XIII. Matrices

1 Opérations sur les matrices

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. *On appelle* **matrice** *à n lignes et p colonnes à coefficients réels ou complexes un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes de nombres réels ou complexes :*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} le coefficient de la matrice A situé sur la i-ième ligne et sur la j-ième colonne.

Une matrice comportant une seule ligne est appelée **matrice ligne***, une matrice comportant une seule colonne est appelée* **matrice colonne***, une matrice comportant le même nombre de lignes que de colonnes est appelée* **matrice carrée***.*

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 1. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, donner les coefficients a_{12} a_{22} et a_{23}.*

Propriété 1. *$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la loi interne $+$ et la loi externe $.$ définies par :*

$$(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \qquad \lambda.(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 2. *Calculer $2A - 3B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.*

Propriété 2. *$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie np.*

Démonstration. Exigible - On définit la *base canonique* $(E_{kl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. □

Exercice 3. *Décomposer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.*

Définition 2. *On définit le* **produit matriciel** *de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ par :*

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \times (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} = \left(\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$$

$$\begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Remarque 1. *le produit matriciel $A \times B$ n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.*

Exercice 4. *Calculer $A \times C$ et $C \times A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.*

Propriété 3. *Le produit matriciel est associatif, bilinéaire et admet un élément neutre :*

- *Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ on a $(AB)C = A(BC)$.*
- *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a $A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$.*
  Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$.
- *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a $I_n A = A I_p = A$ où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille n appelée* **matrice identité** *dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et dont les autres coefficients sont nuls.*

Démonstration. Exigible. $\square$

Définition 3. *On appelle* **transposée** *d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ la matrice ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.*

Remarque 2. *La transposition échange les lignes et les colonnes d'une matrice.*

Exercice 5. *On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, calculer ${}^tB$, $({}^tB)B$ et $B({}^tB)$.*

Propriété 4. *La transposition est linéaire et involutive :*

- *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$.*
- *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a ${}^t({}^tA) = A$.*

Démonstration. Exigible. $\square$

Propriété 5. *Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a $\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA}$.*

Démonstration. Exigible. $\square$

2 Matrices carrées

Définition 4. *On définit les* **puissances d'une matrice** *carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la récurrence :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} A^0 & = & I_n \\ A^{m+1} & = & A(A^m) \text{ , pour tout } m \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Exercice 6. *Calculer les puissances de la matrice* $N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 6. *On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ on a $A^{m_1}A^{m_2} = A^{m1+m2}$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 7. *On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a ${}^t(A^m) = ({}^tA)^m$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 7. *On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, développer $(A + I_n)^3$ et $(A + B)^3$.*

Propriété 8. **Formule du binôme**
On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $m \in \mathbb{N}$, alors :

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{k=m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} A^{m-k}B^k$$

Démonstration. Exigible - On montre d'abord que si $AB = BA$ alors $A^{m_1}B^{m_2} = B^{m_2}A^{m_1}$. □

Remarque 3. *Il ne faut pas oublier de vérifier que les matrices A et B commutent entre elles !*

Exercice 8. *Calculer les puissances de la matrice triangulaire supérieure $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la formule du binôme.*

Définition 5. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* **symétrique** *si ${}^tA = A$ et* **antisymétrique** *si ${}^tA = -A$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 9. *Donner des exemples de matrices symétriques puis antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

Propriété 9. $\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Démonstration. Exigible - On utilise les dimensions. □

Définition 6. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice carrée $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée* **inverse** *de la matrice A telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

Remarque 4. *L'inverse s'il existe est unique.*

Remarque 5. *La matrice identité est inversible et est son propre inverse.*

Exercice 10. *Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.*

Propriété 10. *On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $GA = I_n$ ou s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AD = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = G = D$.*

Démonstration. Exigible - On remarque que si A est inversible à gauche alors $\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ B & \mapsto & AB \end{array}$ est injective donc surjective et A admet un inverse à droite, puis on montre que ces deux inverses sont égaux ($G = GAD = D$). □

Propriété 11. *On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles et $m \in \mathbb{N}$, alors :*

- *${}^tA$ est inversible et $\boxed{({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$,*
- *A^m est inversible et $\boxed{(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m}$,*
- *AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.*

