9. CINEMATIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

-Cinématique graphique-

Elaboré par : Youssef RAHOU, février 2019

1. Introduction :

La cinématique consiste à la description du mouvement des systèmes matériels sans pour autant tenir en compte les causes qui y sont derrière.

A priori, l'ensemble des **méthodes analytiques** pour établir une description cinématique d'un système matériel ont été établies, à savoir **la dérivation directe**, **la notion de torseur cinématique avec sa propriété de champ des vecteurs vitesses**, et enfin, **les propriétés de composition de mouvement**. Cependant chacune de ces méthodes a **une interprétation géométrique concrète qui peut présenter une alternative graphique de résolution** dans certains cas d'étude.

L'objet du présent chapitre est de mettre en évidence une approche graphique globale permettant l'identification des grandeurs cinématiques**, principalement le vecteur vitesse,** et ce**,** sous certaines hypothèses qu'on exposera, cette approche est nommé **cinématique graphique.**

La cinématique graphique repose sur **quatre** outils géométriques, qui sont :

- **Les propriétés géométriques** des mouvements classiques d'un solide, à **savoir la translation et la rotation.**
- **L'interprétation géométrique de la propriété d'équiprojectivité**, vue auparavant.
- **Les propriétés géométriques du CIR** : centre instantané de rotation.
- Et enfin**, l'interprétation géométrique** de la propriété de **composition des vecteurs vitesse.**

Un des avantages de la cinématique graphique est sa **simplicité** dans certains cas par rapport à la méthode analytique, mais cette méthode a des limites, tels que **l'imprécision dans les résultats**, ou encore **le caractère instantané des solutions**, c'est-à-dire que **le résultat obtenu, qui est le vecteur vitesse, est propre à un instant donné t_0.**

2. Propriétés géométriques des mouvements classiques :

2.1. Le mouvement de translation :

Le mouvement du solide (S) par rapport au repère R est un mouvement de translation, si à l'instant t_0, tous les points du solide (S) ont le même vecteur vitesse (donc même trajectoire).

Géométriquement, si à l'instant t_0 on connait le vecteur vitesse d'un point A du solide (S), alors on peut représenter le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathbf{M} \in \mathbf{S}/\mathbf{R})$ **de tout point M appartient ou juste considéré appartenir à (S) :**

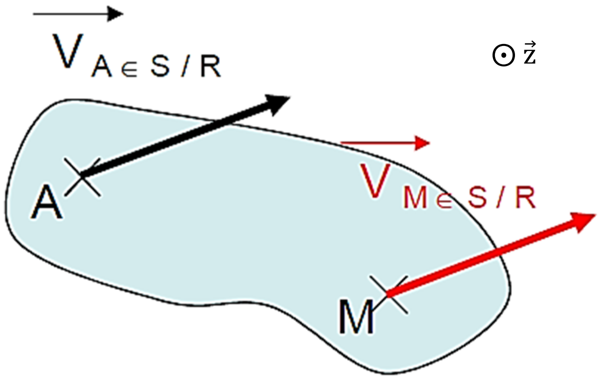


Figure.1. Champ des vecteurs vitesse, cas de la translation.

2.2. Le mouvement de rotation :

2.2.1. Propriétés géométriques :

Soit un solide (S) en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le bâti (repère lié au bâti : R) et $\vec{\Omega}(S/R)= \Omega.\vec{z}$.

D'une part, pour tout point M appartenant ou juste considéré appartenir à (S), la propriété du champ des vecteurs vitesse entre M et O s'écrit :

$\vec{V}(M \in S/R)= \vec{V}(O \in S/R)+ \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OM} =\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OM}$, **par conséquent :**

Pour tout point M du solide (S) $\vec{V}(\mathbf{M} \in \mathbf{S}/\mathbf{R})$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ et à $\vec{z}$:
$$\vec{V}(\mathbf{M} \in \mathbf{S}/\mathbf{R}) \perp \overrightarrow{\mathbf{OM}}$$

D'autre part, pour deux points M1 et M2 du même plan P (contenant O) du solide (S):

$\vec{V}(M1 \in S/R)= \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OM}1$ d'où $||\vec{V}(M1 \in S/R)||= ||\vec{\Omega}(S/R)||.||\overrightarrow{OM}1||$ (car $\overrightarrow{OM}1 \perp \vec{\Omega}(S/R)$).

