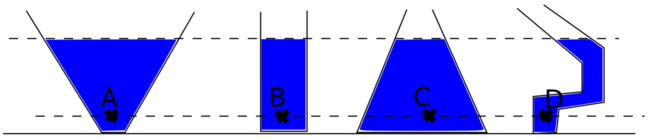
Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 1

TD – Statique des fluides

Remarque : exercice avec ⋆ : exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire") | [• ◦ ◦] : difficulté des exercices

I Vrai-faux/questions courtes ⋆ | [• ◦ ◦]

1 - On considère de l'eau dans des récipients de formes diverses. Classer les pressions aux points A, B, C et D dans l'ordre croissant.



2 - (V/F) L'équation locale de la statique des fluides sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$ est valable si l'axe Oz est orienté vers le haut.

3 - (V/F) La résultante des forces de pression sur une surface fermée est nulle.

4 - (V/F) La pression est discontinue à l'interface entre deux fluides.

5 - (V/F) Dans l'eau, la pression augmente de 1 bar tous les mètres.

6 - (V/F) Une particule de fluide est un autre nom pour désigner une molécule ou un atome du fluide.

7 - Montrer que la formule $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$ est bien homogène.

8 - Rappeler la relation entre les bars, les pascals, les atmosphères, et les newtons par mètre carré.

II Baromètre de Torricelli [• ◦ ◦]

Evangelista Torricelli (1608-1647) est connu pour avoir inventé le premier baromètre. Il s'agit d'un tube en U, comme représenté ci-contre, dont l'extrémité haute est bouchée et l'extrémité basse est ouverte. Il est rempli d'un liquide, modélisé comme incompressible.
Au dessus du point A, on considère que la pression est négligeable. Au dessus du point B la pression est la pression atmosphérique.

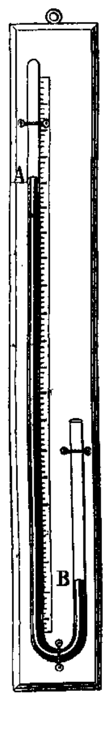


Fig. 280. — Baromètre à siphon ordinaire.

1 - Exprimer la hauteur de liquide entre A et B en fonction des grandeurs pertinentes.

2 - Faites l'application numérique pour une pression atmosphérique de 1.013 bar :

- si le liquide est de l'eau ($\rho = 1.0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) ;
- si le liquide est du mercure ($\rho = 13.6 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

3 - Finalement, comment fait-on pour mesurer la pression atmosphérique avec cet appareil ? Faire un schéma dans le cas où la pression atmosphérique en B est faible, et un dans le cas où elle est élevée.

4 - Le Torr, aussi appelé millimètre de mercure (noté mmHg, et d'ailleurs toujours utilisée sur les appareils à tension des médecins), est une ancienne unité de pression. On a la correspondance 1 atm = 760 mmHg. Est-ce surprenant ?

III Masse et poids de l'atmosphère [● ○ ○]

On reprend le calcul de la masse d'une colonne d'air vu en cours.
On considère donc une colonne de base rectangulaire (aire $S = 1\,\mathrm{m}^2$) partant de l'altitude $z = 0$ et montant à l'infini. On suppose que la densité de l'air a pour expression $\rho = \rho_0 \exp(-z/H)$, et que la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ est constante.

1 - Exprimer le poids de la colonne d'air sous la forme d'une intégrale (sans la calculer).

Maintenant, on ne suppose plus que la pesanteur est constante.

2 - Justifier que l'on peut écrire $g(z) = g_0 \dfrac{R_T^2}{(z+R_T)^2}$, avec z l'altitude (distance entre le sol et le point considéré), $g_0 = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ la pesanteur à la surface de la Terre (en $z = 0$), et R_T le rayon de la Terre.