Démonstration. Exigible. □

3 Matrices et applications linéaires

Définition 7. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \dots, \overrightarrow{f_n})$. On appelle matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\ f = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ avec $f(\overrightarrow{e_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \overrightarrow{f_i}$ pour tout $j \in [\![1; p]\!]$.*

Remarque 6. *Les colonnes de la matrice de f sont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f.*

Remarque 7. *La matrice de l'application identité de E dans E où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est la matrice I_n.*

Exercice 11. *On considère l'application linéaire $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. Déterminer la matrice de ϕ de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_1[X]$ puis la matrice de ϕ de la base $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{C}' = (1, 1+X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.*

Remarque 8. *Dans le cas où f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$, on note $\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ f$ et on appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 12. *Déterminer la matrice de l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Propriété 12. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$ et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$, alors l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\ f \end{array}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 13. *Déterminer l'application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *munis de leur base canonique associée à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Propriété 13. *On considère une application linéaire* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *où* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* p *muni d'une base* $\mathcal{B}$ *et* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *muni d'une base* $\mathcal{C}$ *et on considère un vecteur* $\overrightarrow{u} \in E$ *de coordonnées* $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *ainsi que son image* $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}) \in F$ *de coordonnées* $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ *dans la base* $\mathcal{C}$*, alors en posant* $M = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\ f$, $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ *on a* $V = MU$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. *Interpréter matriciellement le système linéaire* $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array} \right.$.

Propriété 14. *On considère deux applications linéaires* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F, G)$ *où* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base* $\mathcal{B}$*,* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base* $\mathcal{C}$ *et* G *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base* $\mathcal{D}$ *alors* $\boxed{\underset{\mathcal{B},\mathcal{D}}{\mathcal{M}at}\ g \circ f = \underset{\mathcal{C},\mathcal{D}}{\mathcal{M}at}\ g \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\ f}$.

Démonstration. Exigible - On considère les colonnes de la matrice de $g \circ f$. □

Corollaire 1. *Une application linéaire* $f \in \mathcal{L}(E)$ *où* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base* $\mathcal{B}$ *est un isomorphisme si et seulement si* $\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ f$ *est inversible, on a alors* $\boxed{\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ f^{-1} = \left(\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ f\right)^{-1}}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 15. *En utilisant un système linéaire, montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible et calculer son inverse.*

Propriété 15. *L'ensemble des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *muni de la multiplication forme un groupe isomorphe à* $\mathrm{GL}(E)$ *où* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*, on l'appelle* **groupe linéaire** *et on le note* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Exigible. □

4 Changement de base

Définition 8. *On considère un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie muni de deux bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$*, on appelle* **matrice de passage** *de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$ *la matrice* $\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ Id_E$.

Remarque 9. *Les colonnes de la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$ *représentent les coordonnées des vecteurs de la base* $\mathcal{B}'$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Remarque 10. *La matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$ *est inversible et son inverse est la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}'$ *à la base* $\mathcal{B}$.

Exercice 16. *On considère* $\mathbb{R}^2$ *muni d'une base* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *et on définit* $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ *et* $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$*. Montrer que* $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$ *et déterminer la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *puis la matrice de passage de* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}$.

Propriété 16. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on définit les matrices colonnes U et U' formées des coordonnées respectives d'un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors* $\boxed{U = PU'}$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 11. *La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ permet de passer des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ à ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (par multiplication matricielle).*

Exercice 17. *Dans le plan muni de sa base canonique, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 4$, déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.*

Propriété 17. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, A la matrice de f de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ et A' la matrice de f de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{C}'$ on a* $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 12. *Dans le cas d'un endomorphisme de E on a* $\boxed{A' = P^{-1}AP}$.

Exercice 18. *Dans le plan muni de sa base canonique, on considère la projection $p : (x,y) \mapsto (x,0)$, déterminer l'expression de p dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.*

5 Rang d'une matrice

Définition 9. *On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans leurs bases canoniques.*

Remarque 13. *Le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes.*

Exercice 19. *Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.*

Exercice 20. *Montrer qu'un matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Exercice 21. *Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$.*

Propriété 18. *On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A)$.*

Démonstration. Exigible - On remarque que le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un automorphisme. □

Corollaire 2. *Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie est égal au rang de sa matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases quelconques de E et F.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 19. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a* $\boxed{\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)}$.

Démonstration. Hors-programme - On montre qu'une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$. □

Remarque 14. *Le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.*