Chapitre 14
Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 : Si f admet une limite, alors comme $f(0,y) = f(x,0) = 0$, cette limite est nécessairement nulle. De plus, si f admet 0 pour limite en $(0,0)$, alors la fonction $t \mapsto f(t,t)$ admet 0 pour limite en 0. Comme

$$f(t,t) = \frac{1}{2}t^{a+b-2},$$

on obtient nécessairement que $a+b>2$. Réciproquement, si $a+b>2$, on a

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{\|(x,y)\|_2^a \|(x,y)\|_2^b}{\|(x,y)\|_2^2} = \|(x,y)\|_2^{a+b-2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

donc par comparaison $f(x,y)$ admet 0 pour limite en $(0,0)$.

Exercice 2 :

1. La fonction f est continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par composée de fonctions continues. En l'origine, on a

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2^{3/2}} = \|(x,y)\|_2^{1/2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0),$$

donc la fonction f est aussi continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. En l'origine, on a

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{|t|^{1/2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc f admet une dérivée partielle par rapport à y, mais pas par rapport à x.

Exercice 3 :

1. Pour $t \neq 0$, on a

$$f(t,t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0),$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. On utilise la définition des dérivées partielles. On a

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Exercice 4 : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{2x(x^2-y^2)}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\ln(x^2+y^2) + \frac{2y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

En l'origine, on a

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 2t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = -2t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et sont nulles. Pour conclure, il faut montrer que les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 2\|(x,y)\|\ln(\|(x,y)\|^2) + 2\|(x,y)\|^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

donc la dérivée partielle de f par rapport à x est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, la dérivée partielle de f par rapport à y est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

1. En dérivant par rapport à t la relation de l'énoncé, on obtient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) = 0,$$
ce qui donne le résultat en prenant $t = 0$.
2. En notant $x = (u+v)/2$ et $y = (u-v)/2$, on a d'après le cours
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 0.\end{aligned}$$
3. On en déduit que F est une fonction constante par rapport à u. Il existe donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $F(u,v) = h(v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Finalement, comme $v = x - y$, on trouve
$$f(x,y) = F(u,v) = h(v) = h(x-y)$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Réciproquement, on a
$$f(x+t, y+t) = h((x+t)-(y+t)) = h(x-y) = f(x,y).$$

Exercice 6 :

1. En dérivant par rapport à t la relation de l'énoncé, on obtient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y),$$
ce qui donne le résultat en prenant $t = 1$.
2. Réciproquement, on fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on considère la fonction
$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = f(tx, ty) - t^\alpha f(x,y).$$
La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$. En calculant sa dérivée comme dans la question 1 et en utilisant l'hypothèse, on trouve que φ est solution de l'équation différentielle $y' = (\alpha/t)y$. Comme $y(1) = 0$, on en déduit par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, que $\varphi = 0$, ce qui montre la réciproque.

Exercice 7 : On utilise le changement de variable
$$(u,v) = (2x+y, 3x+y) \Leftrightarrow (x,y) = (v-u, 3u-2v).$$
La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(u,v) = f(v-u, 3v-2u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.\end{aligned}$$
On en déduit que F est une fonction constante par rapport à u. Il existe donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $F(u,v) = h(v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Finalement, on obtient
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = F(u,v) = h(v) = h(3x+y).$$
Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Exercice 8 : On utilise le changement de variable
$$(u,v) = (x+y, 2x+3y) \Leftrightarrow (x,y) = (3u-v, v-2u).$$
La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(u,v) = f(3u-v, v-2u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) = F(u,v).\end{aligned}$$
C'est une équation différentielle d'ordre 1 en u que l'on sait résoudre. On en déduit qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad F(u,v) = h(v)\exp(u).$$
Finalement, on obtient
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = F(u,v) = h(2x+3y)\exp(x+y).$$
Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Exercice 9 : On utilise le changement de variable

$$(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\\ &= -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -f(x,y) = -F(r,\theta).\end{aligned}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 en θ que l'on sait résoudre. On en déduit qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(r,\theta) = h(r)\exp(-\theta).$$