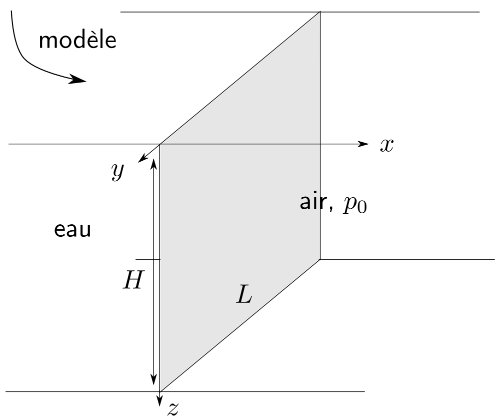
La formule pour $g(z)$ permet d'évaluer $g(100\,km)/g_0 = 2.3 \times 10^{-}4$. Commentaire ?

3 - Supposons que l'on veuille tout de même tenir compte de la dépendance en z de g. Exprimer alors à nouveau le poids de la colonne d'air sous la forme d'une intégrale (sans la calculer).

On voudrait maintenant calculer la masse totale de l'atmosphère terrestre.

4 - Répondre à cette question sans calcul d'intégrale, en utilisant uniquement le fait que la pression au niveau du sol est $P_0 = 1.0\,\mathrm{bar}$ et que le rayon de la Terre est $R_\mathrm{T} = 6.4 \times 10^3\,\mathrm{km}$.

IV Barrage ⋆ | [● ○ ○]



On considère le barrage de Serre-Ponçon (dans les Hautes-Alpes), qui forme la plus grande retenue d'eau d'Europe. On le modélise par un rectangle vertical de hauteur 115 m et de largeur 630 m (comme sur le schéma ci-dessous).

1 - La pression dans l'eau est donnée par $p(z) = p_0 + \rho_0 g z$. Rappeler les hypothèses qui permettent d'aboutir à cette expression.

2 - (question traitée en cours, à refaire pour s'entraîner) Exprimer la force exercée par l'eau sur le barrage.

De l'autre coté du barrage il y a de l'air à la pression uniforme p_0.

4 - Donner l'expression de la force exercée par l'air sur le barrage.

5 - Finalement, donner l'expression de la force totale exercée sur le barrage.

Faire l'application numérique.

V Iceberg, calcul du volume immergé

⋆ | [● ○ ○]

On considère un iceberg flottant sur l'océan (ou bien un glaçon flottant dans un verre d'eau). On note V_1 le volume de la partie immergée (donc sous l'eau), et V_2 le volume de la partie émergée (donc dans l'air).

(vue d'artiste d'un iceberg, source : Wikipedia)

1 - Calculer le rapport V_1/V_2.

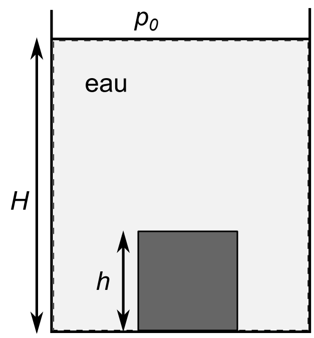
2 - Peut-on dire (grossièrement) que le dessin d'artiste ci-contre est réaliste ?

Données : masse volumique de l'eau $\rho_e = 1.0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, de la glace : $\rho_g = 0.9 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, de l'air : $\rho_{air} = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$.

VI Cube posé au fond d'un récipient

[●○○]

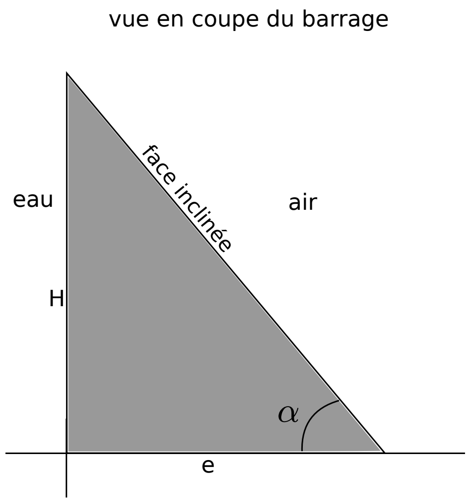
Un cube de côté h et de masse volumique ρ_c est posé au fond d'un récipient rempli d'eau. On suppose qu'il n'y a pas d'eau sous le cube.