$\vec{V}(M2 \in S/R)= \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OM}2$ d'où $||\vec{V}(M2 \in S/R)||= ||\vec{\Omega}(S/R)||.||\overrightarrow{OM}2||$ (car $\overrightarrow{OM}2 \perp \vec{\Omega}(S/R)$).

Par conséquent :

- $||\vec{\Omega}(\mathbf{S}/\mathbf{R})|| = \frac{||\vec{V}(\mathbf{M2} \in \mathbf{S}/\mathbf{R})||}{||\overrightarrow{\mathbf{OM2}}||} = \frac{||\vec{V}(\mathbf{M1} \in \mathbf{S}/\mathbf{R})||}{||\overrightarrow{\mathbf{OM1}}||}$.
- **La norme de la vitesse des points qui sont à la même distance de O est la même.**

Un cas particulier géométriquement intéressant, est lorsque les points **O, M1 et M2 sont alignés,** dans ce cas la relation précédente se traduit par **deux triangles homothétiques** :

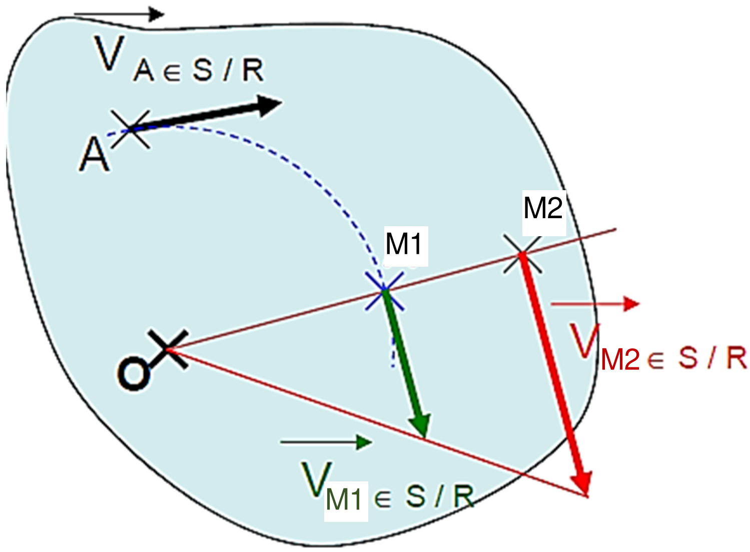


Figure.2. Champ des vecteurs vitesse, cas de la rotation.

2.2.2. **Cas d'application :**

Soit le schéma cinématique correspondant à la pince hydraulique suivant :

