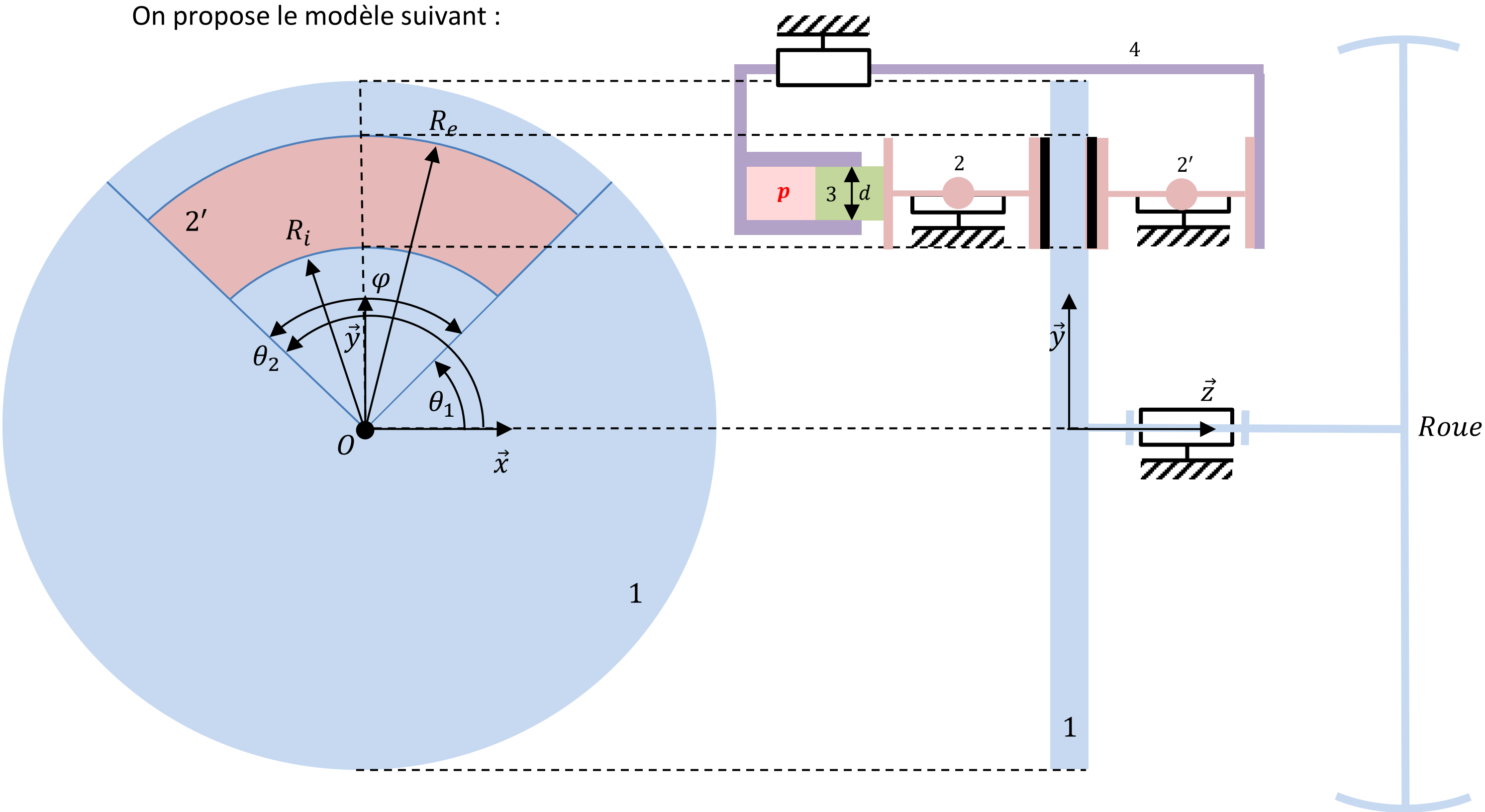
Adhérence - Frottement

Exercice 1: Frein à disque - Embrayage

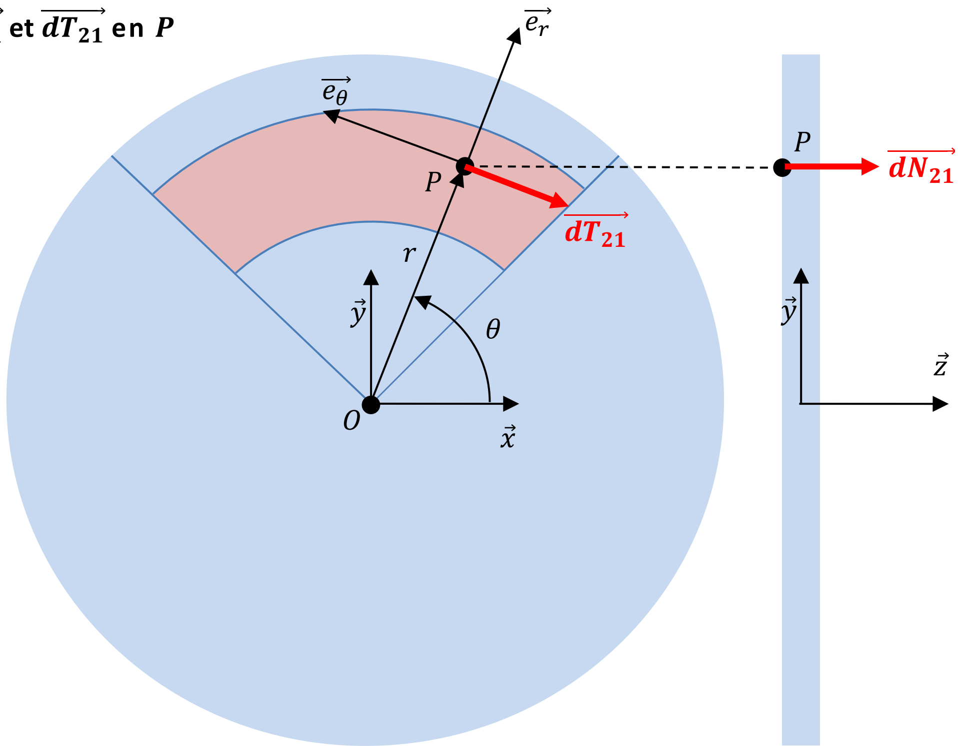
On propose le modèle suivant :



Question 1: Justifier l'hypothèse de répartition constante de pression au contact 1/2

La garniture va s'user rapidement. Tout point où la pression est plus importante va s'user plus vite. Le résultat sera une répartition constante assez rapidement après montage…

Question 2: Sur le schéma ci-dessous, faire apparaître les composantes de $\overrightarrow{dR_{21}}$ notées $\overrightarrow{dN_{21}}$ et $\overrightarrow{dT_{21}}$ en P



Question 3: Exprimer $\overrightarrow{dN_{21}}$ en P en fonction de p'

$$\overrightarrow{dN_{21}} = dN_{21}\vec{z} = p'dS\vec{z}$$

Question 4: En déduire l'expression de $\overrightarrow{dT_{21}}$ en P en fonction de f et p'

$$\overrightarrow{dT_{21}} = dT_{21}(-\overrightarrow{e_\theta}) = fdN_{21}(-\overrightarrow{e_\theta}) = -fp'dS\overrightarrow{e_\theta}$$

Question 5: Exprimer l'élément de force $\overrightarrow{dR_{21}}$ au contact entre la garniture et le disque et donner ses composantes suivant $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$

$$\overrightarrow{dR_{21}} = \overrightarrow{dN_{21}} + \overrightarrow{dT_{21}} = p'dS\vec{z} - fp'dS\overrightarrow{e_\theta} = p'(\vec{z} - f\overrightarrow{e_\theta})dS$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{dR_{21}} = p'(\vec{z} + f\sin\theta\,\vec{x} - f\cos\theta\,\vec{y})dS$$

$$dS = rdrd\theta$$

$$\overrightarrow{dR_{21}} = p'\vec{z}dS + p'f\sin\theta\,\vec{x}dS - p'f\cos\theta\,\vec{y}dS$$
$$\overrightarrow{dR_{21}} = p'\vec{z}rdrd\theta + p'f\sin\theta\,\vec{x}rdrd\theta - p'f\cos\theta\,\vec{y}rdrd\theta$$

Question 6: Calculer la résultante $\overrightarrow{R_{21}}$ de l'action entre la garniture 2 et le disque 1 (on gardera θ_1 et θ_2 dans les formules)

