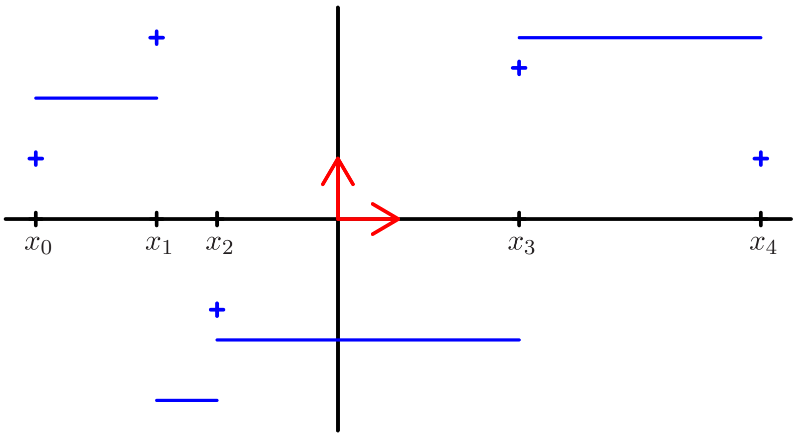
XIV. Intégration

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1. *On dit qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})$ avec $a \neq b$ est une* **fonction en escalier** *sur $[a;b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et φ constante sur $]x_k; x_{k+1}[$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.*
La famille $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est appelée une **subdivision** *adaptée à la fonction φ, on note $\mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$.*



Remarque 1. *Une fonction en escalier n'est pas nécessairement continue à gauche ou à droite en x_k.*

Exercice 1. *Montrer que la fonction partie entière est une fonction en escalier sur l'intervalle $[-2;2]$.*

Propriété 1. *$\mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})$.*

Démonstration. Exigible - On construit une subdivision adaptée aux deux fonctions considérées. □

Définition 2. *On considère $\varphi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ avec $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de φ et $\varphi(x) = y_k$ pour tout $x \in]x_k; x_{k+1}[$.*

On appelle **intégrale** *de la fonction φ sur l'intervalle $[a;b]$, $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi = \sum_{k=0}^{k=n-1} (x_{k+1} - x_k) y_k$.*

Remarque 2. *L'intégrale d'une fonction en escalier correspond à la somme des aires algébriques des « marches ».*

Remarque 3. *L'intégrale d'une fonction en escalier est indépendante de la subdivision considérée.*

Propriété 2. **Croissance de l'intégrale**
On considère $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$, si $\varphi \leqslant \psi$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} \psi$.

Démonstration. Exigible - On considère une subdivision adaptée à φ et ψ. □

Remarque 4. *On en déduit que l'intégrale d'une fonction en escalier positive est positive.*

Propriété 3. Inégalité triangulaire
On considère $\varphi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$*, alors* $\left|\int_{[a;b]} \varphi\right| \leqslant \int_{[a;b]} |\varphi|$.

Démonstration. Exigible - On remarque que $\varphi \leqslant |\varphi|$. □

Propriété 4. Linéarité de l'intégrale
On considère $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, alors* $\int_{[a;b]} \lambda\varphi + \mu\psi = \lambda \int_{[a;b]} \varphi + \mu \int_{[a;b]} \psi$.

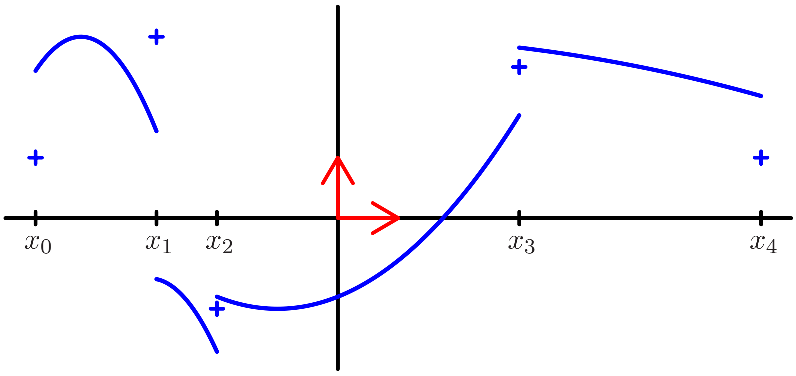
Démonstration. Exigible - On considère une subdivision adaptée à φ et ψ. □

Propriété 5. Relation de Chasles
On considère $\varphi \in \mathcal{E}([a;c],\mathbb{R})$ *et* $b \in]a;c[$*, alors* φ *est en escalier sur* $[a;b]$ *et* $[b;c]$ *et* $\int_{[a;c]} \varphi = \int_{[a;b]} \varphi + \int_{[b;c]} \varphi$.