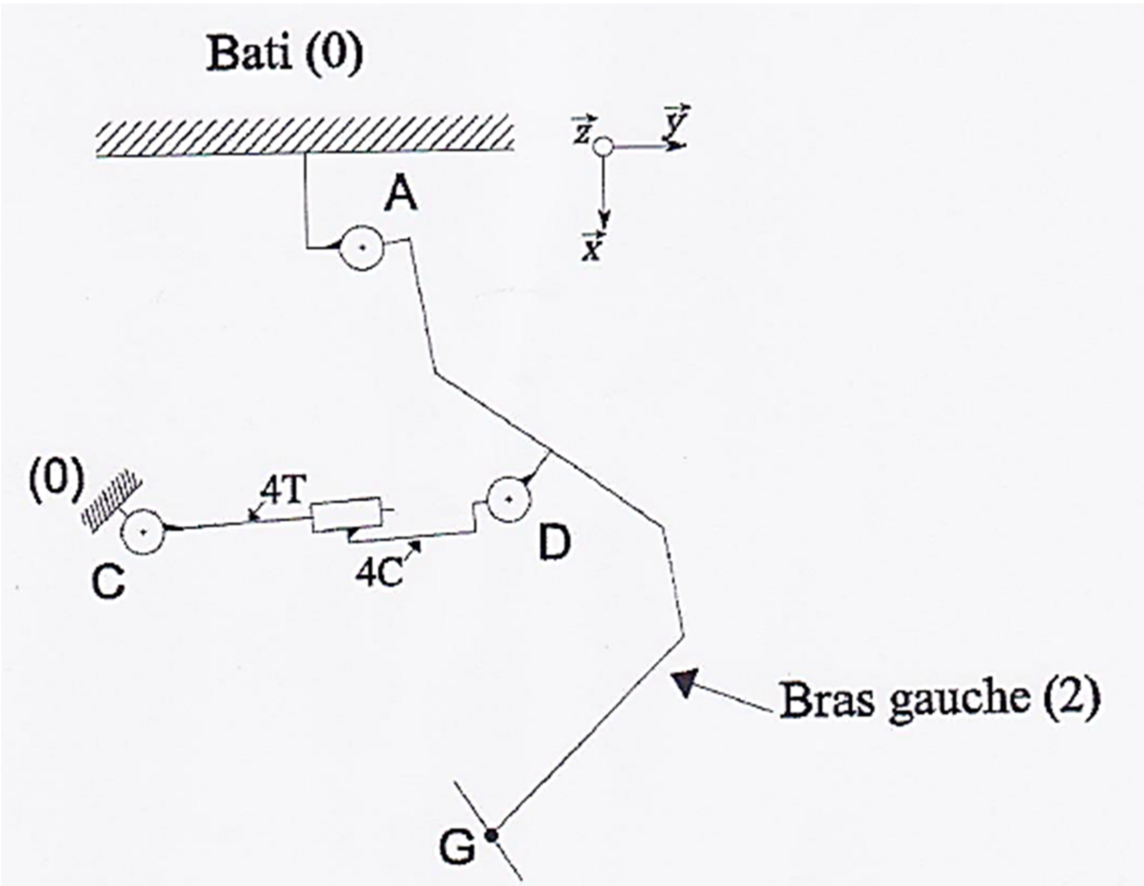


Figure.3. Schéma cinématique, pince hydraulique.

Les liaisons en A, C et D sont des pivots, la liaison entre 4Cet 4CT est une glissière, sachant que $||\vec{V}(\mathrm{D} \in 2/0)||$=0,2 m/s.

1. Représenter le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{D} \in 2/0)$.
2. Déduire géométriquement le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{G} \in 2/0)$.

Concernant le sens de $\vec{V}(\mathrm{D} \in 2/0)$, il est **vers la droite**, l'échelle de représentation est à choisir.

3. La propriété d'équiprojectivité :

On rappelle **que le champ des vecteurs vitesse est équiprojectif**, c'est-à-dire, pour tous les points A et M du solide indéformable (S), on a :

$$\overrightarrow{\mathbf{AM}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{M} \in \mathbf{S/R}) = \overrightarrow{\mathbf{AM}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S/R})$$

$||\overrightarrow{\mathbf{AM}}||.||\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{M} \in \mathbf{S/R})||$**.cos** $(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AM}},\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S/R})})$=$||\overrightarrow{\mathbf{AM}}||.||\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S/R})||$**.cos** $(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AM}},\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{M} \in \mathbf{S/R})})$

D'où :

$||\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{M} \in \mathbf{S/R})||$**.cos** $(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AM}},\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S/R})})$=$||\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S/R})||$**.cos** $(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{AM}},\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{M} \in \mathbf{S/R})})$, par conséquent :

La projection de $\vec{V}(\mathrm{M} \in \mathrm{S/R})$ sur la droite (AM) est égale à la projection de $\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R})$ sur la même droite.

Si on connait $\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R})$, <u>pour identifier la vitesse $\vec{V}(\mathrm{M} \in \mathrm{S/R})$ il faut connaitre sa direction</u>.