Comme la pression p' se répartie de manière uniforme, on sait que, on pourrait donner la composante normale de l'effort car la direction de la composante normale est constante. Toutefois, comme on veut tout, calculons l'intégrale :

$$\overrightarrow{R_{21}} = \int_S \overrightarrow{dR_{21}}$$

$$\overrightarrow{R_{21}} = \int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} p'\vec{z}rdrd\theta + \int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} p'f\sin\theta\,\vec{x}rdrd\theta - \int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} p'f\cos\theta\,\vec{y}rdrd\theta$$

$$\overrightarrow{R_{21}} = p'\int_{r=R_i}^{r=R_e} rdr \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} d\theta\,\vec{z} + p'f\int_{r=R_i}^{r=R_e} rdr \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \sin\theta\,d\theta\,\vec{x} - p'f\int_{r=R_i}^{r=R_e} rdr \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \cos\theta\,d\theta\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{R_{21}} = p'\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi\vec{z} + p'f\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}[-(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)]\vec{x} - p'f\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\vec{y}$$

$$\overrightarrow{R_{21}} = p'\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi\vec{z} - p'f\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\vec{x} - p'f\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\vec{y}$$

$$\overrightarrow{R_{21}} = \begin{pmatrix} -fp'\dfrac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ -fp'\dfrac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\ p'\dfrac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Rq : la composante suivant x est bien positive car $(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) < 0$

Question 7: En utilisant les données du problème, montrer que la composante suivant $\vec{y}$ de cette résultante est nulle

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\theta_2 - \sin\theta_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{R_{21}} = \begin{pmatrix} -fp'\dfrac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ 0 \\ p'\dfrac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Question 8: En déduire la relation liant la pression au contact disque/garnitures p' et l'effort presseur F – On remarquera que l'on fait apparaître la surface de contact

$$F = p'\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi$$

C'est la formule :

$$F = p'S$$

En effet, la surface est la différence de deux postions de disque :

$$S = S_e - S_i$$

Pour un disque : $S = \pi R^2 = (2\pi)\frac{R^2}{2} = (\varphi)\frac{R^2}{2}$ avec $\varphi = 2\pi$

$$S = \varphi\frac{{R_e}^2}{2} - \varphi\frac{{R_i}^2}{2} = \frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi$$

Question 9: Donner l'expression du petit moment en O $\overrightarrow{dM_{21}^{O}}$ créé par l'action $\overrightarrow{dR_{21}}$ en P et donner ses composantes suivant $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$

$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR_{21}}$$
$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = r\overrightarrow{e_r} \wedge p'(\vec{z} - f\overrightarrow{e_\theta})dS$$
$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = p'r(\overrightarrow{e_r} \wedge \vec{z} - f\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta})dS$$
$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = p'r(-\overrightarrow{e_\theta} - f\vec{z})dS$$
$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = -p'r(\overrightarrow{e_\theta} + f\vec{z})dS$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = -p'r(-\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y} + f\vec{z})dS$$
$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = p'r\sin\theta\,\vec{x}dS - p'r\cos\theta\,\vec{y}dS - p'rf\vec{z}dS$$

$$dS = rdrd\theta$$
$$\overrightarrow{dM_{21}^{O}} = p'r^2\sin\theta\,\vec{x}drd\theta - p'r^2\cos\theta\,\vec{y}drd\theta - p'r^2f\vec{z}drd\theta$$

Question 10: Déterminer le moment $\overrightarrow{M_{21}^{O}}$ en O de l'action de pression au contact garniture 2 / disque 1 (on gardera θ_1 et θ_2 dans les formules)

$$\overrightarrow{M_{21}^{O}} = \int_S \overrightarrow{dM_{21}^{O}}$$
$$\overrightarrow{M_{21}^{O}} = \int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} p'r^2\sin\theta\,\vec{x}drd\theta - \int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} p'r^2\cos\theta\,\vec{y}drd\theta - \int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} p'r^2f\vec{z}drd\theta$$
$$\overrightarrow{M_{21}^{O}} = p'\int_{r=R_i}^{r=R_e} r^2dr\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\sin\theta\,d\theta\,\vec{x} - p'\int_{r=R_i}^{r=R_e} r^2dr\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\cos\theta\,d\theta\,\vec{y} - p'f\int_{r=R_i}^{r=R_e} r^2dr\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} d\theta\,\vec{z}$$
$$\overrightarrow{M_{21}^{O}} = p'\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}[-(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)]\vec{x} - p'\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\vec{y} - p'f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi\vec{z}$$

On sait que $\sin\theta_2 - \sin\theta_1 = 0$

$$\overrightarrow{M_{21}^{O}} = -p'\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\vec{x} - p'f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi\vec{z}$$
$$\overrightarrow{M_{21}^{O}} = \begin{pmatrix} -p'\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ 0 \\ -p'f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Question 11: Donner le torseur $\{T_{21}\}$ de l'action de la plaquette 2 sur le disque 1 en O sous forme verticale

$$\{T_{21}\} = \begin{Bmatrix} -fp'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) & -p'\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ 0 & 0 \\ p'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}\varphi & -p'f\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}\varphi \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Question 12: Par analogie, donner le torseur de l'action $\{T_{2'1}\}$ sur le disque en O