Démonstration. Exigible - On construit une subdivision adaptée. □

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 3. *On dit qu'une fonction* $f \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})$ *avec* $a \neq b$ *est une* **fonction continue par morceaux** *sur* $[a;b]$ *s'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et des réels* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *tels que* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *et* f *continue sur* $]x_k; x_{k+1}[$ *et prolongeable par continuité à droite en* x_k *et à gauche en* x_{k+1} *pour tout* $k \in [\![0; n-1]\!]$.
La famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ *est appelée une* **subdivision** *adaptée à la fonction* f*, on note* $\mathcal{C}_m([a;b],\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur* $[a;b]$.



Exercice 2. *Représenter graphiquement la fonction* $f : \begin{array}{rcl} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x+1 & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ x^2-1 & si \quad x>0 \end{cases} \end{array}$ *et montrer qu'elle est continue par morceaux.*

Propriété 6. $\mathcal{C}_m([a;b],\mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})$.

Démonstration. Exigible - On construit une subdivision adaptée aux deux fonctions considérées. □

Propriété 7. *On considère* $f \in \mathcal{C}_m([a;b],\mathbb{R})$ *alors pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ *telles que* $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ *et* $\psi - \varphi \leqslant \epsilon$ *sur* $[a;b]$.

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 3. *On considère la fonction* f *de l'exercice 2, déterminer deux fonctions* φ *et* ψ *vérifiant les conditions de la propriété 7 pour* $\epsilon = 1$.

Propriété 8. *On considère une fonction* $f \in \mathcal{C}_m([a;b],\mathbb{R})$ *alors* $\left\{\int_{[a;b]} \varphi \ / \ \varphi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leqslant f\right\}$ *et* $\left\{\int_{[a;b]} \psi \ / \ \psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R}) \text{ et } f \leqslant \psi\right\}$ *admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure égales, on appelle ce nombre* **intégrale** *de la fonction* f *sur l'intervalle* $[a;b]$ *notée* $\int_{[a;b]} f$.

Démonstration. Hors-programme - On utilise le fait que f est bornée. □

On admet que l'**intégrale d'une fonction continue par morceaux** est également **croissante** et **linéaire** et qu'elle vérifie l'**inégalité triangulaire** ainsi que la **relation de Chasles**.

Propriété 9. Inégalité de la moyenne
On considère $f, g \in \mathcal{C}_m([a;b],\mathbb{R})$ *alors* $\boxed{\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant (b-a) \sup_{[a;b]}|f|}$ *et* $\boxed{\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leqslant \sup_{[a;b]}|f| \int_{[a;b]} |g|}$.

Démonstration. Exigible - On utilise l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale. □

Définition 4. *On appelle* **valeur moyenne** *d'une fonction* $f \in \mathcal{C}_m([a;b],\mathbb{R})$ *le nombre réel* $\frac{1}{b-a}\int_{[a;b]} f$.

Exercice 4. *Montrer que* $\frac{1}{b-a}\int_{[a;b]} f \in [\inf_{[a;b]} f; \sup_{[a;b]} f]$.

Exercice 5. *Déterminer la valeur moyenne de la fonction carré sur l'intervalle* $[0;1]$.

Propriété 10. *Une fonction* $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ *positive est nulle si et seulement si son intégrale sur l'intervalle* $[a;b]$ *est nulle.*

Démonstration. Exigible - On procède par l'absurde en montrant par continuité de f que si $f(c) \neq 0$ alors il existe un intervalle $]c-\delta; c+\delta[$ sur lequel $f \geqslant \frac{1}{2}f(c)$. □

Contre-exemple 1. *Donner un exemple de fonction continue par morceaux positive non nulle dont l'intégrale est nulle.*

On peut également définir la notion de fonction à valeurs complexes continue par morceaux, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes ne se définit plus en termes d'aires mais par la formule $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mathcal{R}ef + i\int_{[a;b]} \mathcal{I}mf$, elle vérifie la propriété de linéarité ainsi que la relation de Chasles.

Exercice 6. *On considère une fonction* $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$ *et on pose* $g = \mathcal{R}ef \int_I \mathcal{R}ef + \mathcal{I}mf \int_I \mathcal{I}mf$.

1. *Montrer que* $\int_I g = \left|\int_I f\right|^2$
2. *Montrer que* $g \leqslant \left|\int_I f\right| |f|$. *(on pourra utiliser l'inégalité* $\mathcal{R}e(z) \leqslant |z|$ *pour* $z \in \mathbb{C}$*)*
3. *En déduire que* $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

Exercice 7. *Montrer que l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes vérifie l'inégalité de la moyenne.*

3 Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition 5. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, une fonction $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $F' = f$ est appelée une* **primitive** *de la fonction f sur l'intervalle I.*

Exercice 8. *Montrer que la fonction* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \neq 0 \end{cases} \end{array}$ *n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 11. *Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ alors il existe un réel k tel que $F_2 = F_1 + k$.*

Démonstration. Exigible - On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction $F_2 - F_1$. □