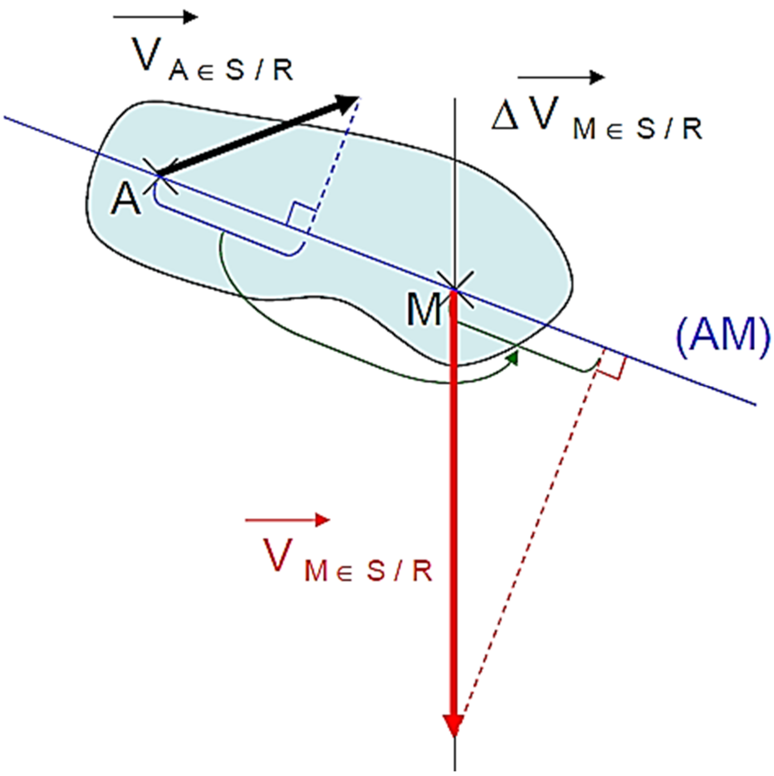


Figure.4. Utilisation géométrique de l'équiprojectivité pour identifier le vecteur vitesse $\vec{V}(M \in S/R)$.

Remarque :

La projection de $\vec{V}(\mathrm{M} \in \mathrm{S/R})$ sur la droite (AM) correspondant à la quantité $\|\vec{V}(\mathrm{M} \in \mathrm{S/R})\|.\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R})})$, est une grandeur algébrique, qui peut être positive ou négative (cas ou $\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R})}) <0$).

L'équiprojectivité se traduit donc par l'égalité des mesures algébriques $\overline{AH}_A$ et $\overline{AH}_M$:

$$\overline{AH}_A = \overline{MH}_M$$

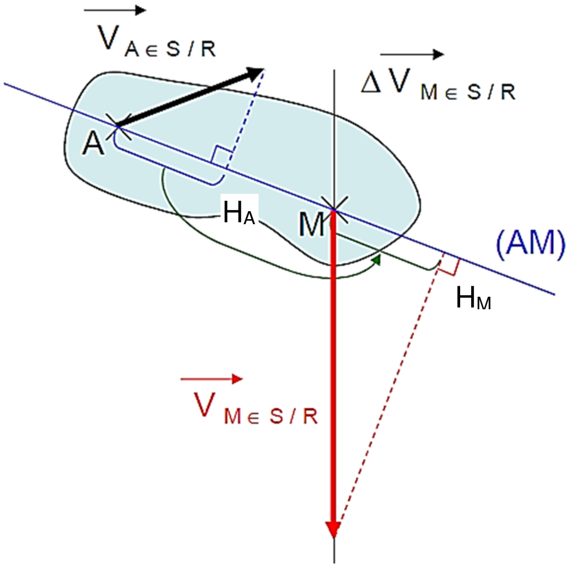


Figure.5. Interprétation géométrique de l'équiprojectivité, cas où $\overline{AH}_A = \overline{MH}_M > 0$.

