Exercice 1: Sismographe

Etude théorique du comportement du système

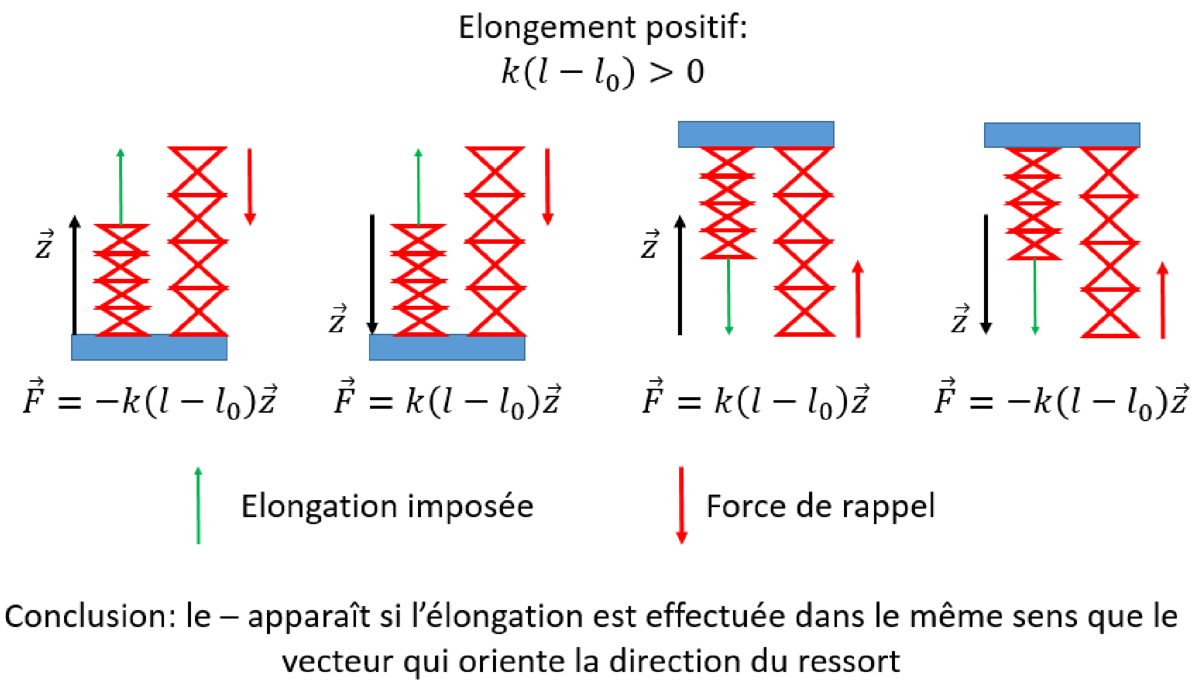
Question 1: Faire le bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant au système « masse » et donner leur expression.

Gravité : $\vec{P} = -mg\vec{z}$

Force de rappel du ressort : $\overrightarrow{Fr} = k\delta(t)\vec{z} = k[u(t) - z(t) + \delta_i]\vec{z}$ *ATTENTION AU SIGNE ICI*

Force de frottement visqueux : $\overrightarrow{Fv} = -hv(t)\vec{z}$

Remarque : pour convaincre les élèves, faire les 4 schémas suivants et montrer que le signe – n'apparaît que si on allonge le ressort dans le sens du vecteur définissant la convention de direction (sens)



Question 2: Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse exprimée selon la variable z.

Appliquons le Principe Fondamental de la Dynamique au système « Masse » dans le référentiel terrestre supposé Galiléen.

$$\vec{P} + \overrightarrow{Fr} + \overrightarrow{Fv} = m\vec{a}$$
$$-mg\vec{z} + k\,\delta(t)\vec{z} - hv\vec{z} = ma\vec{z}$$

En projection sur l'axe vertical, on obtient :

$$-mg - k\delta(t) - hv = ma$$
$$-mg + k[u(t) - z(t) + \delta_i] - hv = ma$$
$$-mg + ku(t) - kz(t) + k\delta_i - hv - ma = 0$$
$$-mg + ku(t) - kz(t) + k\delta_i - h\frac{dz(t)}{dt} - m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = 0$$
$$mg - k\delta_i + kz(t) + hz'(t) + mz''(t) = ku(t)$$