La composante normale ($\vec{z}$) de la résultante change de signe, mais sa composante tangentielle reste opposée au mouvement.
Le moment autour de $\vec{x}$ change donc de signe. Celui autour de $\vec{z}$ ne change pas.

$$\{T_{2'1}\} = \begin{Bmatrix} -fp'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) & p'\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ 0 & 0 \\ -p'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}\varphi & -p'f\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}\varphi \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Question 13: En déduire le torseur de l'action des deux plaquettes sur le disque $\{T_{2U2'\to 1}\}$ en O

$$\{T_{2U2'\to 1}\} = \{T_{21}\} + \{T_{2'1}\}$$

$$\{T_{2U2'\to 1}\} = \begin{Bmatrix} -fp'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) & -p'\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ 0 & 0 \\ p'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}\varphi & -p'f\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}\varphi \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} -fp'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) & p'\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \\ 0 & 0 \\ -p'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}\varphi & -p'f\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}\varphi \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

$$\{T_{2U2'\to 1}\} = \begin{Bmatrix} -2fp'\dfrac{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2p'f\dfrac{R_e^{\,3} - R_i^{\,3}}{3}\varphi \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Question 14: Justifier l'intérêt d'utiliser deux plaquettes opposées au disque plutôt qu'une plus grande par exemple

On équilibre les actions, permettant d'annuler la résultante suivant z et le moment suivant x 😊

Question 15: Parmi les actions non nulles, préciser si elles sont utiles ou des contraintes pour le système

L'action suivant $\vec{x}$ est une contrainte, il faut dimensionner la liaison pivot pour la reprendre.
Le moment suivant $\vec{z}$ est utile, à l'origine du freinage 😊

Question 16: En partant du principe que l'action de la pression d'huile p sur la plaquette 2 s'oppose à l'action de la pression p' au contact de la plaquette 2 avec le disque 1, déterminer la relation entre la pression p d'huile, la surface du piston S, la pression au contact garnitures/disque p' et la surface du contact plaquette/disque S'

Comme il y a une répartition de pression constante sur une surface plane, on a égalité des résultantes en norme :

$$pS = p'S'$$

Question 17: Donner l'expression de S' en fonction de φ, R_i et R_e

$$S' = \frac{\varphi}{2}{R_e}^2 - \frac{\varphi}{2}{R_i}^2 = \frac{\varphi}{2}\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)$$

Question 18: En déduire l'expression de p' en fonction de p, r, φ, R_i et R_e

$$p' = p\frac{S}{S'} = p\frac{\pi r^2}{\frac{\varphi}{2}\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)} = \frac{2p\pi r^2}{\varphi\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)}$$

Question 19: Donner l'expression du couple C tel que $\vec{C} = C\vec{z}$ à l'origine du freinage en fonction de p', f, φ, R_i et R_e, de p, f, r, R_i et R_e puis de F, f, R_i et R_e

$$\boldsymbol{C = -2p'f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi}$$

$$p' = \frac{2p\pi r^2}{\varphi\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)}$$

$$C = -2\frac{2p\pi r^2}{\varphi\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)}f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi = \boldsymbol{-\frac{4}{3}pf\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{{R_e}^2 - {R_i}^2}\pi r^2}$$

Pour la 3eme, deux méthodes :

$$F = p\pi r^2 \Rightarrow C = -\frac{4}{3}p\pi r^2 f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{{R_e}^2 - {R_i}^2} = \boldsymbol{-2Ff\frac{2}{3}\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{{R_e}^2 - {R_i}^2}}$$

$$F = p'\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi \Rightarrow p' = \frac{2F}{\varphi\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)} \Rightarrow C = -2\frac{2F}{\varphi\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)}f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi$$

$$C = -2Ff\frac{2}{3}\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{{R_e}^2 - {R_i}^2}$$

