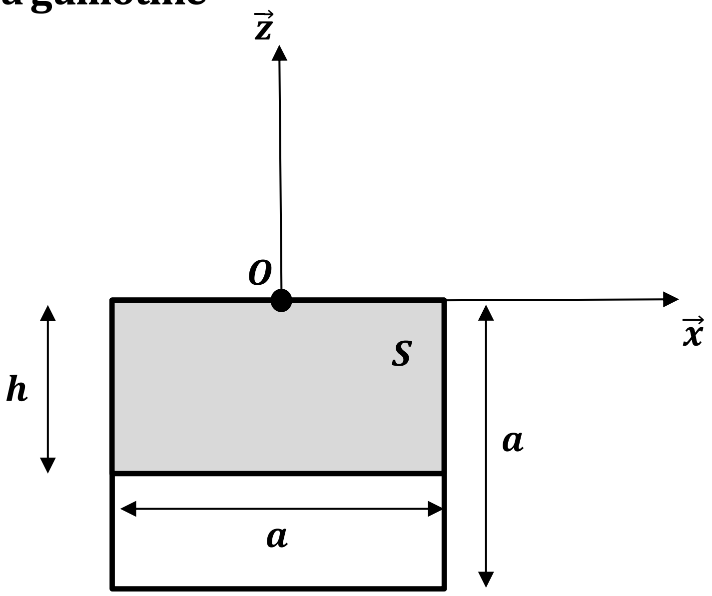
Actions mécaniques

Exercice 1: Vanne à guillotine



Calcul intégral

Question 1: Donner l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR_f}$ s'appliquant sur une petite surface dS de la surface S résultant de l'action du fluide sous pression sur la plaque en fonction de la pression P, de l'élément de surface dS et d'un vecteur unitaire

$$\overrightarrow{dR_f} = -PdS\vec{n} = -PdS(-\vec{y}) = PdS\vec{y}$$

Question 2: Donner l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR_a}$ s'appliquant sur une petite surface dS de la surface S résultant de l'action de l'air sur la plaque en fonction de la pression P_0, de l'élément de surface dS et d'un vecteur unitaire

$$\overrightarrow{dR_a} = -P_0dS\vec{n} = -P_0dS\vec{y}$$

Question 3: En déduire l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR}$ s'appliquant sur une petite surface dS de la surface S résultant la somme des actions du fluide d'un côté et de l'air de l'autre sur la plaque en fonction de la différence de pression $\Delta P = P - P_0$ entre le fluide et l'air, de l'élément de surface dS et d'un vecteur unitaire

$$\overrightarrow{dR} = \overrightarrow{dR_a} + \overrightarrow{dR_f} = PdS\vec{y} - P_0dS\vec{y} = (P - P_0)dS\vec{y} = \Delta PdS\vec{y}$$

Question 4: En déduire l'expression littérale de la résultante $\vec{R}$ de la pression sur la surface de la plaque mobile soumise au fluide sous pression en fonction de a, h, ΔP et $\vec{y}$

$$\vec{R} = \int_S \overrightarrow{dR} = \int_S \Delta P \vec{y} dS = \Delta P \vec{y} \int_S dS = \Delta P a h \vec{y}$$

Question 5: Donner l'expression du petit moment $\overrightarrow{dM_O(\overrightarrow{dR})}$ en O créé par l'élément de force $\overrightarrow{dR}$ appliqué en un point courant M de coordonnées x et z en fonction de ΔP, x, z, $\vec{x}$ et $\vec{z}$

$$\overrightarrow{dM_O(\overrightarrow{dR})} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR} = (x\vec{x} + z\vec{z}) \wedge \Delta P dS \vec{y} = x \Delta P \vec{z} dS - z \Delta P \vec{x} dS$$

$$\overrightarrow{dM_O(\overrightarrow{dR})} = \Delta P (x\vec{z} - z\vec{x}) dS$$

Question 6: En déduire l'expression littérale du moment $\overrightarrow{M_O(\vec{R})}$ de la pression sur la surface de la plaque mobile soumise au fluide sous pression en fonction de a, h, ΔP et $\vec{x}$

$$M_O(\overrightarrow{dR}) = \int_S \overrightarrow{dM_O(\overrightarrow{dR})} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-h}^{0} \Delta P (x\vec{z} - z\vec{x})\, dx dz$$

Attention au sens des bornes !

$$M_O(\overrightarrow{dR}) = \Delta P \left[\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-h}^{0} x dx dz \right) \vec{z} - \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-h}^{0} z dx dz \right) \vec{x} \right]$$

$$M_O(\overrightarrow{dR}) = \Delta P \left[\left(\int_{-h}^{0} dz \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x dx \right) \vec{z} - \left(\int_{-h}^{0} z dz \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \right) \vec{x} \right]$$

$$M_O(\overrightarrow{dR}) = \Delta P \left[\left(h \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) \vec{z} - \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-h}^{0} a \right) \vec{x} \right]$$

$$M_O(\overrightarrow{dR}) = -\Delta P a \left(-\frac{h^2}{2} \right) \vec{x}$$

$$M_O(\overrightarrow{dR}) = \frac{\Delta P a h^2}{2} \vec{x}$$

Question 7: En déduire le torseur de l'action de la pression de l'air et du fluide sous pression sur la plaque mobile en O en fonction de a, h et ΔP

$$\{\mathrm{T}_{p\to S}\} = \begin{Bmatrix} \Delta Pah\vec{y} \\ \dfrac{\Delta Pah^2}{2}\vec{x} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & \dfrac{\Delta Pah^2}{2} \\ \Delta Pah & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Exploitation de centres géométriques

Question 8: Donner les coordonnées X_G, Y_G et Z_G du centre géométrique G de la surface soumise à la pression du fluide sous pression dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Du fait des symétries de la surface étudiée :

$$\begin{cases} X_G = 0 \\ Y_G = 0 \\ Z_G = -\dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Question 9: En exploitant les résultats du cours, donner le torseur de l'action de la pression du fluide sous pression sur la plaque en son centre G

Répartition de pression uniformément répartie sur surface plane :

$$\{\mathrm{T}_{f\to S}\} = \begin{Bmatrix} Pah\vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