4. Les propriétés géométriques du CIR:

4.1. Le mouvement plan sur plan entre deux solides:

4.1.1. Définition :

On dit que le solide (S2) est **en mouvement plan sur plan** par rapport à un solide (S1) si pour tout point P de (S2), le torseur cinématique associé à leur mouvement relatif s'écrit :

$$\{V\,(S2/S1)\} = {}_P\begin{Bmatrix} 0 & Vx \\ 0 & Vy \\ \Omega z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Remarque :

- **La trajectoire du point P est contenue dans le plan** de mouvement (P,$\vec{x}$, $\vec{y}$).
- Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S2/S1)$ **est perpendiculaire au plan de mouvement** (P,$\vec{x}$, $\vec{y}$).

4.2. Le centre instantané de rotation, CIR :

4.2.1. Définition :

Pour un mouvement plan sur plan de (S2) par rapport à (S1), **on a toujours** $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S2/S1}) \perp \vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{P} \in \mathbf{S2/S1})$**.**

<u>Cette condition pratique</u> permet d'affirmer que :

Le torseur cinématique associé au solide (S2) **en mouvement plan sur plan** par rapport à un solide (S1) **est à résultante, c'est-à-dire qu'il existe un point I (à l'instant t) tel que :**

$$\{\mathcal{V}\,(\mathrm{S2/S1})\} = {}_{\mathrm{I}}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S2/S1}) = \boldsymbol{\Omega z}.\vec{\boldsymbol{z}} \\ \vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S2/S1}) = \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right\}$$

Le point I est appelé centre instantané de rotation (CIR), et l'axe $(\mathrm{I},\vec{z})$ est appelé axe instantané de rotation de (S2) dans son mouvement par rapport à (S1), il s'agit, en effet, de l'axe central.

Remarque :

- La position du CIR du mouvement de (S2) par rapport est (S1) est définie pour un instant donné, d'où **l'appellation ''instantané''.**
- **A l'instant t, le mouvement plan sur plan de (S2) par rapport à (S1) est une rotation autour du CIR I.**
- Le seul cas ou le CIR est permanent, donc ne dépendant pas du temps, est celui de la rotation autour d'un point fixe $\mathrm{I_0}$, **par conséquent le centre de rotation (CR) $\mathbf{I_0}$ est un cas particulier de CIR.**

4.2.2. Détermination géométrique du CIR :

L'intérêt d'identifier le CIR du mouvement d'un solide (S2) par rapport à un solide (S1) **est de pouvoir exploiter les propriétés géométriques du mouvement de rotation vues au paragraphe 2,** puisque le CIR est un centre de rotation à l'instant t.

Pour identifier le CIR, partant de la propriété du champ des vecteurs vitesses du mouvement de (S2) par rapport à (S1), en impliquant le point I, centre instantané de rotation de (S2) par rapport à (S1) à l'instant t. En effet, soient deux points A et B liés au solide (S2),

On a : $\vec{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S2/S1}) = \vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S2/S1}) + \vec{\Omega}(\mathrm{S2/S1}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{IA}} = \vec{\Omega}(\mathrm{S2/S1}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{IA}}$

De même : $\vec{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S2/S1}) = \vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S2/S1}) + \vec{\Omega}(\mathrm{S2/S1}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \vec{\Omega}(\mathrm{S2/S1}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{IB}}$

Les deux relations précédentes permettent d'affirmer que $\overrightarrow{\mathbf{IA}} \perp$ ''à la direction de'' $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S2/S1})$ et $\overrightarrow{\mathbf{IB}} \perp$ ''à la direction de'' $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{B} \in \mathbf{S2/S1})$, En synthèse :

Le CIR I est l'intersection des deux droites (IA) et (IB) telles que :

- **(IA)** $\perp\ \Delta\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S2/S1})$: **direction de** $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A} \in \mathbf{S2/S1})$**.**
- **(IB)** $\perp\ \Delta\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{B} \in \mathbf{S2/S1})$: **direction de** $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{B} \in \mathbf{S2/S1})$**.**

