X. Limites

1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Définition 1. *Une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ fait correspondre à tout $x \in I$ un unique réel $f(x)$ appelé* **image** *de x par la fonction f.*
On note $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

L'ensemble $f(I) = \{f(x) \ / \ x \in I\}$ étant une partie de $\mathbb{R}$, on peut définir la notion de fonction majorée, minorée et bornée.

Définition 2. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est dite :*
- **majorée** *sur I s'il existe un nombre réel M tel que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leqslant M$.*
- **minorée** *sur I s'il existe un nombre réel m tel que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geqslant m$.*
- **bornée** *sur I si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exercice 1. *Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Définition 3. *Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on appelle :*
- **borne supérieure** *de la fonction f sur I, $\sup\limits_{x\in I} f(x) = \sup\limits_{I} f = \begin{cases} \sup(\{f(x) \ / \ x \in I\}) \text{ si } f \text{ est majorée} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$.*
- **borne inférieure** *de la fonction f sur I, $\inf\limits_{x\in I} f(x) = \inf\limits_{I} f = \begin{cases} \inf(\{f(x) \ / \ x \in I\}) \text{ si } f \text{ est minorée} \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$.*

Exercice 2. *Déterminer les bornes inférieures et supérieures sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Définition 4. *Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$, on dit que :*
- *f admet un* **maximum** *sur I en a si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in I$ et on note $\max\limits_{x\in I} f(x) = \max\limits_{I} f = f(a)$.*
- *f admet un* **minimum** *sur I en a si $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in I$ et on note $\min\limits_{x\in I} f(x) = \min\limits_{I} f = f(a)$.*

On dit que f admet un **extremum** *sur I en a si f admet un maximum ou un minimum sur I en a.*

Remarque 1. *Si une fonction f admet un maximum sur I en a alors ce maximum est la borne supérieure de f sur I.*

Exercice 3. *Déterminer s'ils existent les extrema sur R_+, R_- et $[-3;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Définition 5. Opérations sur les fonctions
Étant données deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ ainsi qu'un nombre réel λ, on note :
- *$f+g$ la fonction définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in I$.*
- *λf la fonction définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in I$.*
- *$f \times g$ la fonction définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in I$.*

Remarque 2. *On peut étendre la définition à la différence et au quotient si la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur I.*

Exercice 4. *Montrer que le produit de deux fonctions bornées sur I est une fonction bornée sur I.*

Définition 6. *Étant données deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on note $f \leqslant g$ si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leqslant g(x)$.*

Définition 7. *Étant données deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on note :*
- *$|f|$ la fonction définie par $|f|(x) = |f(x)|$ pour tout $x \in I$.*
- *$\sup(f, g)$ la fonction définie par $\sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$ pour tout $x \in I$.*
- *$\inf(f, g)$ la fonction définie par $\inf(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$ pour tout $x \in I$.*

Exercice 5. *On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2 - x$ et $g(x) = 3 - 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement les fonctions f, g, $|f|$, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$.*

Définition 8. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite :*
- **constante** *sur I si pour tous $x, y \in I$ on a $f(x) = f(y)$.*
- **croissante** *(strictement croissante) sur I si pour tous $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$ on a $f(x) \leqslant f(y)$ (avec $x < y$ on a $f(x) < f(y)$).*
- **décroissante** *(strictement décroissante) sur I si pour tous $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$ on a $f(x) \geqslant f(y)$ (avec $x < y$ on a $f(x) > f(y)$).*
- **monotone** *sur I si elle est croissante ou décroissante sur I .*

Exercice 6. *Étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 7. *Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante. Le produit de deux fonctions croissantes est-il une fonction croissante ?*

Propriété 1. *On considère deux fonctions $f \in \mathcal{F}(I, J)$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ alors :*
- *si f est croissante sur I et g est croissante sur J ou si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J alors $g \circ f$ est croissante sur I.*
- *si f est croissante sur I et g est décroissante sur J ou si f est décroissante sur I et g est croissante sur J alors $g \circ f$ est décroissante sur I.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 8. *Étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Définition 9. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ avec I symétrique par rapport à 0 est dite :*
- **paire** *si pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = f(x)$.*
- **impaire** *si pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = -f(x)$.*

