V. Géométrie de l'espace

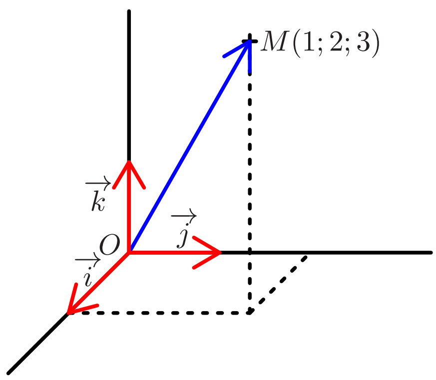
1 Repérage dans l'espace

1.1 Repérage cartésien

Définition 1. *On appelle* **base** *de l'espace un triplet* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *avec* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ *trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de l'espace s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ *sous la forme* $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j} + \nu \overrightarrow{k}$ *avec* λ, μ *et* ν *des nombres réels. Les nombres* λ, μ *et* ν *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* λ *est appelé* **abscisse** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* μ *est appelé* **ordonnée** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *et le nombre* ν *est appelé* **cote** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*. On note* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$.

Remarque 1. *Dans la base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, on a* $\overrightarrow{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

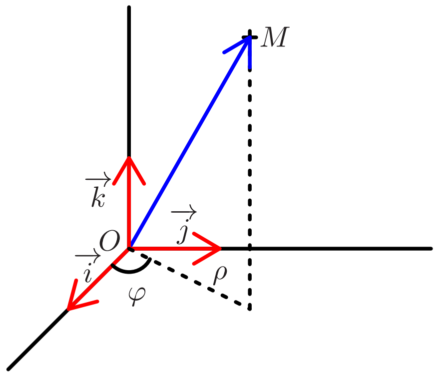
Définition 2. *On appelle* **repère cartésien** *de l'espace un quadruplet* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, avec* O *un point du plan et* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *une base de l'espace. Le point* O *est appelé* **origine** *du repère, la droite* $(O, \overrightarrow{i})$ *est appelée* **axe des abscisses***, la droite* $(O, \overrightarrow{j})$ *est appelée* **axe des ordonnées** *et la droite* $(O, \overrightarrow{k})$ *est appelée* **axe des cotes***. Si les vecteurs* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ *sont orthogonaux deux à deux, le repère est dit* **orthogonal** *si de plus ils sont de même norme alors le repère est dit* **orthonormal***. Tout point* M *de l'espace est repéré de manière unique par trois nombres* x, y *et* z *tels que* $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$*. Les nombres* x, y *et* z *sont appelés* **coordonnées** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* x *est appelé* **abscisse** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*, le nombre* y *est appelé* **ordonnée** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *et le nombre* z *est appelé* **cote** *du point* M *dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*. On note* $M(x; y; z)$.



Remarque 2. *On admet que l'espace tout comme le plan peut être orienté, on utilisera la règle du* bonhomme d'Ampère *ou du* tire-bouchon de Maxwell *pour définir une* **base orthonormale directe***.*

1.2 Repérage cylindrique

Définition 3. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct, on considère un point $M(x;y;z)$. On appelle* **coordonnées cylindriques** *du point M un triplet (ρ, φ, z) de nombres réels avec $\rho \geqslant 0$ tels que* $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cos\varphi \\ y & = & \rho\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}\right.$ *, on a alors $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.*

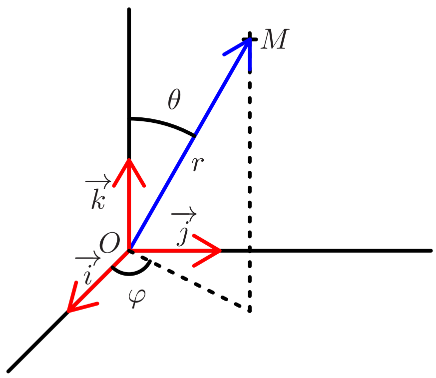


Remarque 3. *L'ensemble des points de coordonnées cylindriques (ρ, φ) avec $\rho = R$ est un cylindre d'axe $(O, \overrightarrow{k})$ et de rayon R.*