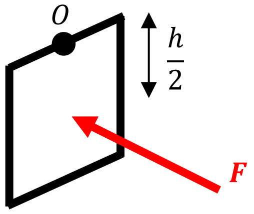
Question 10: Faire de même pour l'action de l'air de l'autre côté de la plaque

$$\{\mathrm{T}_{a\to S}\} = \begin{Bmatrix} -P_0ah\vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

Question 11: En déduire le torseur de l'action totale des fluides sur la plaque mobile en son centre G

$$\{\mathrm{T}_{p\to S}\} = \{\mathrm{T}_{f\to S}\} + \{\mathrm{T}_{a\to S}\} = \begin{Bmatrix} Pah\vec{y} - P_0ah\vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \Delta Pah\vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

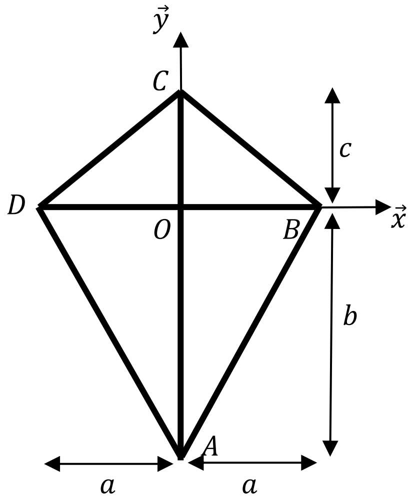
Question 12: Donner finalement l'expression de ce torseur en O

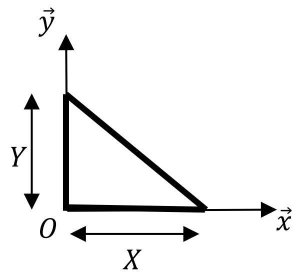


$$\{\mathrm{T}_{p\to S}\} = \begin{Bmatrix} \Delta Pah\vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \Delta Pah\vec{y} \\ \dfrac{\Delta Pah^2}{2}\vec{x} \end{Bmatrix}_O \quad cqfd$$

$$\overrightarrow{M_O(\vec{R})} = \overrightarrow{M_G(\vec{R})} + \overrightarrow{OG}\wedge\vec{R} = -\frac{h}{2}\vec{z}\wedge\Delta Pah\vec{y} = -\frac{h^2a\Delta P}{2}\vec{z}\wedge\vec{y} = \frac{h^2a\Delta P}{2}\vec{x}$$

Exercice 2: Cerf-volant





Question 1: Déterminer les coordonnées du centre géométrique du triangle ci-dessus en fonction de X et Y

$$dS = dxdy$$
$$S = \frac{XY}{2}$$
$$\int_S dS = \int_{x=0}^{X}\int_{y=0}^{y(x)} dydx = \int_{y=0}^{Y}\int_{x=0}^{x(y)} dxdy$$
$$y(x) = Y - \frac{Y}{X}x = \frac{Y}{X}(X-x)$$

$$X_G = \frac{1}{S}\int_S xdS = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{X}\int_{y=0}^{\frac{Y}{X}(X-x)} xdydx = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{X} x\left(\frac{Y}{X}(X-x)\right)dx = \frac{Y}{XS}\int_{x=0}^{X}(Xx-x^2)dx$$
$$X_G = \frac{Y}{XS}\left[X\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^X = \frac{Y}{XS}\left(\frac{X^3}{2}-\frac{X^3}{3}\right) = \frac{YX^3}{XS}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2YX^2}{XY6} = \frac{1}{3}X$$

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_S ydS = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{X}\int_{y=0}^{\frac{Y}{X}(X-x)} ydydx = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{X}\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{X}(X-x)\right)^2 dx = \frac{Y^2}{2X^2S}\int_{x=0}^{X}(X-x)^2dx$$
$$Y_G = \frac{Y^2}{2X^2S}\int_{x=0}^{X}(X^2-2xX+x^2)dx = \frac{Y^2}{2X^2S}\left[X^2x-x^2X+\frac{x^3}{3}\right]_0^X = \frac{2Y^2}{2X^2XY}\frac{X^3}{3} = \frac{1}{3}Y$$
$$\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{3}X \\ Y_G = \dfrac{1}{3}Y \end{cases}$$

Rq : pour cette seconde intégrale, il est plus simple d'inverser les bornes en intégrant de 0 à Y et de 0 à $x(y)$

Question 2: En déduire les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique G du cerf-volant complet en fonction de a, b et c

On a donc les 4 centres des triangles :

$OCD - 1$	$OCB - 2$	$OAD - 3$	$OAB - 4$
$\begin{cases} X_G^1 = -\frac{a}{3} \\ Y_G^1 = \frac{c}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} X_G^2 = \frac{a}{3} \\ Y_G^2 = \frac{c}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} X_G^3 = -\frac{a}{3} \\ Y_G^3 = -\frac{b}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} X_G^4 = \frac{a}{3} \\ Y_G^4 = -\frac{b}{3} \end{cases}$
$S_1 = \frac{ac}{2}$	$S_2 = \frac{ac}{2}$	$S_3 = \frac{ab}{2}$	$S_4 = \frac{ab}{2}$

Le centre de l'ensemble est (axe de symétrie : $X_G = 0$! cf Q3):

$$\begin{cases} X_G = \frac{\sum S_i X_G^i}{\sum S_i} = \frac{-\frac{a}{3}S_1 + \frac{a}{3}S_2 - \frac{a}{3}S_3 + \frac{a}{3}S_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{-\frac{a}{3}\frac{ac}{2} + \frac{a}{3}\frac{ac}{2} - \frac{a}{3}\frac{ab}{2} + \frac{a}{3}\frac{ab}{2}}{\frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}} = 0 \\ Y_G = \frac{\sum S_i Y_G^i}{\sum S_i} = \frac{\frac{c}{3}S_1 + \frac{c}{3}S_2 - \frac{b}{3}S_3 - \frac{b}{3}S_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{\frac{c}{3}\frac{ac}{2} + \frac{c}{3}\frac{ac}{2} - \frac{b}{3}\frac{ab}{2} - \frac{b}{3}\frac{ab}{2}}{\frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}} = \frac{c^2 - b^2}{3(b+c)} = \frac{(c-b)(b+c)}{3(b+c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_G = 0 \\ Y_G = \frac{c-b}{3} \end{cases}$$

Question 3: Que peut-on dire de l'abscisse X_G de ce centre ?

Elle est nulle, c'est normal car G est sur le l'axe de symétrie du cerf-volant.