Exemple 1. *La fonction carré est paire et la fonction cube impaire.*

Définition 10. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dite* **périodique** *s'il existe un réel T appelé* **période** *de la fonction f si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x + T) = f(x)$.*

Exemple 2. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.*

Exercice 9. *Montrer que la somme de deux fonctions T-périodiques est une fonction T-périodique.*

2 Limite d'une fonction

Définition 11. *On dit qu'un fonction de variable réelle à valeur réelles est définie au* **voisinage** *de $a \in \mathbb{R}$ si il existe un réel $\delta > 0$ tel que f soit définie sur $]a; a+\delta[$, sur $]a-\delta; a[$ ou sur $]a-\delta, a+\delta[$.*

Exercice 10. *Montrer que la fonction $\ln$ est définie au voisinage de 1 et au voisinage de 0.*

Définition 12. *On dit qu'une fonction de variable réelle à valeur réelles est définie au voisinage de $+\infty$ si il existe un réel M tel que f soit définie sur $]M; +\infty[$ et on dit que f est définie au voisinage de $-\infty$ si il existe un réel M tel que f soit définie sur $]-\infty; M[$*

Exercice 11. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2-3)$ est définie au voisinage de $+\infty$.*

Définition 13. Limite finie en une valeur finie
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on dit que :
- *f admet une* **limite** *$l \in \mathbb{R}$ en a si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ si $x \in I$ et $|x-a| \leqslant \delta$, on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.*
- *f admet une* **limite** *$l \in \mathbb{R}$* **à gauche** *en a si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ si $x \in I$, $|x-a| \leqslant \delta$ et $x < a$ et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = l$.*
- *f admet une* **limite** *$l \in \mathbb{R}$* **à droite** *en a si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ si $x \in I$, $|x-a| \leqslant \delta$ et $x > a$ et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = l$.*

Propriété 2. *Si une fonction admet une limite finie alors celle-ci est nécessairement unique.*

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{|l_2 - l_1|}{3}$ et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. □

Remarque 3. *Si f admet une limite l en a elle admet* a fortiori *une limite l à gauche en a et une limite l à droite en a.*

Contre-exemple 1. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$ *admet une limite à gauche et à droite en 0 mais n'admet pas de limite en 0.*

Remarque 4. *Une fonction f tend vers l en a si et seulement si la fonction $f - l$ tend vers 0 en a.*

Propriété 3. *Si une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ admet une limite en $a \in I$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Démonstration. Exigible - On montre que $|f(a) - l| \leqslant \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. □

Exercice 12. *Montrer que la fonction partie entière n'admet pas de limite en 0 mais qu'elle admet une limite à gauche et une limite à droite en 0.*

Propriété 4. *Montrer qu'une fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 13. *Montrer que toute fonction admettant une limite finie strictement positive en a est minorée par un nombre strictement positif au voisinage de a.*

Définition 14. Limite infinie en une valeur finie
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on dit que :
- *f tend vers $+\infty$ en a si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant M$ si $x \in I$ et $|x-a| \leqslant \delta$, on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.*
- *f tend vers $-\infty$ en a si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant M$ si $x \in I$ et $|x-a| \leqslant \delta$, on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.*

Remarque 5. *On peut également définir les limites infinies à gauche ou a droite de a.*

Remarque 6. *Une fonction f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si la fonction $-f$ tend vers $-\infty$ en a.*

Exercice 14. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ en 0 à droite et à gauche.*

Définition 15. Limite finie en l'infini
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que :
- *f tend vers l en $+\infty$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ si $x \in I$ et $x \geqslant M$, on note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.*
- *f tend vers l en $-\infty$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ si $x \in I$ et $x \leqslant M$, on note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.*

