + \frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F}\frac{h}{L'} & 0 \\ \frac{L}{h}\mathrm{F}\frac{h}{L'} - \frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F}\frac{l}{L'} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_\Sigma} = \begin{Bmatrix} \frac{LF}{L'}\left(\frac{l}{h} + \frac{h}{l}\right) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_\Sigma} = \begin{Bmatrix} \frac{LF}{L'}\left(\frac{l}{h} + \frac{h}{l}\right) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{B_\Sigma}$$

Méthode 3 : Changement de point du torseur de l'effort en A puis changement de base

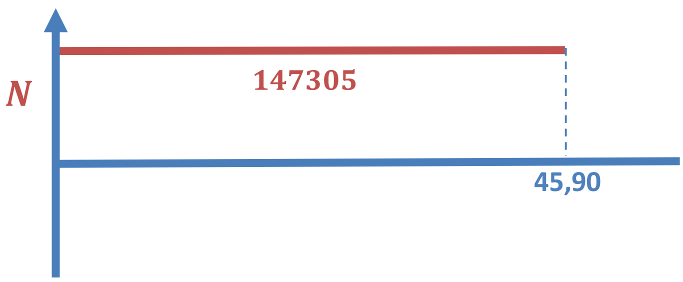
$$\overrightarrow{MA}\wedge\vec{R} = (L'-s)\overrightarrow{x_\Sigma}\wedge\vec{R} = \begin{bmatrix} \frac{l}{L'}(L'-s) \\ \frac{h}{L'}(L'-s) \\ 0 \end{bmatrix}^B \wedge \begin{bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F} \\ -\frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F} \\ 0 \end{bmatrix}^B$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F} & 0 \\ -\frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^B = \begin{Bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F} & 0 \\ -\frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{L}}{L'}(L'-s)F - \frac{\mathrm{L}}{L'}(L'-s)F \end{Bmatrix}_M^B = \begin{Bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F} & 0 \\ -\frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^B$$

$$\vec{x} = \sin\theta\,\overrightarrow{x_\Sigma} + \cos\theta\,\overrightarrow{y_\Sigma} = \frac{l}{L'}\overrightarrow{x_\Sigma} + \frac{h}{L'}\overrightarrow{y_\Sigma}$$
$$\vec{y} = -\cos\theta\,\overrightarrow{x_\Sigma} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_\Sigma} = -\frac{h}{L'}\overrightarrow{x_\Sigma} + \frac{l}{L'}\overrightarrow{y_\Sigma}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{L}{h}\mathrm{F}\frac{l}{L'} + \frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F}\frac{h}{L'} & 0 \\ \frac{L}{h}\mathrm{F}\frac{h}{L'} - \frac{\mathrm{L}}{l}\mathrm{F}\frac{l}{L'} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{B_\Sigma}$$

Question 3: Tracer les diagrammes des sollicitations dans le câble.



Question 4: Rappeler les caractéristiques importantes de l'acier utiles au dimensionnement du câble.

$$E = 210\ GPa$$
$$Re = 220\ MPa$$

Question 5: Déterminer le rayon du câble permettant de respecter le coefficient de sécurité proposé.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{Re}{\alpha}$$

$$S = \frac{F\alpha}{Re}$$

$$R = \sqrt{\frac{F\alpha}{\pi Re}}$$

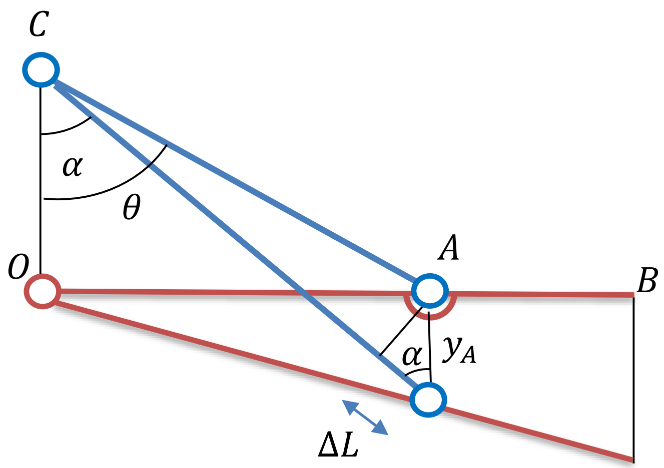
$$R = \sqrt{\frac{147305 * 3}{\pi * 220 * 10^6}} = 25.29\ mm$$

Question 6: Déterminer la déformation longitudinale du câble.

$$\Delta L = \frac{NL'}{ES} = \frac{147305 * 45.90}{210.10^9 * \pi * 0.02529^2} = 16.02\ mm$$

Question 7: En déduire le mouvement vertical du point B issu de la déformation du câble.

Soit la figure ci-dessous :



On considère que le déplacement du point A est vertical car $CA = 45{,}9\ m$ et $y_A = 16{,}02\ mm$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta L}{y_A}$$

$$\cos\theta = \frac{h}{L'}$$

De même, on néglige la variation de l'angle α : $\cos\alpha = \cos\theta$

$$y_A = \frac{\Delta L}{\cos\alpha} = \frac{L'\Delta L}{h}$$

$$y_A = \frac{45.9 * 0.0153}{9} = 81{,}70\ mm$$

D'après Thalès :

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{L}{l}$$

$$y_B = \frac{L}{l} y_A$$

$$y_B = \frac{65}{45} y_A = 118.01\ mm$$

Question 8: Proposer une modification permettant de respecter le coefficient de sécurité ainsi que le déplacement limité du point B.

On va augmenter le rayon du câble :

$$y_B = \frac{L}{l} y_A = \frac{L}{l}\frac{L'\Delta L}{h} = \frac{LL'\frac{NL'}{ES}}{lh} = \frac{NLL'^2}{lhE\pi R^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{NLL'^2}{lhE\pi y_B}}$$

$$R = \sqrt{\frac{147305 * 65 * 45.9^2}{45 * 9 * 210.10^9 * \pi * 0.01}} = 86{,}9\ mm$$

Question 9: Quel est finalement le coefficient de sécurité respecté ?

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{Re}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{ReS}{F}$$

$$\alpha = \frac{220.10^6 * \pi * 0.10339^2}{147304} = 35{,}3$$