Question 4: Donner le torseur de l'action du vent sur le cerf-volant en G en fonction de a, b, c et p

On a une répartition de pression uniforme sur une surface plane :

- La résultante vaut : $\vec{R} = \int_S p\vec{z}dS = pS\vec{z} = p(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)\vec{z} = a(b+c)p\vec{z}$
- Le moment au centre géométrique de la surface totale est nul :

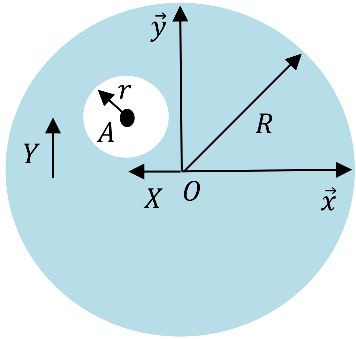
$$\begin{Bmatrix} a(b+c)p\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

Question 5: En déduire l'expression de ce torseur en O

$$\{T_{p\rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} a(b+c)p\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} a(b+c)p\vec{z} \\ \frac{ap(c^2 - b^2)}{3}\vec{x} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{ap(c^2 - b^2)}{3} \\ 0 & 0 \\ a(b+c)p & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_G}(\vec{R}) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_G \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a(b+c)p \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \frac{c-b}{3}a(b+c)p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Exercice 3: Disque troué



$$\overrightarrow{OA} = X\vec{x} + Y\vec{y}$$

Question 1: Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique G de la surface étudiée en fonction de X, Y, r et R

On est en présence de deux surfaces simples : deux disques

On connaît leurs surfaces et leurs centres :

	Disque plein Rayon R	Disque creux Rayon r
Centre	$\begin{cases} x_p = 0 \\ y_p = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_c = X \\ y_c = Y \end{cases}$
Surface	$S_p = \pi R^2$	$S_c = -\pi r^2$

Le centre de la surface trouée est donc obtenu en utilisant la formule suivante :

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{x_p * S_p + x_c * S_c}{S_p + S_c} = \dfrac{0 * \pi R^2 - X * \pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\dfrac{X\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = -X\dfrac{r^2}{R^2 - r^2} \\ Y_G = \dfrac{y_p * S_p + y_c * S_c}{S_p + S_c} = \dfrac{0 * \pi R^2 - Y * \pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\dfrac{Y\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = -Y\dfrac{r^2}{R^2 - r^2} \end{cases}$$

Question 2: En déduire le torseur de l'action de la pression sur cette surface en O en fonction de X, Y, r et p

Comme la répartition de pression est uniforme, on sait que le moment de cette répartition en G est nul.

$$\{T_{p\to S}\} = \begin{Bmatrix} (S_p + S_c)p\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \pi(R^2 - r^2)p\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \pi(R^2 - r^2)p\vec{z} \\ \pi(R^2 - r^2)p(-X_G\vec{y} + Y_G\vec{x}) \end{Bmatrix}_O$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_G}(\vec{R}) + \overrightarrow{OG}\wedge\vec{R} = \overrightarrow{OG}\wedge\vec{R} = \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi(R^2 - r^2)p \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \pi(R^2 - r^2)Y_G p \\ -\pi(R^2 - r^2)X_G p \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{R}) = \begin{pmatrix} -\pi(R^2 - r^2)Y\dfrac{r^2}{R^2 - r^2}p \\ \pi(R^2 - r^2)X\dfrac{r^2}{R^2 - r^2}p \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} -\pi Y r^2 p \\ \pi X r^2 p \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\{T_{p\to S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\pi Y r^2 p \\ 0 & \pi X r^2 p \\ \pi(R^2 - r^2)p & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Question 3: En supposant que l'action sur la surface trouée est équivalente à une action de pression sur la surface de rayon R non trouée et d'une action opposée sur le disque de rayon r, obtenir plus rapidement le même résultat

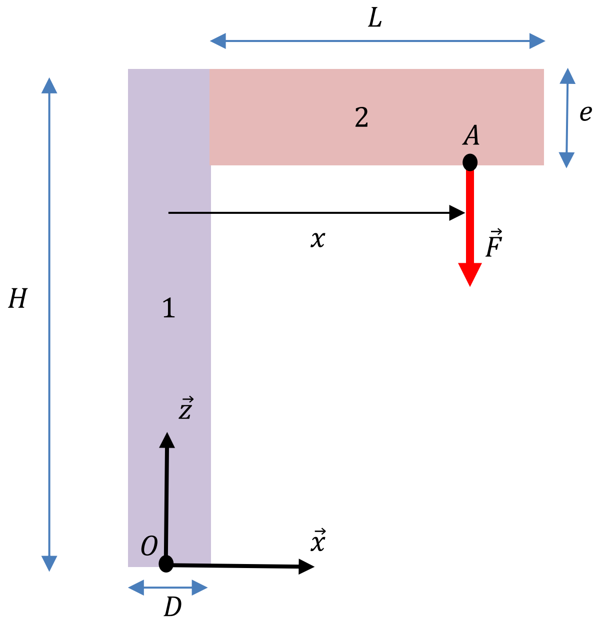
Action sur le disque plein S_1	Action sur le disque vide S_2
Centre de la surface : O Répartition de pression constante : $$\{T_{p\to S_1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p\pi R^2 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$	Centre de la surface : A Répartition de pression constante : $$\{T_{p\to S_2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -p\pi r^2 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$ C'est donc une « force en A » valant $-p\pi r^2$ On la change de point, soit avec Varignon, soit « à la main » avec bras de levier et sens du moment $$\{T_{p\to S_2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\pi Y r^2 p \\ 0 & \pi X r^2 p \\ p\pi r^2 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Soit :

$$\{T_{p\to S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\pi Y r^2 p \\ 0 & \pi X r^2 p \\ \pi(R^2 - r^2)p & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Faire comprend aux élèves qu'il faudra être capable de faire ça !!!