Finalement, comme $x > 0$, on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = F(u,v) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\exp\left(-\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

que l'on peut réécrire

$$f(x,y) = g\left(x^2+y^2\right)\exp\left(-\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Exercice 10 : On utilise le changement de variable

$$(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1.\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(r,\theta) = r + h(\theta).$$

Finalement, comme $x > 0$, on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = F(u,v) = \sqrt{x^2+y^2} + h\left(\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

que l'on peut réécrire

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + g\left(\frac{y}{x}\right).$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Exercice 11 : On utilise le changement de variable

$$(u,v) = (x+y, x-y) \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(u,v) = f((u+v)/2, (u-v)/2)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\end{aligned}$$

On dérive une seconde fois par rapport à v. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe deux fonctions $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = h(u) + k(v).$$

Finalement, on obtient

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = h(x + y) + k(x - y).$$

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Exercice 12 :

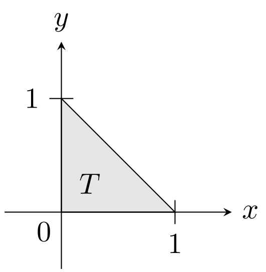
(i) Les solutions sont $f(x, y) = e^{xy} + 3x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(ii) Les solutions sont $f(x, y) = e^x y + y^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(iii) Il n'y a pas se solution.

(iv) Les solutions sont $f(x, y) = e^x + \sin(xy) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 : La fonction f est continue sur le fermé borné T, donc elle admet un maximum et un minimum global sur T.



On détermine les points critiques de f sur l'ouvert

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}.$$

Après résolution, l'application f admet un unique point critique en $(1/3, 1/3)$ et on a

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27}.$$

Les points de ∂T s'écrivent $(0, t), (t, 0)$ et $(t, 1 - t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$. Or

$$f(t, 0) = f(0, t) = f(t, 1 - t) = 0.$$

On conclut que le maximum de f est $2/17$ et est atteint en $(1/3, 1/3)$. Le minimum de f est 0 et est atteint sur les points du bord de T.

Exercice 14 : La fonction f est continue sur le fermé borné $C = [0, \pi/2]^2$, donc elle admet un maximum et un minimum global sur C. On détermine les points critiques de f sur l'ouvert $U =]0, \pi/2[^2$. Après résolution, l'application f admet un unique point critique en $(\pi/3, \pi/3)$ et on a

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Les points de ∂C s'écrivent $(0, t), (t, 0), (t, \pi/2), (\pi/2, t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Or

$$f(t, 0) = f(0, t) = 0$$

tandis que

$$f\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \sin(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t).$$

On en déduit que le maximum de f sur ∂C est $1/2$ et son minimum est 0. Finalement, le maximum de f est $3\sqrt{3}/8$ et est atteint en $(\pi/3, \pi/3)$. Le minimum de f est 0 et est atteint sur

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \{0\} \cup \{0\} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left\{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Exercice 15 : La fonction f est continue sur le fermé borné $C = [0, 1]^2$, donc elle admet un maximum et un minimum global sur C. On détermine les points critiques de f sur l'ouvert $U =]0, 1[^2$. Après résolution, l'application f n'admet pas de points critiques sur U. Les extremums de la fonction f sont donc atteints sur ∂C. Les points de ∂C s'écrivent $(0, t), (t, 0), (t, 1), (1, t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$. On a

$$f(t, 0) = f(t, 1) = t^3 + t, \quad f(0, t) = t^3 - t, \quad f(1, t) = t^3 - t + 2.$$

En étudiant ces fonctions, on obtient que le maximum de f est 2 et est atteint en $(1, 0)$ et $(1, 1)$. Son minimum est $-2/(3\sqrt{3})$ et est atteint en $(0, 1/\sqrt{3})$.