Définition 16. Limite infinie en l'infini
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que :
- *f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant M$ si $x \in I$ et $x \geqslant N$, on note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*
- *f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant M$ si $x \in I$ et $x \geqslant N$, on note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.*

Exercice 15. *Donner la définition d'une fonction f tendant vers $-\infty$ en $-\infty$.*

3 Opérations sur les limites, comparaison des limites

Propriété 5. Limites et opérations
On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, alors :
- *la fonction $f + g$ admet $l_1 + l_2$ pour limite en a.*
- *la fonction $f \times g$ admet $l_1 \times l_2$ pour limite en a.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $|[f(x)+g(x)] - [l_1 + l_2]| \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2|$ et $|f(x)g(x) - l_1 l_2| \leqslant |[f(x) - l_1]g(x)| + |l_1[g(x) - l_2]|$. □

Remarque 7. *On peut étendre la propriété à la différence et au quotient si la fonction au dénominateur ne s'annule pas et si sa limite est non nulle.*

On admet que comme pour les suites, on peut démontrer les autres propriétés des opérations sur les limites.

Exercice 16. *Résumer dans des tableaux les propriétés des opérations sur les limites.*

Propriété 6. Composition de limites
On considère deux fonctions $f \in \mathcal{F}(I, J)$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l \in \mathbb{R}$ alors la fonction $g \circ f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ admet l pour limite en a.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 17. *Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ en 0.*

Propriété 7. Image d'une suite par une fonction
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et admettant une limite en a ainsi qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I qui converge vers a alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 18. *Montrer que la fonction* $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de limite en* 0.

Propriété 8. Comparaison de limites
On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *définies au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ *telles que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, *si* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in I$ *alors* $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{l_1 - l_2}{3}$ et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. □

Exercice 19. *La propriété est-elle encore vérifiée si on remplace les inégalités par des inégalités strictes ?*

4 Théorèmes d'existence de limites

Théorème 1. Théorème d'encadrement
On considère trois fonctions $f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *définies au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$, *alors :*

- *si* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *pour tout* $x \in I$ *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.
- *si* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in I$ *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- *si* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in I$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 20. *Déterminer la limite en* $+\infty$ *de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

Théorème 2. Théorème de la limite monotone
On considère une fonction f *à valeurs réelles* croissante *définie au voisinage de* $+\infty$, *alors :*

- *si la fonction* f *n'est pas majorée on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sup\limits_I f = +\infty$.
- *si la fonction* f *est majorée on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sup\limits_I f = l \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Hors-programme. □

Remarque 8. *Ce théorème peut s'étendre aux fonctions décroissantes et à des limites en* $-\infty$ *ou en* $a \in \mathbb{R}$.

5 Continuité d'une fonction

Définition 17. *Une fonction* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *admettant une limite finie en* $a \in I$ *est dite* **continue** *en* a, *on a alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. *Une fonction continue en tout point de* I *est dite continue sur* I, *on note* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur* I.

Remarque 9. *Une fonction dont la représentation graphique peut se tracer sans lever le crayon est continue.*

Exemple 3. *On admet que les fonctions usuelles (fonctions puissances, exponentielles, logarithmes, circulaires) sont continues sur leurs intervalles de définition.*

Exercice 21. *Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles continues sur* $\mathbb{R}$ *?*

Définition 18. *Une fonction* f *à valeurs réelles définie au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ *mais pas en* a *et admettant des limites finies à gauche et à droite en* a *égales peut se prolonger en une fonction* $\tilde{f}$ *continue en* a *appelée* **prolongement par continuité** *de la fonction* f *définie par* $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \neq a \end{cases}$.

Exercice 22. *Montrer que la fonction* $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ *peut se prolonger par continuité sur* $\mathbb{R}$.

Propriété 9. Continuité et opérations
On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*, alors les fonctions* $f+g$ *et* $f \times g$ *sont continues sur* I.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 10. *On peut étendre la propriété à la différence et au quotient si la fonction au dénominateur ne s'annule pas.*

Propriété 10. Composition de fonctions continues
On considère deux fonctions $f \in \mathcal{C}(I, J)$ *et* $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$*, alors la fonction* $g \circ f$ *est continue sur* I.