Exercice 4: Potence



Question 1: Déterminer le torseur de l'action de la pesanteur sur la partie 1 au centre G_1 de la partie 1 dont la position sera précisée, le tout en fonction de ρ, H, r, R et g

$$\begin{cases} X_{G_1} = 0 \\ Y_{G_1} = 0 \\ Z_{G_1} = \frac{H}{2} \end{cases}$$

$$V_1 = H\pi R^2 - H\pi r^2 = H\pi(R^2 - r^2)$$

Le moment est nul en G_1 car la répartition est uniforme et G_1 est le centre géométrique du volume concerné.

$$\{T_{g\rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -\rho V_1 g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1} = \begin{Bmatrix} -\rho H\pi(R^2 - r^2)g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1}$$

Remarque : la répartition de force volumique de gravité étant constante, on a :

$$\overrightarrow{dF} = f_v dV = -\rho g dV\vec{z}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \int_{V_1} \overrightarrow{dF} = \int_{V_1} \rho g dV\vec{z} = -\rho g\vec{z} \int_{V_1} dV = V_1\overrightarrow{f_v} = -\rho V_1 g\vec{z}$$

Question 2: Déterminer le torseur de l'action de la pesanteur sur la partie 2 au centre G_2 de la partie 2 dont la position sera précisée, le tout en fonction de ρ, e, L et g

$$\begin{cases} X_{G_2} = \frac{D}{2} + \frac{L}{2} = \frac{D+L}{2} \\ Y_{G_2} = 0 \\ Z_{G_2} = H - \frac{e}{2} \end{cases}$$

$$V_2 = Le^2$$

Le moment est nul en G_2 car la répartition est uniforme et G_2 est le centre géométrique du volume concerné.

$$\{\mathrm{T}_{g\to 2}\} = \begin{Bmatrix} -\rho V_2 g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2} = \begin{Bmatrix} -\rho L e^2 g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

Remarque : la répartition de force volumique de gravité étant constante, on a :

$$\overrightarrow{R_2} = V_2\overrightarrow{f_v} = -\rho V_2 g\vec{z}$$

Question 3: En déduire le torseur de l'action de gravité sur la potence en O en fonction des données précédentes

$$\{\mathrm{T}_{g\to 1U2}\} = \{\mathrm{T}_{g\to 1}\} + \{\mathrm{T}_{g\to 2}\}$$

$$\{\mathrm{T}_{g\to 1}\} = \begin{Bmatrix} -\rho H\pi(R^2-r^2)g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1} = \begin{Bmatrix} -\rho H\pi(R^2-r^2)g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{R_1}) = \overrightarrow{M_{G_1}}(\overrightarrow{R_1}) + \overrightarrow{OG_1}\wedge\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{OG_1}\wedge\overrightarrow{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{H}{2} \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho H\pi(R^2-r^2)g \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\{\mathrm{T}_{g\to 2}\} = \begin{Bmatrix} -\rho L e^2 g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2} = \begin{Bmatrix} -\rho L e^2 g\vec{z} \\ \dfrac{D+L}{2}\rho L e^2 g\vec{y} \end{Bmatrix}_{O}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{R_2}) = \overrightarrow{M_{G_1}}(\overrightarrow{R_2}) + \overrightarrow{OG_1}\wedge\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{OG_1}\wedge\overrightarrow{R_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{D+L}{2} \\ 0 \\ H-\dfrac{e}{2} \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho L e^2 g \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{D+L}{2}\rho L e^2 g \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\{\mathrm{T}_{g\to 1U2}\} = \begin{Bmatrix} -\rho H\pi(R^2-r^2)g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O} + \begin{Bmatrix} -\rho L e^2 g\vec{z} \\ \dfrac{D+L}{2}\rho L e^2 g\vec{y} \end{Bmatrix}_{O} = \begin{Bmatrix} -\rho g[H\pi(R^2-r^2)+Le^2]\vec{z} \\ \dfrac{D+L}{2}\rho L e^2 g\vec{y} \end{Bmatrix}_{O}$$

Question 4: Déterminer le torseur de l'action de la gravité sur la masse suspendue en O en fonction de m, g et x

$$\{\mathrm{T}_{g\to m}\} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{z} \\ mgx\vec{y} \end{Bmatrix}_{O}$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) + \overrightarrow{OA}\wedge\vec{F} = \overrightarrow{OG_1}\wedge\overrightarrow{R_2} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ H-\dfrac{e}{2} \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ mgx \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Question 5: En déduire le torseur de l'action de la gravité sur l'ensemble Potence+Masse suspendue en O en fonction des données précédentes

$$\{\mathrm{T}_{g\to 1U2Um}\} = \{\mathrm{T}_{g\to 1U2}\} + \{\mathrm{T}_{g\to m}\}$$

$$\{\mathrm{T}_{g\rightarrow 1U2Um}\} = \begin{Bmatrix} -\rho g[H\pi(R^2 - r^2) + Le^2]\vec{z} \\ \dfrac{D+L}{2}\rho Le^2 g\vec{y} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -mg\vec{z} \\ mgx\vec{y} \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathrm{T}_{g\rightarrow 1U2Um}\} = \begin{Bmatrix} -[\rho[H\pi(R^2 - r^2) + Le^2] + m]g\vec{z} \\ \left(\dfrac{D+L}{2}\rho Le^2 + mx\right)g\vec{y} \end{Bmatrix}_O$$

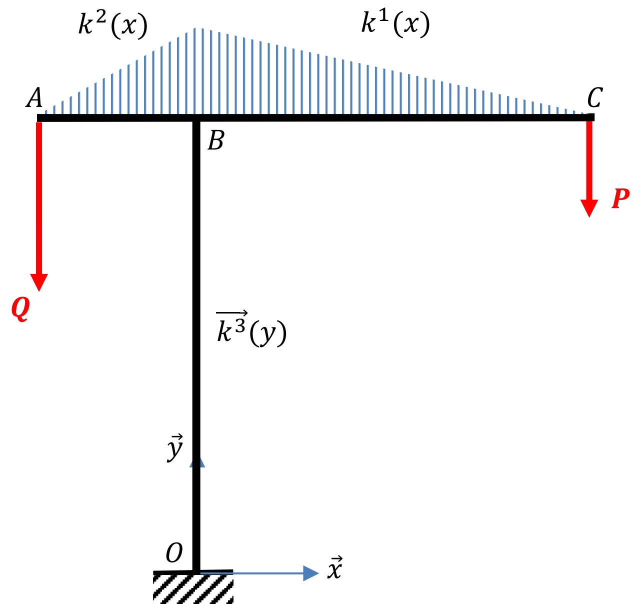
Question 6: Déterminer la valeur numérique de la résultante R et du moment maximum M en O de l'action de la gravité sur l'ensemble étudié