Exercice 1. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3}; -1; 5)$.*

1.3 Repérage sphérique

Définition 4. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct, on considère un point $M(x;y;z)$. On appelle* **coordonnées sphériques** *du point M un triplet (r, φ, θ) de nombres réels avec $r \geqslant 0$ tels que* $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\sin\theta\cos\varphi \\ y & = & r\sin\theta\sin\varphi \\ z & = & r\cos\theta \end{array}\right.$ *, on a alors $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On appelle r le* **rayon** *du point M, θ la* **colatitude** *du point M et φ la* **longitude** *du point M.*



Remarque 4. *L'ensemble des points de coordonnées sphériques (r, φ, θ) avec $r = R$ est une sphère de centre O et de rayon R.*

Exercice 2. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées sphériques du point de coordonnées cartésiennes $(-\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{3})$.*

2 Produit scalaire, produit vectoriel et déterminant dans l'espace

2.1 Produit scalaire

Définition 5. *On appelle* **produit scalaire** *de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :*

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & si\ \vec{u} \neq \vec{0}\ et\ \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & si\ \vec{u} = \vec{0}\ ou\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}}$$

Remarque 5. *On ne peut pas définir la notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls dans l'espace.*

Remarque 6. *Le produit scalaire est symétrique car* $\boxed{\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}}$.

Remarque 7. *Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*

Propriété 1. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale, on considère deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Démonstration. Exigible - On utilise la formule d'Al-Kashi $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$. □

Propriété 2. Bilinéarité du produit scalaire

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et deux nombres réels λ et μ, alors :

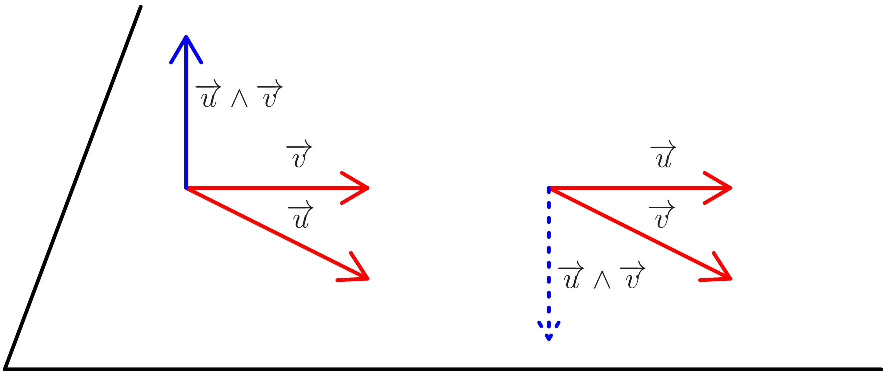
$$\boxed{(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda(\vec{u}.\vec{w}) + \mu(\vec{v}.\vec{w})}$$

Démonstration. Exigible - On utilise la propriété 1. □

2.2 Produit vectoriel

Définition 6. *On appelle* **produit vectoriel** *de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :*

- *$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*
- *le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe et $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.*



Remarque 8. *Le produit vectoriel est antisymétrique car* $\boxed{\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}}$.

Remarque 9. *Le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

Remarque 10. *Si* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *est une base orthonormale directe de l'espace alors* $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

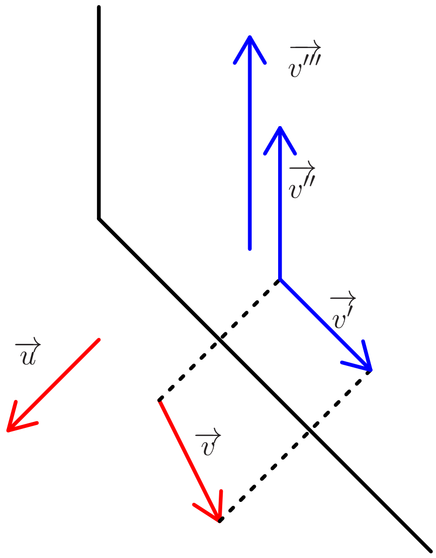
Exercice 3. *On considère une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *de l'espace, calculer* $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) \wedge \overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j})$.