1. Quelle est la condition pour que le cube coule ?
2. Énoncer le théorème d'Archimède. Pourquoi ne peut-on pas l'appliquer ici ?
3. Donc sans utiliser le théorème d'Archimède, exprimer la résultante des forces de pression exercées sur le cube.
4. On suppose maintenant que le cube est maintenu tel qu'il y a un peu d'eau sous le cube.
   a. Reprendre le même calcul qu'à la question précédente pour exprimer la résultante des forces de pression.
   b. Exprimer maintenant cette résultante en utilisant directement le théorème d'Archimède. Trouve-t-on la même chose ?

VII Barrage incliné

[● ● ○]

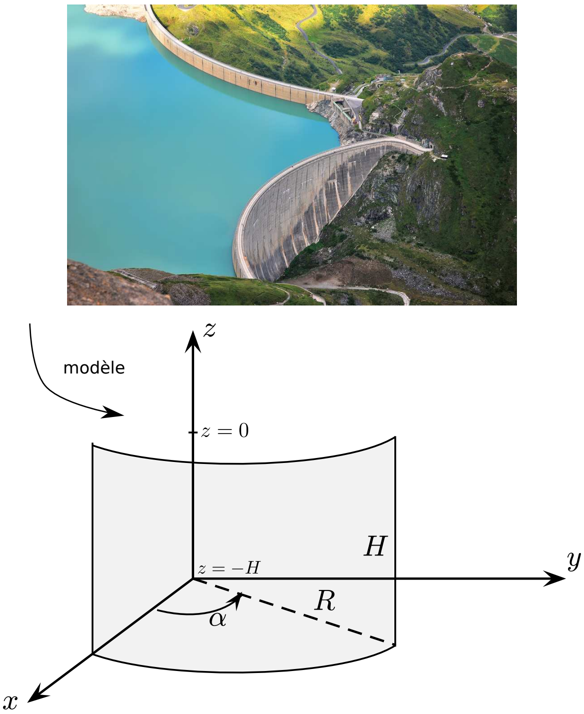


On reprend l'exercice IV, mais on prend cette fois en compte le fait que du coté de l'air, le barrage n'est pas vertical, mais incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (voir schéma ci-dessous).

1. Donner l'expression de la résultante des forces de pression exercées par l'air. On donnera la composante verticale et la composante horizontale (faire apparaître des axes sur votre schéma).

VIII Barrage incurvé [• • ○]

Un barrage n'est en général pas exactement plan, mais légèrement incurvé. On propose ici de refaire le calcul de la force exercée par l'eau sur le barrage dans cette géométrie.
On suppose donc que le barrage est un morceau de cylindre, de hauteur $H = 115\,\mathrm{m}$, de rayon $R = 315\,\mathrm{m}$, et d'angle $\alpha = \pi$ (c'est donc un demi-cylindre).
La pression de l'air est uniforme égale à p_0.
L'axe z est pris vers le haut. La pression dans l'eau est donc donnée par $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$. $z = 0$ correspond à la surface de l'eau, $z = -H$ au fond de l'eau.



1 - Exprimer la longueur L du barrage (c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle fait par le barrage) en fonction de R et de α. Faire l'application numérique.

2 - On s'intéresse dans un premier temps à la force exercée par l'air sur le barrage.

a - Prendre un point M sur le barrage repéré par l'angle θ des coordonnées cylindriques. Donner l'expression du vecteur $\vec{e}_r$ des coordonnées cylindriques en fonction de θ, $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

b - Donner alors l'expression du vecteur normal $\vec{n}$ en fonction de θ, $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

c - Donner enfin l'expression de la résultante des forces de pression exercée par l'air sur le barrage, d'abord sous la forme d'une intégrale, intégrale que l'on calculera ensuite.

On donne $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ pour l'élément de surface en cylindriques.

3 - On s'intéresse ensuite à la résultante des forces de pression exercée par l'eau sur le barrage.

Exprimer cette résultante (c'est le même type de calcul que pour l'air, sauf que p dépend de z).

4 - Finalement, donner l'expression de la force totale exercée sur le barrage.

Faire l'application numérique.