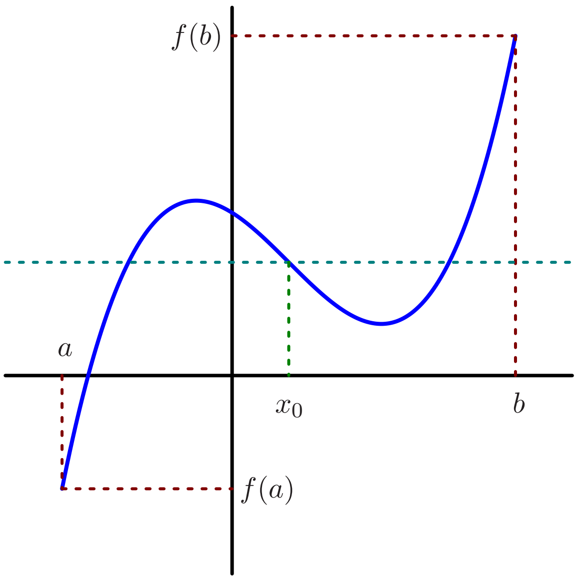
Démonstration. Exigible. □

Propriété 11. *On considère deux fonctions* $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*, alors les fonctions* $|f|$, $\sup(f, g)$ *et* $\inf(f, g)$ *sont continues sur* I.

Démonstration. Exigible - On remarque que $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$. □

6 Propriétés des fonctions continues

Théorème 3. Théorème des valeurs intermédiaires
On considère une fonction f *à valeurs réelles* continue *sur* $[a, b]$*, alors pour tout réel* $y \in [f(a), f(b)]$ *il existe* $x_0 \in [a, b]$ *tel que* $f(x_0) = y$.



Démonstration. Hors-programme - On considère la borne supérieure de l'ensemble $\{x \in [a, b] / f(x) \leqslant y\}$. □

Remarque 11. *On en déduit qu'une fonction* f *à valeurs réelles* continue *sur* $[a, b]$ *telle que* $f(a)$ *et* $f(b)$ *soient de signes contraires s'annule au moins une fois sur l'intervalle* $[a, b]$.

Exercice 23. *Montrer que l'équation* $x^5 = 5(x-1)$ *admet une unique solution réelle et en donner un encadrement à l'unité.*

Propriété 12. *L'image directe d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle, l'image directe d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment.*

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 24. *Déterminer l'image directe de l'intervalle* $]-1; 2]$ *puis du segment* $[-1; 2]$ *par la fonction carré.*

Théorème 4. Théorème de la bijection
Une fonction à valeurs réelles continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I dans $f(I)$, son application réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de même sens de variation que f.

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 25. *Montrer que la fonction cosinus est bijective de $[-\pi; 0]$ dans $[-1; 1]$ et préciser son application réciproque.*

7 Relations de comparaison

Définition 19. *On considère deux fonctions à valeurs réelles f et g définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que :*

- *la fonction f est **dominée** par la fonction g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{=} O(g)$ s'il existe une fonction α définie sur $\mathcal{V}$ telle que $f = \alpha g$ avec α bornée sur $\mathcal{V}$.*
- *la fonction f est **négligeable** devant la fonction g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{=} o(g)$ s'il existe une fonction α définie sur $\mathcal{V}$ telle que $f = \alpha g$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha = 0$.*
- *la fonction f est **équivalente** à la fonction g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ s'il existe une fonction α définie sur $\mathcal{V}$ telle que $f = \alpha g$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha = 1$.*

Remarque 12. *Si la fonction g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$, ceci revient à dire que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur $\mathcal{V}$, tend vers 0 ou tend vers 1 en a.*

Remarque 13. *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$.*

Remarque 14. *$f \underset{a}{\sim} g$ équivaut à $f - g \underset{a}{=} o(g)$.*

Exemple 4. *$x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $x^2 \underset{0}{=} o(x)$.*