Définition 6. *On considère $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ alors pour tous $a, b \in I$ on note :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & si \quad a = b \\ \displaystyle\int_{[a;b]} f & si \quad a < b \\ \displaystyle -\int_{[b;a]} f & si \quad a > b \end{cases}$$

Remarque 5. $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Propriété 12. Relation de Chasles

On considère $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ alors pour tous $a, b, c \in I$ on a $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t}$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 6. *La croissance de l'intégrale n'est plus vérifiée lorsque les bornes ne sont pas dans le bon ordre.*

Théorème 1. **Théorème fondamental de l'analyse**
On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $x_0, a, b \in I$:
- *La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I s'annulant en x_0.*
- *Si F est une primitive de f sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$.*

Démonstration. Exigible - On utilise le taux d'accroissement et l'inégalité de la moyenne. □

Exercice 9. *Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction inverse ainsi que les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.*

Corollaire 1. *Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors* $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 13. **Intégration par parties**

Si $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ *et* $a, b \in I$ *alors* $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 10. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \ \mathrm{d}t.$

Exercice 11. *Déterminer une primitive de la fonction* $x \mapsto xe^x$ *sur* $\mathbb{R}$.

Propriété 14. **Changement de variable**

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ *et* $\begin{matrix} a, b \in J \\ \varphi(a), \varphi(b) \in I \end{matrix}$ *alors* $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$

Démonstration. Exigible - On considère la fonction $F \circ \varphi$ où F est une primitive de f. □

Remarque 7. *En pratique, on note* $x = \varphi(t)$ *et* $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 12. *Calculer* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x$ *puis interpréter graphiquement. (on pourra utiliser le changement de variable* $x = \cos t$*)*

Exercice 13. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (\sin t)^3 \ \mathrm{d}t$*. (on pourra utiliser le changement de variable* $x = \cos t$*)*

Corollaire 2. *On considère* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$ *:*

- *si* f *est impaire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0.$
- *si* f *est paire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$
- *si* f *est* T*-périodique alors* $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos t)^3 \ \mathrm{d}t$*. (on pourra utiliser le changement de variable* $t = \pi - x$*)*

Exercice 15. *On considère* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T*-périodique avec* $a \in \mathbb{R}$*, montrer que* $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$ *(on pourra utiliser la relation de Chasles)*

4 Développements limités

4.1 Formules de Taylor

Propriété 15. **Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral**

On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ *et* $a, b \in I$ *alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \mathrm{d}t$$

Démonstration. Exigible - On procède par récurrence et on utilise une intégration par parties. □

Corollaire 3. **Inégalité de Taylor-Lagrange**
On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\overleftrightarrow{[a;b]}} |f^{(n+1)}|$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 16. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$.

Corollaire 4. **Formule de Taylor-Young**
On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$ alors :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 17. *Étudier la limite en zéro de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

En fait, on peut énoncer une version plus forte de la propriété :

Propriété 16. **Formule de Taylor-Young**
On considère $f \in \mathcal{C}^{n}(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$ alors :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Exigible - Pour l'hérédité, on applique la formule à la fonction f' puis on intègre. □

Propriété 17. **Développements limités usuels**

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\mathrm{ch} x &\underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\mathrm{sh} x &\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

Démonstration. Exigible. □

4.2 Opérations sur les développements limités

Définition 7. *On dit qu'une fonction f à valeurs réelles définie au voisinage de a admet un* **développement limité** *d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a si $f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.*

Propriété 18. *Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en a alors celui-ci est unique.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $c_0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, $c_1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-c_0}{x-a} \ldots$ □

Exercice 18. *Déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.*

On peut additionner et multiplier les développements limités :

Exercice 19. *Calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto \cos x + \sin x$ et $x \mapsto e^x \sin x$.*

On peut déterminer le développement limité d'une composée :

Exercice 20. *Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto e^{\sin x}$ et $x \mapsto e^{\cos x}$.*

On peut déterminer le développement limité d'un inverse ou d'un quotient en utilisant le développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ en 0 :

Exercice 21. *Déterminer le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$, en déduire le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.*

Propriété 19. Développement limité d'une primitive
On considère une fonction f définie sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I telle que $f(x) \underset{a}{=} o((x-a)^n)$ avec $a \in I$ alors $F(x) \underset{a}{=} F(a) + o((x-a)^{n+1})$.

Démonstration. Non exigible - On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction F. □

Exercice 22. *Déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.*

Contre-exemple 2. *On considère la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ x^3 \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases} \end{array}$.

1. *Montrer que $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$.*
2. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que $f'(x) \underset{0}{\neq} o(x)$.*

Si f est dérivable et admet un développement limité d'ordre n en a on ne peut donc pas affirmer que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, en revanche si on sait que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a alors on peut l'obtenir par dérivation du développement limité d'ordre n de f en a d'après la propriété 19.