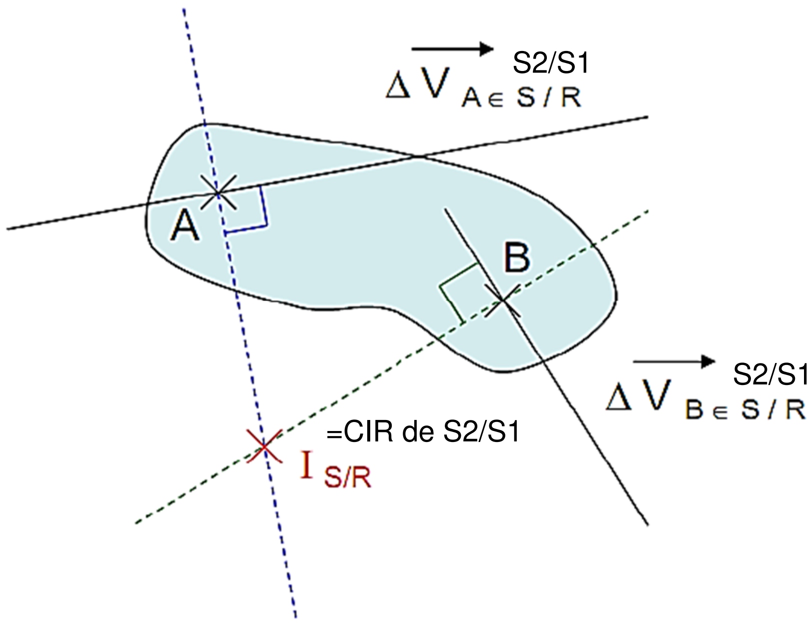


Figure.6. Détermination géométrique du CIR, connaissant la direction des vecteurs vitesse de deux points.

Remarque :

- Le CIR d'un solide (S) en **mouvement de translation** par rapport à un repère R est à **l'infini.**

4.3. Le mouvement plan sur plan entre trois plans:

Soient (S1), (S2) et (S3) trois solides en mouvement plan sur plan. Notons I_{31}, I_{32} et I_{21} respectivement les centres instantanés de rotation, au même instant t, des mouvements relatifs S3/S1, S3/S2 et S2/S1.

Soit, à l'instant t, les vecteurs rotation correspondants :

$\vec{\Omega}(S3/S1)=\omega_{31}.\vec{z}$, $\vec{\Omega}(S3/S2)=\omega_{32}.\vec{z}$, $\vec{\Omega}(S2/S1)=\omega_{21}.\vec{z}$.

- I_{31} est le CIR correspondant au mouvement de S3 par rapport à S1, il vérifie :

$$\vec{V}(I31 \in S3/S1)=\vec{0} \qquad \textit{expression.1}$$

- Par composition des vecteurs vitesse, la relation précédente s'écrit :

$$\vec{V}(I31 \in S3/S2)+\vec{V}(I31 \in S2/S1)=\vec{0} \qquad \textit{expression.2}$$

- La propriété du champ des vecteurs vitesse, pour les mouvements relatifs S3/S2 et S2/S1 donne :

$\vec{V}(I31 \in S3/S2)= \vec{V}(I32 \in S3/S2)+ \vec{\Omega}(S3/S2) \wedge \overrightarrow{I32I31}= \omega_{32}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{I32I31}$ (I_{32} est CIR pour S3/S2)

$\vec{V}(I31 \in S2/S1)= \vec{V}(I21 \in S3/S2)+ \vec{\Omega}(S2/S1) \wedge \overrightarrow{I21I31}=\omega_{21}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{I21I31}$ (I_{21} est CIR pour S2/S1)

L'expression 2 évolue pour donner :

$$\omega_{32}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{I32I31} + \omega_{21}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{I21I31} =\vec{z} \wedge(\omega_{32}.\overrightarrow{I32I31}+\omega_{21}.\overrightarrow{I21I31})=\vec{0}$$

Forcément : $\omega_{32}.\overrightarrow{I32I31}+\omega_{21}.\overrightarrow{I21I31}=\vec{0}$ et donc :$\overrightarrow{I32I31}=-(\omega_{21}/ \omega_{32}).\overrightarrow{I21I31}$.