Propriété 3. Bilinéarité du produit vectoriel

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de l'espace et deux nombres réels* λ *et* μ, *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})}$$

Démonstration. Exigible - On montre que l'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est linéaire en tant que composée de trois applications linéaires (projection sur le plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et homothétie de rapport $||\overrightarrow{u}||$).



□

Propriété 4. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, *on considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}}$$

Démonstration. Exigible - On utilise la propriété 3. □

Exercice 4. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

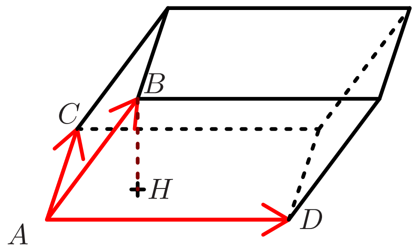
2.3 Déterminant ou produit mixte

Définition 7. *On appelle* **déterminant** *de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace :*

$$\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})}$$

Remarque 11. *Le déterminant est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.*

Propriété 5. *On considère quatre points A, B, C et D non coplanaires de l'espace et on note H le projeté orthogonal du point B sur le plan (ACD), alors* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\mathrm{Det}(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\pm HB\times\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\|$.



Démonstration. Exigible. □

Exercice 5. *On considère une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ de l'espace, calculer* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

Propriété 6. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$, alors :*

$$\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=x\begin{vmatrix}y'&y''\\z'&z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x'&x''\\z'&z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}=(xy'z''+yz'x''+zx'y'')-(zy'x''+xz'y''+yx'z'')}$$

On note :

$$\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}}$$

Démonstration. Exigible. □

Propriété 7. Antisymétrie du déterminant *On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace, alors :*

$$\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})=-\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\ ;\ \mathrm{Det}(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})=-\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\ ;\ \mathrm{Det}(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=-\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$$

Propriété 8. *Exigible - On utilise l'antisymétrie du produit vectoriel et la propriété 6.*

Exercice 6. *Montrer que* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Propriété 9. Trilinéarité du déterminant

On considère quatre vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace et deux nombres réels λ et μ, alors :

$$\boxed{\mathrm{Det}(\lambda\overrightarrow{u_1}+\mu\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=\lambda\mathrm{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})+\mu\mathrm{Det}(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$$

Démonstration. Exigible - On utilise la définition du déterminant et la propriété d'antisymétrie. □

3 Droites, plans et sphères de l'espace

3.1 Plans

Propriété 10. Équation cartésienne d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y; z)$ des points d'un plan $\mathcal{P}$ vérifient une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *du plan $\mathcal{P}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est un plan.

Démonstration. Exigible - On utilise le déterminant. □

Exercice 7. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points $A(2; 1; 1)$, $B(3; 2; 2)$ et $C(1; -1; -3)$.*

Propriété 11. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un* **vecteur normal** *au plan $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 12. *Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normé ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$), l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est appelée* **équation normale** *du plan $\mathcal{P}$.*

Exercice 8. *Refaire l'exercice 7 en utilisant le produit vectoriel.*

Exercice 9. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1; 3; 2)$ et parallèle au plan d'équation $3x - 2y + 5z = 4$.*

Propriété 12. Paramétrage d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère un plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \\ z_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$ pour vecteurs directeurs ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires). Alors le point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ et $t_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & x_A & + & t_1 \; x_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; x_{\overrightarrow{v}} \\ y & = & y_A & + & t_1 \; y_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; y_{\overrightarrow{v}} \\ z & = & z_A & + & t_1 \; z_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; z_{\overrightarrow{v}} \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *du plan $\mathcal{P}$.*