On prend la masse la plus grande : $m = 500\ kg$
A la distance la plus importante : $x = 4\ m$

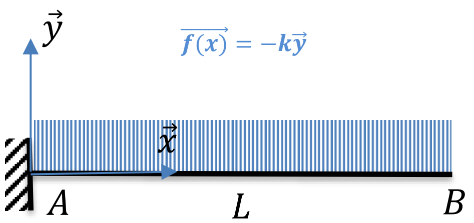
$$R = [\rho[H\pi(R^2 - r^2) + Le^2] + m]g$$
$$R = [7500 * [3 * \pi(0{,}5^2 - 0{,}4^2) + 4 * 0{,}5^2] + 500] * 9{,}81$$
$$R = 140\ 888{,}5\ N$$

$$M = \left(\frac{D+L}{2}\rho Le^2 + mx\right)g$$
$$M = \left(\frac{2 * 0{,}5 + 4}{2} * 7500 * 4 * 0{,}5^2 + 500 * 4\right) * 9{,}81$$
$$M = 203\ 557{,}5\ N.m$$

Exercice 5: Etude d'une grue



Question 1: Déterminer le torseur de cette action en A



$$\overrightarrow{dR} = -kdx\vec{y}$$
$$\mathcal{A} = kL$$
$$\vec{R} = \int_0^L \overrightarrow{dR} = \int_0^L -kdx\vec{y} = -k\int_0^L dx\,\vec{y} = -pL\vec{y} = -\mathcal{A}\vec{y}$$
$$\overrightarrow{dM_0} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR} = x\vec{x} \wedge -kdx\vec{y} = -kxdx\vec{z}$$
$$\overrightarrow{M_A} = \int_0^L \overrightarrow{dM} = \int_0^L -kxdx\vec{z} = -k\int_0^L xdx\,\vec{z} = -k\frac{L^2}{2}\vec{z}$$

Question 2: Déterminer le point où le moment de cette action est nul

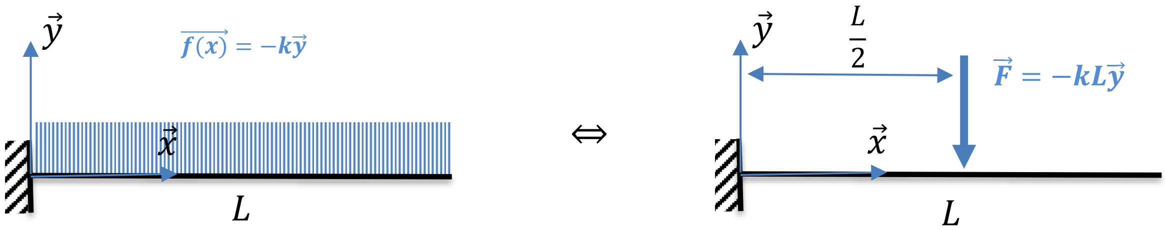
Soit P' d'abscisse X :

$$\overrightarrow{M_{P'}} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{M_{P'}} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{P'A} \wedge \vec{R} = -k\frac{L^2}{2}\vec{z} + (-X\vec{x}) \wedge (-kL\vec{y})$$
$$\overrightarrow{M_{P'}} = -k\frac{L^2}{2}\vec{z} + kLX\vec{z} = -\frac{k}{2}(L^2 - 2LX)\vec{z}$$

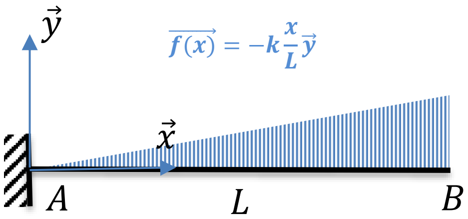
$$\overrightarrow{M_{P'}} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{k}{2}(L^2 - 2LX) = 0$$
$$L^2 - 2LX = 0$$
$$L - 2X = 0$$
$$X = \frac{L}{2}$$

On a donc le moment d'une répartition uniforme nul au centre de cette répartition, c'est un résultat que nous avons montré de manière générale dans le cours.

Question 3: En déduire un nouveau modèle plus simple pour représenter l'action de la force répartie étudiée



Question 4: Déterminer le torseur de cette action en A



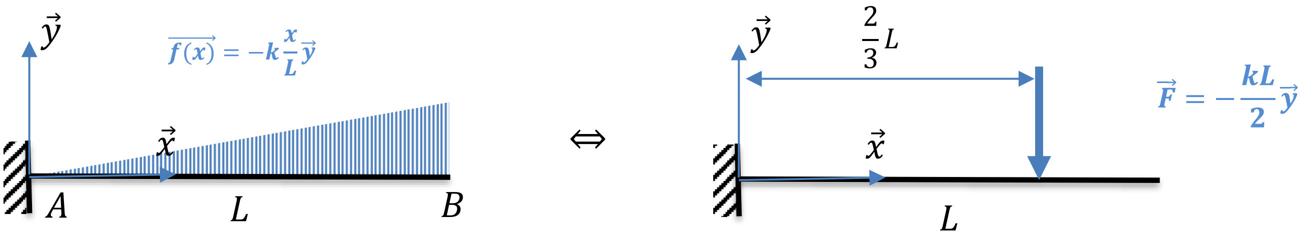
$$\overrightarrow{dR} = -\frac{k}{L}xdx\vec{y}$$
$$\mathcal{A} = \frac{kL}{2}$$
$$\vec{R} = \int_0^L \overrightarrow{dR} = \int_0^L -\frac{k}{L}xdx\vec{y} = -\frac{k}{L}\int_0^L xdx\,\vec{y} = -\frac{k}{L}\frac{L^2}{2}\vec{y} = -k\frac{L}{2}\vec{y} = -\mathcal{A}\vec{y}$$
$$\overrightarrow{dM_0} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR} = x\vec{x} \wedge -k\frac{x}{L}dx\vec{y} = -\frac{k}{L}x^2dx\vec{z}$$
$$\overrightarrow{M_A} = \int_0^L \overrightarrow{dM} = \int_0^L -\frac{k}{L}x^2dx\vec{z} = -\frac{k}{L}\int_0^L x^2dx\,\vec{z} = -\frac{k}{L}\frac{L^3}{3}\vec{z} = -k\frac{L^2}{3}\vec{z}$$