Pour ainsi conclure :

A un instant t, pour trois solides (S1), (S2) et (S3) en mouvement plan sur plan, les CIR I_{31}, I_{32} et I_{21} sont alignés.

Remarque :

Dans certains cas, cette propriété permet de déterminer géométriquement un CIR :

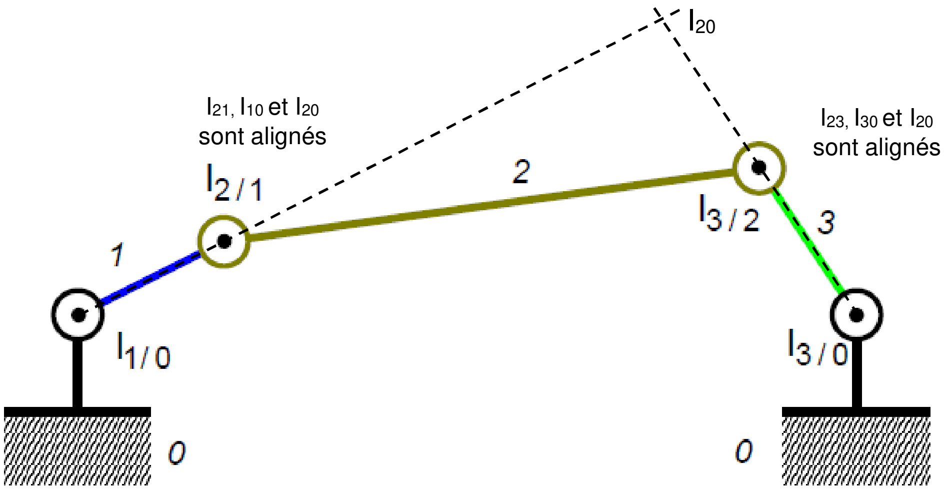


Figure.7. Détermination géométrique du CIR I_{20} et I_{31}, connaissant d'autre CIR.

5. La propriété de composition des vecteurs vitesse :

Pour un point A, la propriété de composition des vecteurs vitesse s'écrit :

$$\vec{V}(A \in S2/S0) = \vec{V}(A \in S2/S1) + \vec{V}(A \in S1/S0)$$

Où S0 et S1 et S2 sont trois solides en mouvement relatif. Cette relation est géométriquement intéressante **lorsqu'on connait la vitesse $\vec{V}(A \in S2/S0)$ et la direction des deux vecteurs vitesse $\vec{V}(A \in S2/S1)$ et $\vec{V}(A \in S1/S0)$** :

Attention au sens des flèches :
$\vec{V}(A \in 2/1)$ et $\vec{V}(A \in 1/0)$
ont le même sens,
et $\vec{V}(A \in 2/0)$ a un sens opposé.