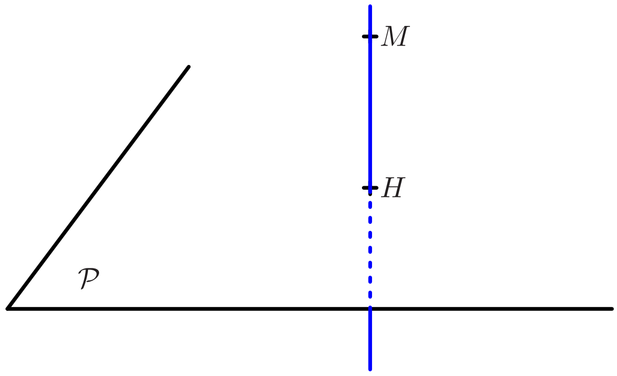
Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage du plan passant par les points $A(1; 2; 3)$,$B(-1; 2; 1)$ et $C(5; 4; 3)$.*

Propriété 13. Distance d'un point à un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Alors la distance d'un point $M(x_M;y_M;z_M)$ au plan $\mathcal{P}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



Démonstration. Exigible - On introduit le projeté orthogonal H du point M sur le plan $\mathcal{P}$ et on calcule $|\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}|$. □

Exercice 11. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(1;1;1)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x-4y+5z+9=0$ ainsi que les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur le plan $\mathcal{P}$.*

3.2 Droites

Propriété 14. Paramétrage d'une droite

On considère une droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x;y;z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x_A & + & t \; x_{\overrightarrow{u}} \\ y & = & y_A & + & t \; y_{\overrightarrow{u}} \\ z & = & z_A & + & t \; z_{\overrightarrow{u}} \end{array}\right.$$

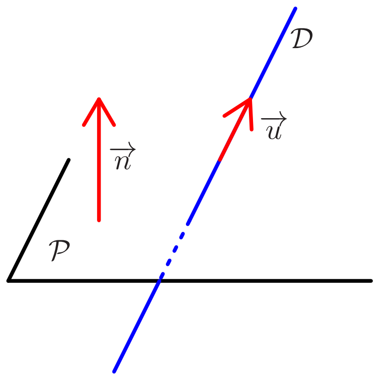
Cette écriture est appelée un **paramétrage** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 12. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1;2;3)$ et $B(3;2;1)$.*

Propriété 15. **Intersection d'une droite et d'un plan**

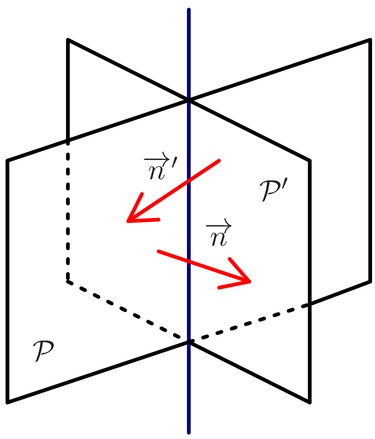
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur et un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal. Alors l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :
- *l'ensemble vide ou la droite $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$.*
- *un point si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$.*



Démonstration. Exigible - On utilise un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ et une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$. □

Propriété 16. **Intersection de deux plans**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal et un plan $\mathcal{P}'$ admettant $\overrightarrow{n}'$ pour vecteur normal. Alors :
- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus.*
- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ pour vecteur directeur.*



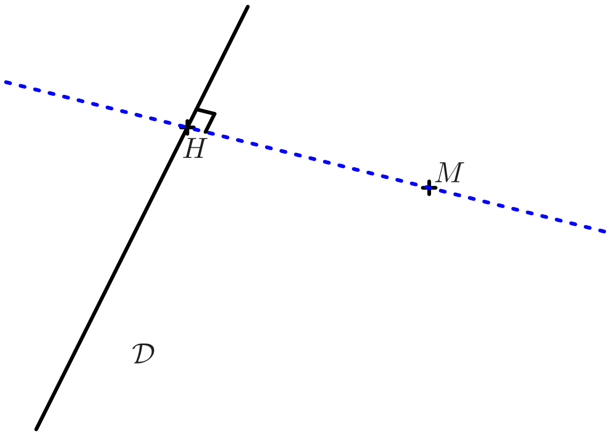
Démonstration. Exigible - On part d'un système de deux équations en x, y et z puis on exprime x, y et z en fonction de x dans le cas où $bc' - b'c \neq 0$. □

Exercice 13. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : 2x + 3y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + y + z = 2$.*