Question 5: Déterminer le point où le moment de cette action est nul

Soit P' d'abscisse X :

$$\overrightarrow{M_{P'}} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{M_{P'}} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{P'A} \wedge \vec{R} = -k\frac{L^2}{3}\vec{z} + (-X\vec{x}) \wedge \left(-k\frac{L}{2}\vec{y}\right)$$
$$\overrightarrow{M_{P'}} = -k\frac{L^2}{3}\vec{z} + k\frac{L}{2}X\vec{z} = -\frac{k}{6}(2L^2 - 3LX)\vec{z}$$
$$\overrightarrow{M_{P'}} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{k}{6}(2L^2 - 3LX) = 0$$
$$2L^2 - 3LX = 0$$
$$2L - 3X = 0$$
$$X = \frac{2}{3}L$$

Question 6: En déduire un nouveau modèle plus simple pour représenter l'action de la force répartie étudiée

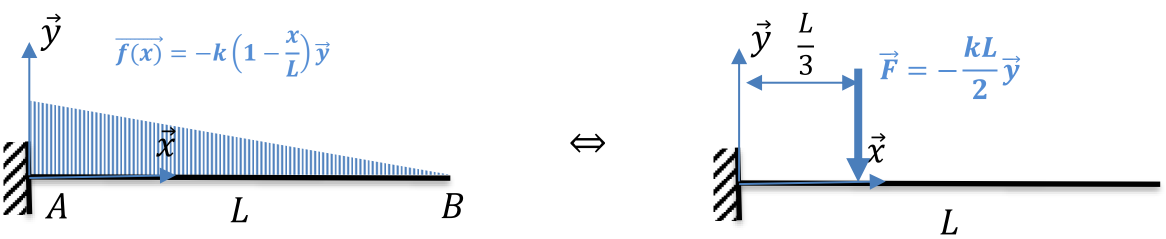


Question 7: Compte tenu des résultats précédents, déterminer un nouveau modèle plus simple pour représenter l'action de la force répartie étudiée

La résultante vaudra :

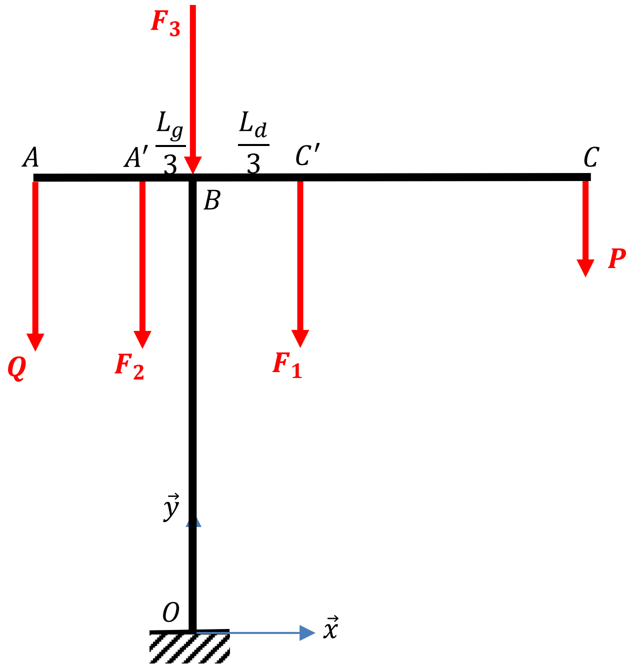
$$\mathcal{A} = \frac{kL}{2}$$
$$\vec{R} = -\mathcal{A}\vec{y} = -\frac{kL}{2}\vec{y}$$

Elle s'applique à 1/3 de la répartition en partant de l'angle droit :



Question 8: Proposer un nouveau modèle de la grue comportant uniquement 5 résultantes représentant l'ensemble des charges qui s'appliquent dessus

$$\begin{cases} \vec{F_1} = F_1\vec{y} = -\dfrac{kL_d}{2}\vec{y} \\ \vec{F_2} = F_2\vec{y} = -\dfrac{kL_g}{2}\vec{y} \\ \vec{F_3} = F_3\vec{y} = -kH\vec{y} \end{cases}$$



Question 9: En déduire le torseur des actions de la gravité sur l'ensemble de la structure en O

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} -Q\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -F_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A'} + \begin{Bmatrix} -F_3\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -F_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C'} + \begin{Bmatrix} -P\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} -Q\vec{y} \\ QL_g\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -\dfrac{kL_g}{2}\vec{y} \\ \dfrac{kL_g}{2}\dfrac{L_g}{3}\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -kH\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -\dfrac{kL_d}{2}\vec{y} \\ -\dfrac{kL_d}{2}\dfrac{L_d}{3}\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -P\vec{y} \\ -PL_d\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} -Q\vec{y} \\ QL_g\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -\dfrac{kL_g}{2}\vec{y} \\ \dfrac{k{L_g}^2}{6}\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -kH\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -\dfrac{kL_d}{2}\vec{y} \\ -\dfrac{k{L_d}^2}{6}\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -P\vec{y} \\ -PL_d\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

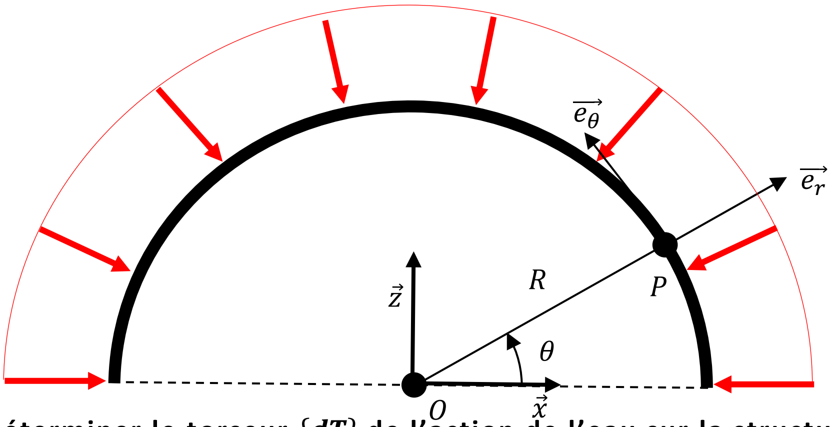
$$\{T\} = \begin{Bmatrix} -\left(Q + P + \dfrac{kL_g}{2} + \dfrac{kL_d}{2} + kH\right)\vec{y} \\ \left(QL_g + \dfrac{k{L_g}^2}{6}\right)\vec{z} - \left(PL_d + \dfrac{k{L_d}^2}{6}\right) \end{Bmatrix}_O$$