Exercice 16 : La fonction f est continue sur le fermé borné D, donc elle admet un maximum et un minimum global sur D. On détermine les points critiques de f sur l'ouvert

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Après résolution, l'application f admet un unique point critique en $(0,0)$ et on a $f(0,0) = 0$. Les points de ∂C s'écrivent $(2\cos(t), 2\sin(t))$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. On a

$$\begin{aligned} f(2\cos(t), 2\sin(t)) &= 16\cos^4(t) + 16\sin^4(t) - 8(\cos(t) - \sin(t))^2 \\ &= -8\sin^2(2t) + 8\sin(2t) + 8. \end{aligned}$$

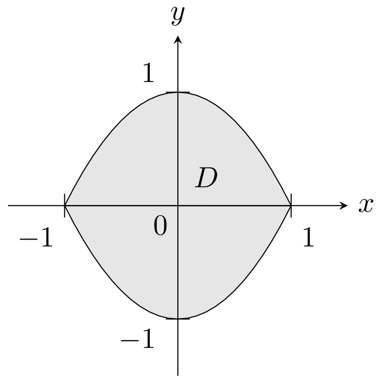
En posant $X = \sin(2t)$, il faut donc déterminer le maximum et le minimum de la fonction $X \mapsto -8X^2 + 8X + 8$ pour $-1 \leqslant X \leqslant 1$. Après une étude de fonction, on en déduit que le maximum de f est 10 et est atteint en

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \quad \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \quad \left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right) \quad \text{et} \quad \left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Le minimum de f est -8 et est atteint en

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 17 : La fonction f est continue sur le fermé borné D, donc elle admet un maximum et un minimum global sur D.



On détermine les points critiques de f sur l'ouvert

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}.$$

Après résolution, l'application f admet un unique point critique en $(0,0)$ et on a $f(0,0) = 0$. Les points de ∂T s'écrivent $(t, 1-t^2)$ et (t, t^2-1) avec $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Or

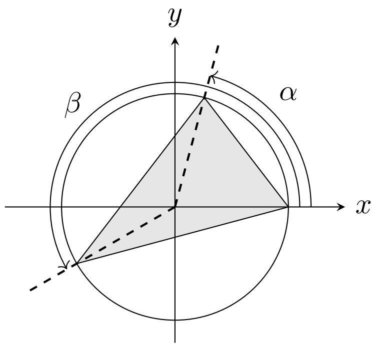
$$f(t, t^2 - 1) = 1 \quad \text{et} \quad f(t, 1 - t^2) = t^4 - 2t^2 + 1.$$

En étudiant la seconde fonction, on conclut que le maximum de f est 1 et est atteint sur

$$\{(t, t^2 - 1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant t \leqslant 1\} \cup \{(0,1)\}.$$

Le minimum de f est 0 et est atteint en $(0,0)$.

Exercice 18 : On peut supposer qu'une des sommets du triangle se trouve en $(1,0)$. Un triangle sur le cercle $\mathscr{C}$ peut se représenter par



On introduit donc l'ensemble fermé borné

$$T = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi\}.$$

Le périmètre du triangle dessiné ci-dessus est donné par

$$f(\alpha,\beta) = 2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right).$$

La fonction f est continue sur le fermé borné T, donc elle admet un maximum et un minimum global sur T. On détermine les points critiques de f sur l'ouvert

$$U = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi\}.$$

Après résolution, l'application f admet un unique point critique en $(2\pi/3, 4\pi/3)$ et on a

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Les points de ∂T s'écrivent (t,t), $(0,t)$ $(t,2\pi)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Or

$$f(t,t) = f(0,t) = f(t,2\pi) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2},$$

donc le maximum de f est $3\sqrt{3}/2$ et est atteint en $(2\pi/3, 4\pi/3)$. En revenant au problème de départ, on trouve que les triangles inscris dans le cercle unité de périmètre maximal sont les triangles équilatéraux. Leur périmètre vaut $3\sqrt{3}/2$.