Exercice 26. *Que signifie pour une fonction f à valeurs réelles que $f \underset{a}{=} o(0)$, que $f \underset{a}{=} o(1)$ ou que $f \underset{a}{\sim} l$ avec $l \in \mathbb{R}$?*

Exercice 27. *Montrer que si $f \underset{a}{\sim} g$ alors les fonctions à valeurs réelles f et g ont même signe au voisinage de a.*

Propriété 13. *On considère trois fonctions f, g et h à valeurs réelles définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$:*

- *si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$. (symétrie)*
- *si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$. (transitivité)*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 14. Équivalent d'un produit et d'un quotient
On considère quatre fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 à valeurs réelles définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ si les fonctions f_2 et g_2 ne s'annulent pas sur $\mathcal{V}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 28. *Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$ en $+\infty$ en utilisant les équivalents.*

Exercice 29. *Peut-on étendre la propriété à la somme ou à la différence de deux fonctions ?*

Propriété 15. Comparaison des fonctions usuelles
On considère $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

- $(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ *et* $|\ln x|^\alpha \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$
- $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(a^x)$ *si* $a > 1$ *et* $a^x \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ *si* $a < 1$.

Démonstration. Exigible - On utilise les croissances comparées des fonctions usuelles (Chap II). □

8 Limite d'une fonction à valeurs complexes

Définition 20. *Une fonction f à valeurs complexes définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ fait correspondre à tout $x \in I$ un unique complexe $f(x)$ appelé* **image** *de x par la fonction f.*

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. *La fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ est une fonction à valeurs complexes, la représenter graphiquement au moyen d'une courbe paramétrée.*

Remarque 15. *Étant donnée une fonction f à valeurs complexes on peut définir les fonctions à valeurs réelles $\mathcal{R}e(f)$, $\mathcal{I}m(f)$ et $|f|$ et la fonction à valeurs complexes $\overline{f}$.*

Exercice 31. *Expliciter $\mathcal{R}e(f)$, $\mathcal{I}m(f)$ et $|f|$ pour $f : x \mapsto e^{ix}$.*

On peut définir la notion de fonction à valeurs complexe bornée.

Définition 21. *Une fonction f à valeurs complexes est dite bornée si la fonction à valeurs réelles $|f|$ est majorée.*

Exercice 32. *Interpréter graphiquement la notion de fonction à valeurs complexes bornée.*

On peut définir la notion de limite d'une fonction à valeurs complexes.

Définition 22. *Une fonction f à valeurs complexes définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ si la fonction à valeurs réelles $|f - l|$ tend vers 0 en a.*

Exercice 33. *Étudier la limite de la fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ en 0.*

Propriété 16. *Une fonction f à valeurs complexes définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ tendent respectivement vers $\mathcal{R}e(l)$ et $\mathcal{I}m(l)$ en a.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $|f - l| = \sqrt{[\mathcal{R}e(f) - \mathcal{R}e(l)]^2 + [\mathcal{I}m(f) - \mathcal{I}m(l)]^2}$. □

Exercice 34. *Étudier la limite de la fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ en 0.*

Corollaire 1. *Une fonction f à valeurs complexes définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ admettant une limite $l \in \mathbb{C}$ est bornée au voisinage de a.*

Démonstration. Exigible - On remarque que la fonction $|f|$ tend vers $|l|$ en a. □

On peut également effectuer des opérations sur les limites :

Propriété 17. *On considère deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2 \in \mathbb{C}$, alors :*

- *la fonction $f + g$ admet $l_1 + l_2$ pour limite en a.*
- *la fonction $f \times g$ admet $l_1 \times l_2$ pour limite en a.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $|[f(x) + g(x)] - [l_1 + l_2]| \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2|$ et $|f(x)g(x) - l_1 l_2| \leqslant |[f(x) - l_1]g(x)| + |l_1[g(x) - l_2]|$. □

On peut également définir l'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ des fonctions à valeurs complexes continues sur I.