Propriété 17. Distance d'un point à une droite

Dans l'espace, on considère une droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur. Alors la distance d'un point M à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M,\mathcal{D}) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}}$$

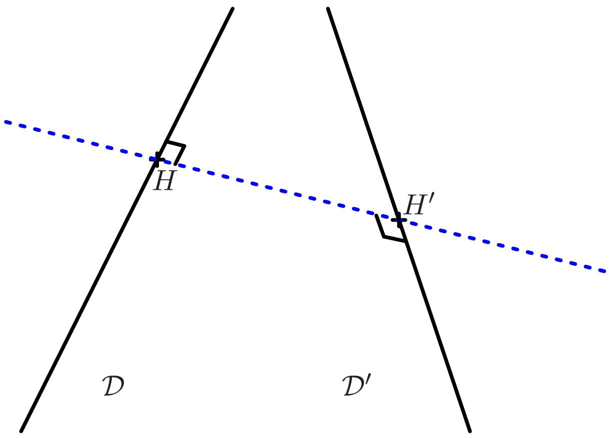


Démonstration. Exigible - On introduit le projeté orthogonal H du point M sur la droite $\mathcal{D}$. □

Exercice 14. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(1;1;1)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1;6;3)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur ainsi que les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite $\mathcal{D}$.*

Propriété 18. Perpendiculaire commune à deux droites

On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de l'espace non parallèles, alors il existe une unique droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et elle admet $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$ pour vecteur directeur avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ des vecteurs directeurs respectifs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



Démonstration. Exigible - On considère l'intersection des plans $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}')$ et $(A', \overrightarrow{u}', \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}')$ non parallèles ou confondus car $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}') = ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'||^2 \neq 0$. □

Remarque 13. *Ne pas confondre* **droites orthogonales** *et* **droites perpendiculaires**.

Exercice 15. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;1)$ et $D(0;1;0)$. Déterminer un paramétrage des droites (AB) et (CD), en déduire les points d'intersection des droites (AB) et (CD) avec leur perpendiculaire commune.*

Propriété 19. Distance de deux droites

On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de l'espace non parallèles passant respectivement par les points A et A' et admettant respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$. Alors la distance des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathcal{D},\mathcal{D}') = \frac{|\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}')|}{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'||} = \frac{|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}')|}{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'||}}$$

Démonstration. Exigible - On introduit les points H et H' intersections respectives des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ avec leur perpendiculaire commune. □

Exercice 16. *Calculer la distance des droites (AB) et (CD) de l'exercice 15.*

Exercice 17. *Déterminer une formule permettant de calculer la distance de deux droites parallèles de l'espace.*

3.3 Sphères

Propriété 20. Équation cartésienne d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y;z)$ des points d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega;z_\Omega)$ et de rayon R vérifient une équation de la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *de la sphère $\mathcal{S}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant une équation de la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$ avec x_ω, y_ω, z_ω et R des nombres réels et $R\geqslant 0$ est une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega;z_\Omega)$ et de rayon R.

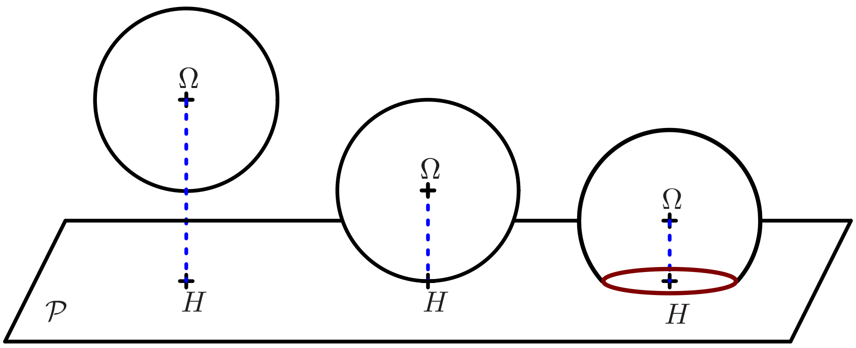
Démonstration. Exigible. □

Exercice 18. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ est l'équation d'une sphère dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

