Partie V : électromagnétisme
Chapitre 2

Correction – TD – Magnétostatique

I Vrai-faux / questions courtes [● ○ ○]

1 - (V/F) Faux, car si on prend une sphère S centrée en O, on a $\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = SB(r)$. Or cette intégrale est toujours nulle pour le champ magnétique. Donc le champ est nul.

2 - (V/F) Faux. Même argument que précédemment mais en considérant cette fois que $\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$.

3 - Voir cours.

II Électrostatique VS Magnétostatique ★ | [● ○ ○]

	Champ électrostatique $\vec{E}$	Champ magnétostatique $\vec{B}$
circulation sur un contour fermé	$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$	$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$
flux à travers une surface fermée	$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$
en un point M appartenant à un plan de symétrie Π	$\vec{E}(M)$ est dans le plan Π	$\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan Π
en un point M appartenant à un plan d'antisymétrie Π^*	$\vec{E}(M)$ est orthogonal au plan Π^*	$\vec{B}(M)$ est dans le plan Π^*

III Courant et ordres de grandeur [● ○ ○]

1 - $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -e \times \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ avec $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ le nombre d'électrons passants par unité de temps.

D'où le débit d'électrons $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{I}{e} = -6.2 \times 10^{18}\,\text{électrons/s.}}$ (le résultat est négatif car les électrons se déplacent selon $-\vec{e}_z$, à contre courant.

2 - $I = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$, où l'intégrale porte sur la section du câble.

Si $\vec{j}$ est uniforme, alors $I = Sj$, d'où $\boxed{j = \dfrac{I}{S} = 5.0 \times 10^5\ \mathrm{A/m^2}.}$

3 - On sait également que $\vec{j} = qn\vec{v} = -env\vec{e}_z$, donc la vitesse est $\boxed{v = \dfrac{j}{-en} = 3.1 \times 10^{-5}\ \mathrm{m/s} = 11\,\mathrm{cm/h}.}$

Il peut paraître étonnant de trouver une vitesse aussi petite, mais c'est pourtant bien le cas. Attention, il s'agit de la vitesse moyenne de déplacement des électrons dans la direction $-\vec{e}_z$, mais il ne s'agit pas du tout de la vitesse de propagation des ondes dans le câble. Celles-ci ont une célérité proche de la vitesse de la lumière (dépendant du matériau ou du type de câble), et cette célérité est aussi celle du transport de l'information et de l'énergie. Comment est-ce possible ? On peut imaginer que les électrons sont tous accolés les uns aux autres (cela ne veut rien dire en pratique, mais c'est pour illustrer le propos) : si on pousse le premier, même très doucement, le dernier électrons tout au bout est mis en mouvement immédiatement : on a bien propagation de l'information et de l'énergie à une vitesse qui n'a rien à voir avec celle de déplacement des électrons.

IV Calcul d'une intensité par intégration de $\vec{j}$ [● ○ ○]

Voir exercice VII, question 1.

V Champ produit par une nappe de courants, théorème d'Ampère ★ | [● ● ○]

VI Champ produit par un cable coaxial ★ | [● ○ ○]

VII Câble parcouru par un courant non uniforme [● ● ○]

1 - ⋆ Si $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ avec j_0 constant, alors le courant total est $\boxed{I = j_0 \pi R^2.}$

⋆ Si $\vec{j} = j_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z$, alors

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}S\vec{e}_z \\
&= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} j_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi j_0 \int_{r=0}^{R} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \mathrm{d}r \\
&= 2\pi j_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R \\
&= 2\pi j_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right) \\
&= 2\pi j_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

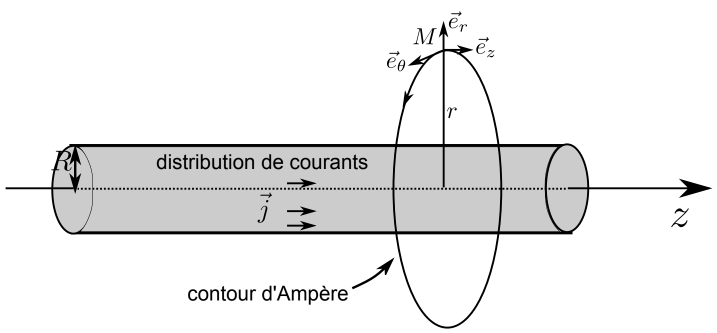
$$\boxed{I = \frac{j_0 \pi R^2}{2}}$$

2 - ⋆ Symétries de la distribution de courants : on prend un point M quelconque, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie des courants, or $\vec{B}(M)$ est orthogonal aux plans de symétrie, donc : $\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta.}$

⋆ Invariances de la distribution de courants par translation selon l'axe z et par rotation d'angle θ autour de l'axe z, donc : $\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta.}$

⋆ Théorème d'Ampère :

- Contour d'ampère : cercle comme sur le schéma, <u>orienté</u> dans le sens de $\vec{e}_\theta$.



- Circulation : $\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 2\pi r\, B_\theta(r)$.

- Courant enlacé : c'est ici qu'il faut distinguer les deux cas.

- Si $r > R$ (cas du schéma) alors $I_{\text{enlacé}} = I$ (calculé question précédente), et finalement on obtient

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{4r}\,\vec{e}_\theta.}$$

- Si $r < R$ alors :

$$\begin{aligned}
I_{\text{enlacé}} &= \iint_{S_{\text{Ampère}}} \vec{j}\cdot \mathrm{d}S\vec{e}_z \\
&= \int_{r'=0}^{r}\int_{\theta=0}^{2\pi} j_0\left(1-\frac{r'^2}{R^2}\right) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi j_0 \int_{r'=0}^{r}\left(r'-\frac{r'^3}{R^2}\right)\mathrm{d}r' \\
&= 2\pi j_0\left[\frac{r'^2}{2}-\frac{r'^4}{4R^2}\right]_0^r \\
&= 2\pi j_0\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right) \\
&= 2\pi j_0\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)
\end{aligned}$$

et finalement on obtient $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{\text{enlacé}}}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 j_0 r}{2}\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)\vec{e}_\theta.}$

3 - En régime stationnaire l'équation de Maxwell-Ampère est $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$.
Ici $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques, donc d'après le formulaire on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\theta(r))}{\partial r}\vec{e}_z \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\times\frac{\mu_0 j_0 r}{2}\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)\right)\vec{e}_z \\
&= \frac{1}{r}\frac{\mu_0 j_0}{2}\left(2r-\frac{4r^3}{2R^2}\right)\vec{e}_z \\
&= \frac{\mu_0 j_0}{2}\left(2-\frac{2r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z \\
&= \mu_0 j_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien $\mu_0\vec{j}$.