Question 3: Donner l'expression de l'allongement initial $\boldsymbol{\delta_i}$ du ressort en fonction de $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{k}$.

$$mg - k\delta_i + kz(t) + hz'(t) + mz''(t) = ku(t)$$

Or, avec les conditions initiales, on a :

$$z(0) = z'(0) = z''(0) = u(0) = 0$$

On a donc :

$$mg - k\delta_i = 0$$
$$\delta_i = \frac{mg}{k}$$

Question 4: En déduire une expression simplifiée de l'équation différentielle du mouvement ne faisant intervenir que $\boldsymbol{z(t)}$, ses dérivées, $\boldsymbol{u(t)}$ et les constantes du problème

$$mg - k\delta_i + kz(t) + hz'(t) + mz''(t) = ku(t)$$
$$kz(t) + hz'(t) + mz''(t) = ku(t)$$

Question 5: Transposer cette équation dans le domaine de Laplace.

$$kz(t) + hz'(t) + mz''(t) = ku(t)$$

Conditions initiales nulles :

$$\mathcal{L}[z'(t)] = pZ(p) - z(0^+) = pZ(p)$$
$$\mathcal{L}[z''(t)] = p^2Z(p)$$

$$kZ(p) + hpZ(p) + mp^2Z(p) = kU(p)$$

Question 6: En déduire la fonction de transfert du système : $H(p) = \frac{Z(p)}{U(p)}$

$$(k + hp + mp^2)Z(p) = kU(p)$$

$$H(p) = \frac{Z(p)}{U(p)} = \frac{k}{k + hp + mp^2}$$

Réponse du système à un séisme

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)\, \hat{u}(t)$$

Question 7: Donner l'expression de $U(p)$, transformée de Laplace de $u(t)$.

$$U(p) = U_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Question 8: En déduire l'expression de la position $Z(p)$ de la masse dans le domaine de Laplace.

$$Z(p) = H(p)U(p) = \frac{k}{k + hp + mp^2} U_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$Z(p) = \frac{kU_0\omega}{(k + hp + mp^2)(p^2 + \omega^2)}$$

$$Z(p) = \frac{20}{(p^2 + 3p + 2)(p^2 + 1)} = \frac{20}{(p + 1)(p + 2)(p^2 + 1)}$$

Question 9: Proposer la forme de la décomposition en éléments simples de $Z(p)$.

Remarque : cette question est hors programme

$$Z(p) = \frac{Ap + B}{(p^2 + 1)} + \frac{C}{(p + 1)} + \frac{D}{(p + 2)}$$

Question 10: Déterminer les coefficients de la décomposition en éléments simples proposée.

$$Z(p) = \frac{Ap + B}{(p^2 + 1)} + \frac{C}{(p + 1)} + \frac{D}{(p + 2)}$$

$$Z(p) = \frac{Ap^2 + Bp + Ap + B + Cp^2 + C}{(p^2 + 1)(p + 1)} + \frac{Dp + D}{(p + 2)(p + 1)}$$

$$Z(p) = \frac{(A + C)p^2 + (A + B)p + (B + C)}{(p^2 + 1)(p + 1)} + \frac{Dp + D}{(p + 2)(p + 1)}$$

$$Z(p) = \frac{(A+C)p^3 + (A+B)p^2 + (B+C)p + 2(A+C)p^2 + 2(A+B)p + 2(B+C) + Dp^3 + Dp^2 + Dp + D}{(p^2+1)(p+1)(p+2)}$$

$$Z(p) = \frac{(A+C+D)p^3 + (3A+B+2C+D)p^2 + (2A+3B+C+D)p + (2B+2C+D)}{(p^2+1)(p+1)(p+2)}$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ 3A+B+2C+D=0 \\ 2A+3B+C+D=0 \\ 2B+2C+D=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ 3A+B+2C+D=0 \\ 2A+3B+C+D=0 \\ 2B+2C+D=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C-D \\ -3C-3D+B+2C+D=0 \\ -2C-2D+3B+C+D=0 \\ 2B+2C+D=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C-D \\ -C-2D+B=0 \\ -C-D+3B=0 \\ 2B+2C+D=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C-D \\ B=C+2D \\ -C-D+3C+6D=0 \\ 2C+4D+2C+D=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C-D \\ B=C+2D \\ 2C+5D=0 \\ 4C+5D=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C-D \\ B=C+2D \\ 2C+5D=0 \\ C=5-\frac{5}{4}D \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-5+\frac{5}{4}D-D \\ B=5-\frac{5}{4}D+2D \\ 10-\frac{5}{2}D+5D=0 \\ C=5-\frac{5}{4}D \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -5 + \frac{1}{4}D \\ B = 5 + \frac{3}{4}D \\ 10 + \frac{5}{2}D = 0 \\ C = 5 - \frac{5}{4}D \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -5 + \frac{1}{4}D \\ B = 5 + \frac{3}{4}D \\ D = -4 \\ C = 5 - \frac{5}{4}D \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -5 - 1 \\ B = 5 - 3 \\ D = -4 \\ C = 5 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -6 \\ B = 2 \\ D = -4 \\ C = 10 \end{cases}$$