Propriété 21. Intersection d'un plan et d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ ainsi qu'une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon $R>0$. Alors :

- *Si $\mathrm{d}(\Omega,\mathcal{P})>R$, le plan $\mathcal{P}$ et la sphère $\mathcal{S}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega,\mathcal{P})=R$, le plan $\mathcal{P}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont un unique point d'intersection qui est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$ et le plan $\mathcal{P}$ est dit tangent en ce point à la sphère $\mathcal{S}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega,\mathcal{P})<R$, l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ est un cercle.*

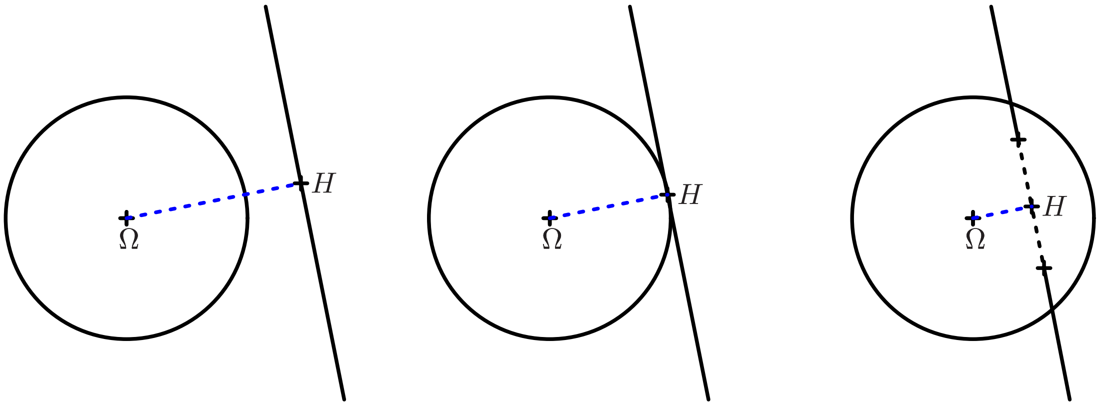


Démonstration. Exigible - On montre que $HM^2=R^2-\mathrm{d}(\Omega,\mathcal{P})^2$ avec M un point de $\mathcal{P}\cap\mathcal{S}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur le plan $\mathcal{P}$. □

Exercice 19. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 6$ et la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(0; -1; -2)$ et de rayon 4. Déterminer le projeté orthogonal H du point Ω sur le plan $\mathcal{P}$ et en déduire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la sphère $\mathcal{S}$.*

Propriété 22. Intersection d'une droite et d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ ainsi qu'une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont un unique point d'intersection qui est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ et la droite $\mathcal{D}$ est dit tangente en ce point à la sphère $\mathcal{S}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont deux points d'intersection.*



Démonstration. Exigible - On montre que $HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D})^2$ avec M un point de $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur la droite $\mathcal{D}$. □

Propriété 23. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B. Alors le point M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*

Démonstration. Exigible - On montre que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{1}{4}AB^2$ avec I milieu de $[AB]$. □

4 Isométries de l'espace

Définition 8. *On appelle* **isométrie** *de l'espace, une transformation de l'espace qui conserve les distances.*

Remarque 14. *Les translations de l'espace sont des isométries.*

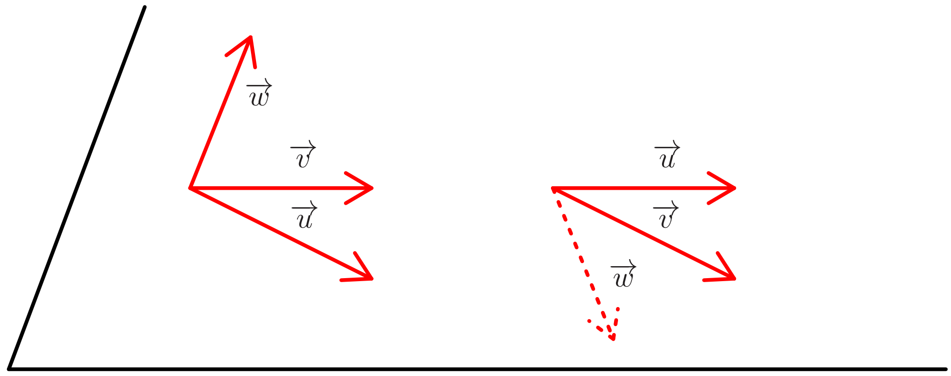
Propriété 24. *La composée de deux isométries de l'espace est une isométrie.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 25. *Une isométrie de l'espace conserve les angles géométriques d'où l'alignement, la coplanarité, l'orthogonalité et le parallélisme.*