Chaque résultante qui s'applique en un point d'abscisse X s'écrit sous la forme :

$$\vec{R} = R\vec{y}$$

$$\overrightarrow{M_O(\vec{R})} = \overrightarrow{M_A(\vec{R})} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = H\vec{y} \wedge R\vec{y} + X\vec{x} \wedge R\vec{y} = X\vec{x} \wedge R\vec{y} = XR\vec{z}$$

Exercice 6: Restaurant sous-marin



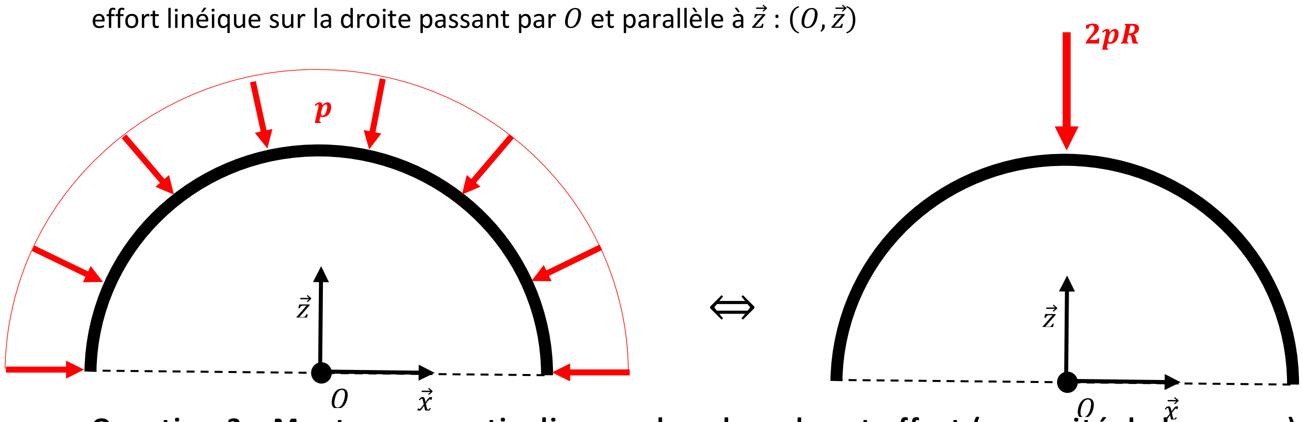
Question 1: Déterminer le torseur $\{dT\}$ de l'action de l'eau sur la structure en O dans la tranche de longueur dy

Résultante	Moment
$\overrightarrow{dR} = -pdydl\overrightarrow{e_r} = -pRdy\overrightarrow{e_r}d\theta$ $dl = Rd\theta$ $\vec{R} = \int_\Gamma \overrightarrow{dR} = \int_0^\pi -pRdy\overrightarrow{e_r}d\theta = -pRdy\int_0^\pi \overrightarrow{e_r}d\theta$ $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{z}$ $\vec{R} = -pRdy\left[\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta\,\vec{x} + \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\,\vec{z}\right]$ $\vec{R} = -pRdy[[\sin\theta]_0^\pi\vec{x} - [\cos\theta]_0^\pi\vec{z}]$ $\vec{R} = -2pRdy\vec{z}$	$\overrightarrow{dM_0} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR} = R\overrightarrow{e_r} \wedge -pRdy\overrightarrow{e_r}d\theta$ $\overrightarrow{dM_0} = \vec{0}$ $\overrightarrow{M_0} = \int_\Gamma \overrightarrow{dM_0} = \vec{0}$

$$\{dT\} = \begin{Bmatrix} -2pRdy\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2pRdy & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Question 2: En déduire un modèle simple de l'action de l'eau sur la tranche étudiée

On peut remplacer l'action répartie sur la tranche du cylindre par un « effort ponctuel en plan » ou un effort linéique sur la droite passant par O et parallèle à $\vec{z}$: $(O, \vec{z})$

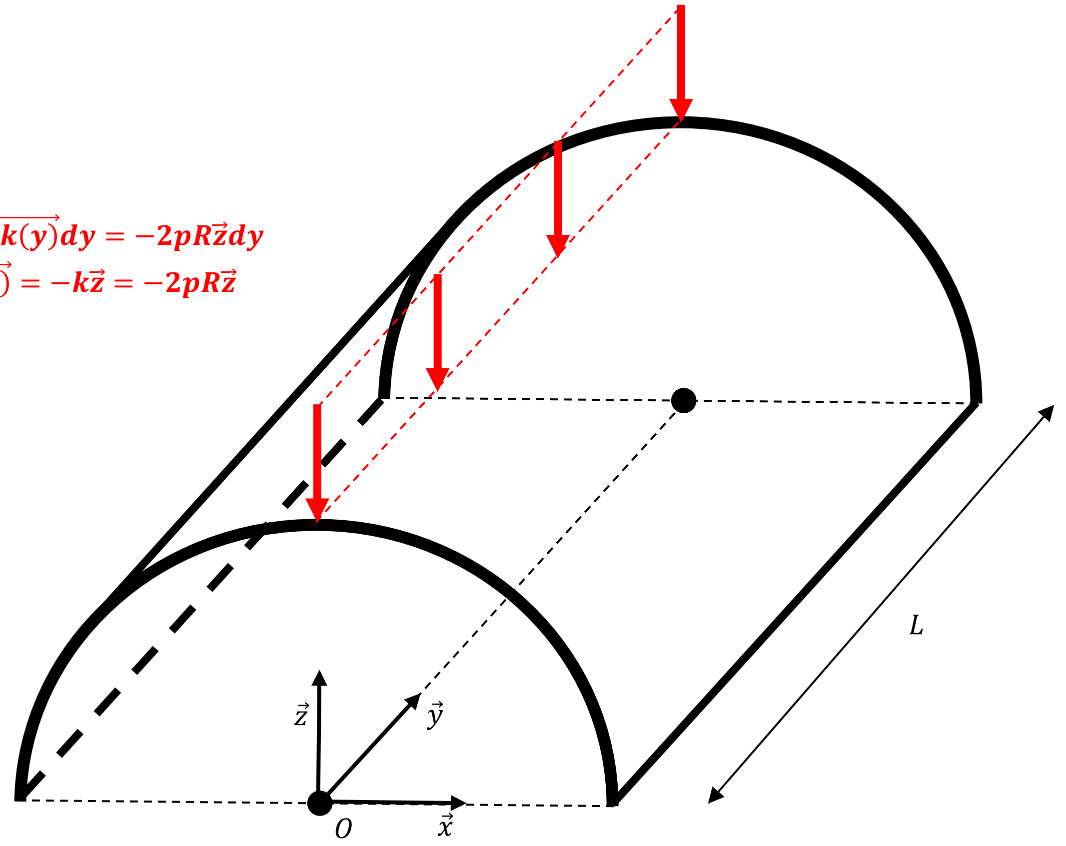


Question 3: Montrer en particulier que la valeur de cet effort (par unité de longueur) est liée à la « ligne » de longueur $L_p = 2R$ correspondant à la projection de la baie