$$Z(p) = \frac{-6p + 2}{(p^2 + 1)} + \frac{10}{(p + 1)} - \frac{4}{(p + 2)}$$

Vérifié pour les valeurs $p = 0$ et $p = 1$.

Question 11: En déduire le mouvement temporel de la masse.

$$Z(p) = \left[\frac{-6p+2}{(p^2+1)} + \frac{10}{(p+1)} - \frac{4}{(p+2)}\right]$$

$$Z(p) = \left[-6\frac{p}{(p^2+1)} + 2\frac{1}{(p^2+1)} + 10\frac{1}{(p+1)} - 4\frac{1}{(p+2)}\right]$$

$$z(t) = [-6\cos(t) + 2\sin(t) + 10e^{-t} - 4e^{-2t}]\hat{u}(t)$$
$$\forall t > 0$$

Question 12: Vérifier que cette solution convient.

$$Z(p) = \frac{20}{(p^2+3p+2)(p^2+1)} = \frac{2}{(p^2+3p+2)}\frac{10}{(p^2+1)} = H(p)\mathcal{L}[10\sin(t)\,\hat{u}(t)]$$

Equation différentielle associée à $H(p) = \frac{2}{(p^2+3p+2)}$

$$2z(t) + 3\frac{dz(t)}{dt} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} = 2u(t)$$

$$u(t) = 10\sin(t)\,\hat{u}(t)$$

$$z(t) = [-6\cos(t) + 2\sin(t) + 10e^{-t} - 4e^{-2t}]\hat{u}(t)$$
$$\frac{dz(t)}{dt} = [6\sin(t) + 2\cos(t) - 10e^{-t} + 8e^{-2t}]\hat{u}(t)$$
$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = [6\cos(t) - 2\sin(t) + 10e^{-t} - 16e^{-2t}]\hat{u}(t)$$

$$2z(t) + 3\frac{dz(t)}{dt} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} =$$
$$[-12\cos(t) + 4\sin(t) + 20e^{-t} - 8e^{-2t} + 18\sin(t) + 6\cos(t) - 30e^{-t} + 24e^{-2t} + 6\cos(t) - 2\sin(t) + 10e^{-t} - 16e^{-2t}]\hat{u}(t)$$

$$20\sin(t)\,\hat{u}(t) = 2u(t)$$

On a donc bien :

$$2z(t) + 3\frac{dz(t)}{dt} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} = 2u(t)$$

Question 13: En déduire l'expression de la courbe tracée sur le cylindre enregistreur $\boldsymbol{h(t)}$

$$h(t) = z(t) - u(t)$$
$$h(t) = [-6\cos(t) + 2\sin(t) + 10e^{-t} - 4e^{-2t}]\hat{u}(t) - 10\sin(t)\,\hat{u}(t)$$
$$h(t) = [-6\cos(t) - 8\sin(t) + 10e^{-t} - 4e^{-2t}]\hat{u}(t)$$

Question 14: Montrer que cette solution est caractérisée par une réponse en régime transitoire $\boldsymbol{h^t(t)}$ et une réponse en régime permanent $\boldsymbol{h^p(t)}$ que vous expliciterez

$$h(t) = [10e^{-t} - 4e^{-2t}]\hat{u}(t) + [-6\cos(t) - 8\sin(t)]\hat{u}(t)$$
$$h(t) = h^t(t) + h^p(t)$$

$$h^t(t) = [10e^{-t} - 4e^{-2t}]\hat{u}(t)$$
$$h^p(t) = [-6\cos(t) - 8\sin(t)]\hat{u}(t)$$

Tracés des solutions