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème d'Al-Kashi. □

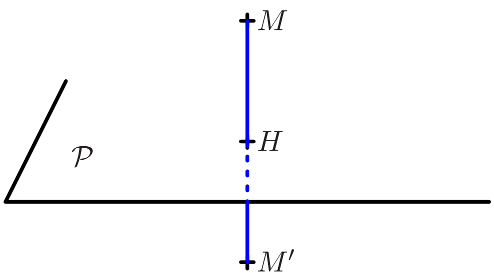
Remarque 15. *On ne peut pas définir la notion d'angle orienté* $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ *de deux vecteurs non nuls dans l'espace mais on peut en revanche définir la notion d'orientation d'un triplet de vecteurs non coplanaires* $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$.



Définition 9. *Une isométrie qui conserve l'orientation est appelée une* **isométrie directe** *ou un* **déplacement**, *une isométrie qui change l'orientation est appelée une* **isométrie indirecte** *ou un* **antidéplacement**.

Remarque 16. *Une translation de l'espace est un déplacement.*

Définition 10. *On appelle* **réflexion par rapport au plan** $\mathcal{P}$ *la transformation qui à tout point* M *de l'espace associe le point* M' *tel que le projeté orthogonal du point* M *sur la plan* $\mathcal{P}$ *soit le milieu du segment* $[MM']$.

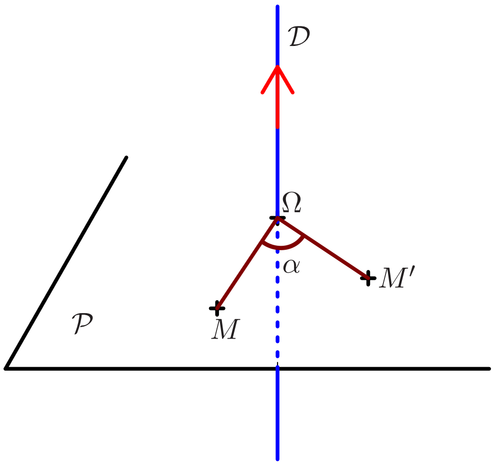


Remarque 17. *Une réflexion de l'espace est un antidéplacement.*

Exercice 20. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'image du point* $M(1;2;-2)$ *par la réflexion par rapport au plan* $\mathcal{P} : x-2y+3z=5$.

Définition 11. *On appelle* **rotation d'axe orienté** $\mathcal{D}$ *et d'***angle** α *la transformation qui à tout point* M *de l'espace orienté associe le point* M' *tel que :*

- M' *appartient au plan* $\mathcal{P}$ *perpendiculaire à la droite* $\mathcal{D}$ *passant par le point* M*.*
- *dans le plan* $\mathcal{P}$ *muni de l'orientation induite par celle de la droite* $\mathcal{D}$*, le point* M' *est l'image du point* M *par la rotation plane d'angle* α *et de centre* Ω *intersection du plan* $\mathcal{P}$ *et de la droite* $\mathcal{D}$*.*



Remarque 18. *Une rotation de l'espace est un déplacement.*

Exercice 21. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points* $A(-2;2;7)$*,* $B(4;2;-1)$ *et* $M(-3;1;0)$*. Déterminer le projeté orthogonal* H *du point* M *sur la droite* (AB)*, en déduire à l'aide du produit vectoriel l'image du point* M *par le quart de tour direct d'axe* $(A,\overrightarrow{AB})$*.*