$$\vec{R} = -2pR\vec{z} = -pL_p\vec{z}$$

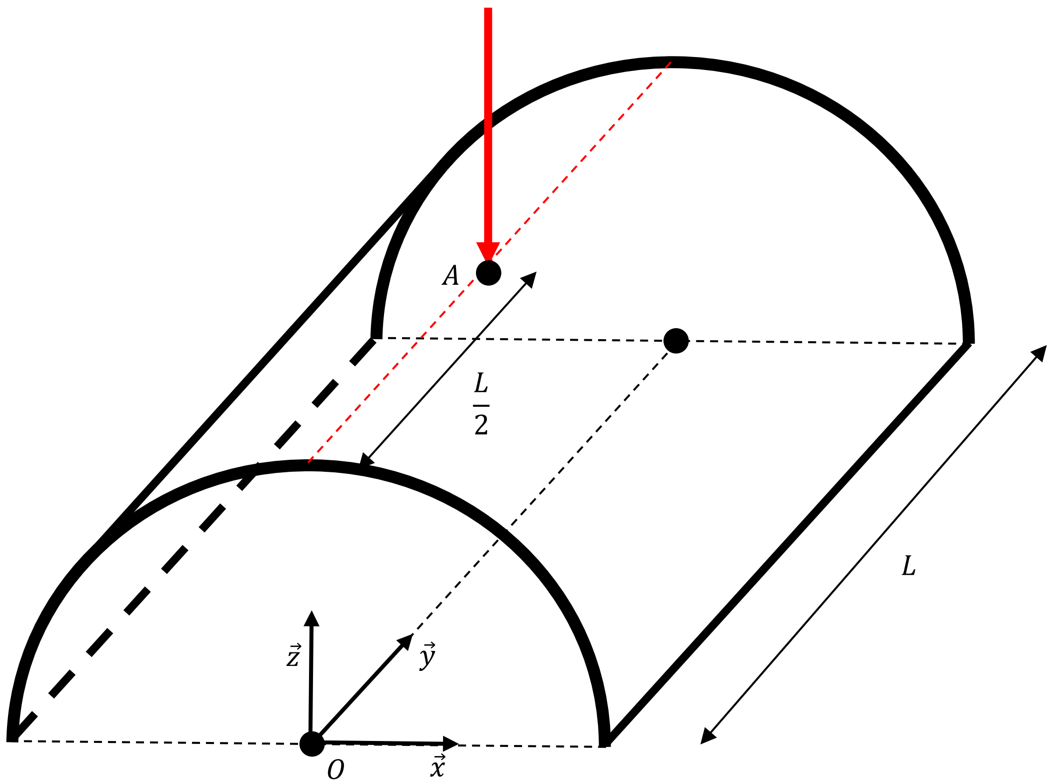
Question 4: Compte tenu de l'étude précédente, proposer un modèle simple sous forme d'action linéique pour représenter l'action de l'eau sur la structure étudiée

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{k(y)}dy = -2pR\vec{z}dy$$
$$\overrightarrow{k(y)} = -k\vec{z} = -2pR\vec{z}$$



Question 5: En déduire un modèle de l'action de l'eau sous forme d'une action ponctuelle $\vec{R}$ en un point A dont la position sera précisée

$$\vec{R} = -Lk\vec{z} = -2pLR\vec{z}$$



Question 6: En déduire le torseur $\{T\}$ de l'action de l'eau sur la structure en O

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} -2pLR\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -2pLR\vec{z} \\ -pL^2R\vec{x} \end{Bmatrix}_O$$

Méthode intégrale inutile ici :

Résultante	Moment
$\overrightarrow{dR} = -k\vec{z}dy$ $\vec{R} = \int_\Gamma \overrightarrow{dR} = \int_0^L -k\vec{z}dy = -kL\vec{z} = -2RLp\vec{z}$	$\overrightarrow{dM_0} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR} = y\vec{y} \wedge -k\vec{z}dy = -yk\vec{x}dy$ $\overrightarrow{M_0} = \int_\Gamma \overrightarrow{dM_0} = \int_0^L -yk\vec{x}dy = -k\int_0^L ydy\,\vec{x}$ $\overrightarrow{M_0} = -k\frac{L^2}{2}\vec{x} = -pL^2R\vec{x}$

Question 7: Montrer que la valeur de cette résultante est liée à la surface projetée $S_p = 2RL$

$$\vec{R} = -2RLp\vec{z} = -pS_p\vec{z}$$

Question 8: Déterminer la valeur numérique de la résultante de cette action

$$R = 2RLp = 2RL(p_0 + \rho gh) = 2 * 2{,}5 * 15 * (101325 + 1000 * 9{,}81 * 10)$$
$$R = 2RLp = 2RL(p_0 + \rho gh) = 75 * 199\,425 = 14\,956\,900\ N$$

Question 9: Donner la relation liant $\int_S -p\vec{n}dS$ et $\int_{S'} -p\vec{n}dS$

$$\vec{R} = \int_S -p\vec{n}dS + \int_{S'} -p\vec{n}dS = 0$$

Question 10: En déduire l'expression de la résultante de l'action de pression sur le demi-cylindre S en fonction de p, R et L

$$\int_{S'} -p\vec{n}dS = -\int_S -p\vec{n}dS = -\int_S -p(-\vec{z})dS = -\int_S p\vec{z}dS = -p\int_S dS\,\vec{z} = -2RpL\vec{z}$$