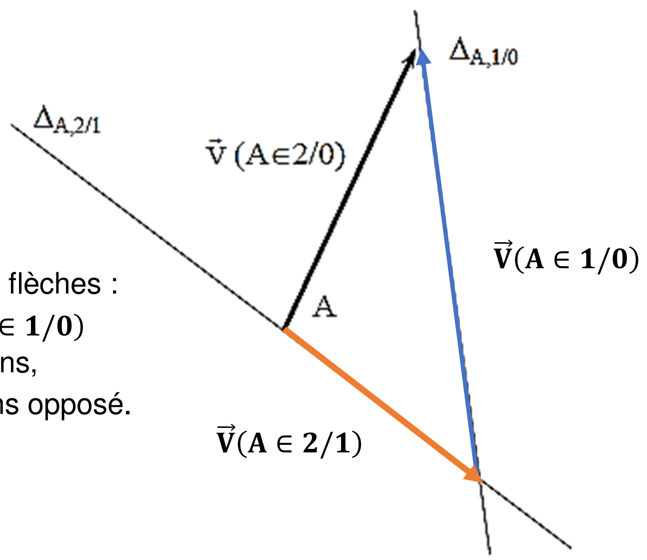
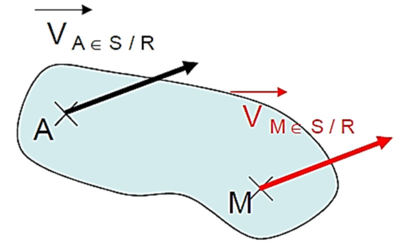
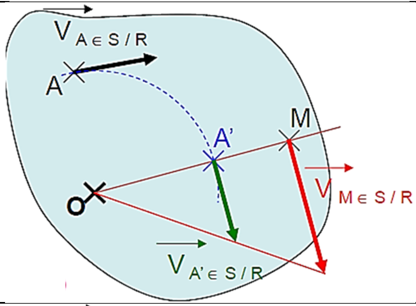
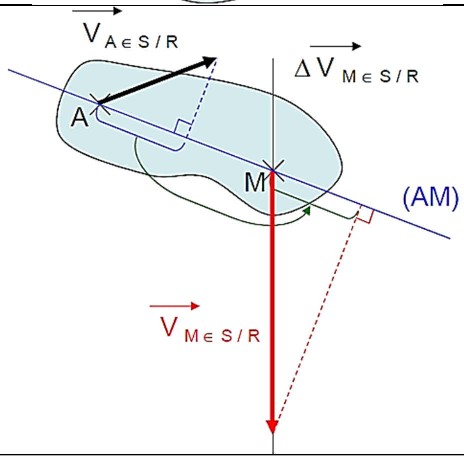
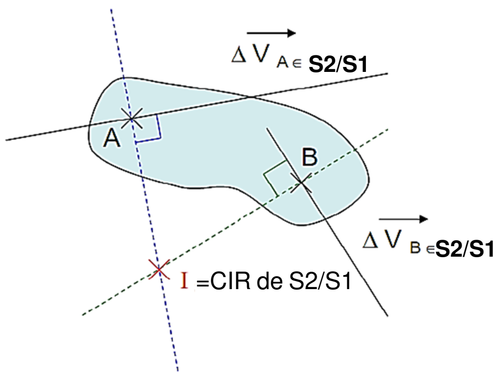


Figure.8. Détermination géométrique de et $\vec{V}(A \in S1/S0)$ à partir de la propriété de composition des vecteurs vitesse.

6. Synthèse des différents outils géométriques:

Situation géométrique	Données	Résultat(s)	Schématisation graphique
Mouvement de translation	• **La vitesse en un point quelconque du solide (S) :** $\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in S/R})$	• **La vitesse en tout point M du solide (S) :** $\overrightarrow{V}(\mathbf{M \in S/R})$	
Mouvement de rotation	• **La vitesse en un point quelconque du solide (S) :** $\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in S/R})$	• **La vitesse en tout point M du solide (S) :** $\overrightarrow{V}(\mathbf{M \in S/R})$	
Equiprojectivité	• **La vitesse en un point quelconque du solide (S) :** $\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in S/R})$ • **La direction de la vitesse** $\Delta\overrightarrow{V}(\mathbf{M \in S/R})$.	• **La vitesse au point M :** $\overrightarrow{V}(\mathbf{M \in S/R})$.	
CIR	• **La direction de deux vecteurs vitesse** $\Delta\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in S2/S1})$ **et** $\Delta\overrightarrow{V}(\mathbf{B \in S2/S1})$	• **Le CIR** $\mathbf{I_{S2/S1}}$**, puis vous utilisez les propriétés d'un mouvement de rotation.**	
Composition des vecteurs vitesse	• **La vitesse en un point quelconque du solide (S) :** $\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in 2/0})$ • **La direction de deux vecteurs vitesse** $\Delta\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in 2/1})$ **et** $\Delta\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in 1/0})$	• **Les deux vecteurs vitesse** $\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in 2/1})$ **et** $\overrightarrow{V}(\mathbf{A \in 1/0})$