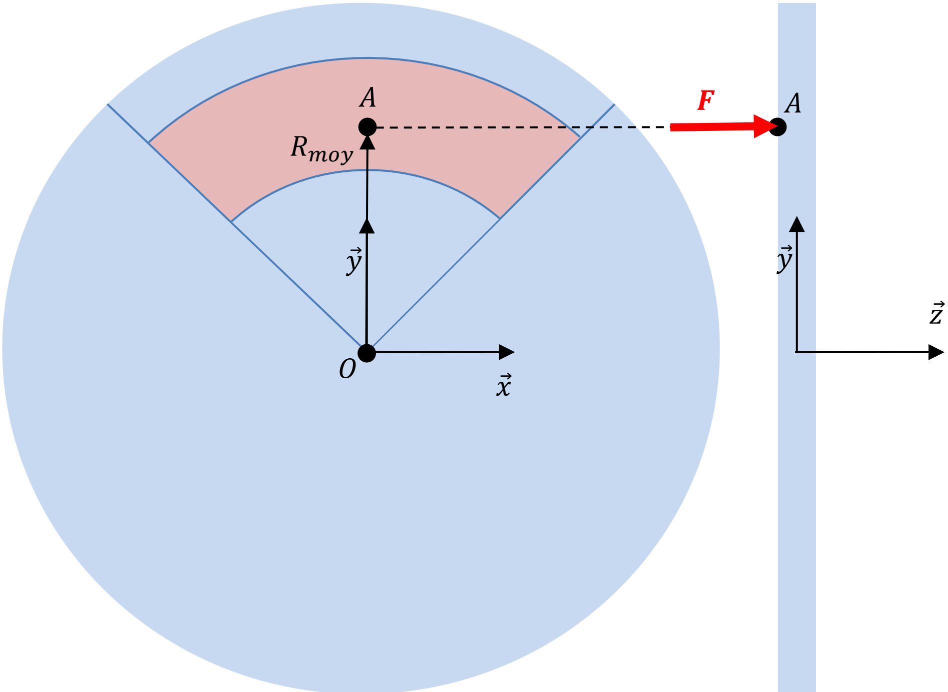
On pose :

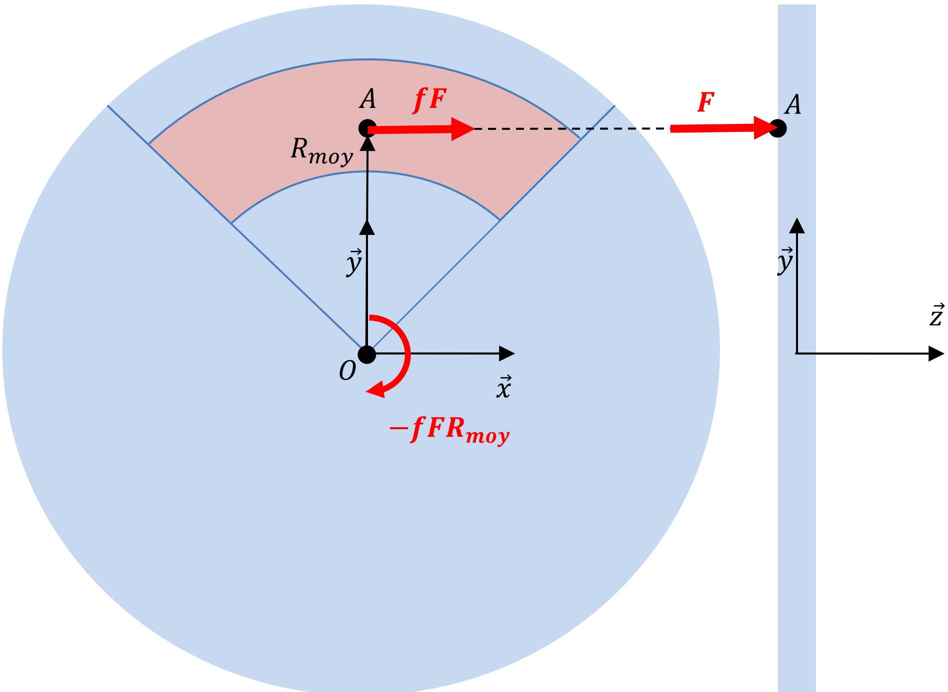
$$R_{moy} = \frac{2}{3}\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{{R_e}^2 - {R_i}^2}$$

Question 20: Pour une seule plaquette, donner l'expression du couple C_f de freinage obtenu en fonction de F, f et R_{moy}

$$C_f = -FfR_{moy}$$

Question 21: Proposer un modèle avec force ponctuelle représentant de l'action de la plaquette sur le disque pour la détermination de l'unique couple de freinage





Embrayage

Question 22: Etendre les résultats précédents afin d'exprimer le couple transmissible par un embrayage lorsque tous les disques adhèrent. On supposera que coefficients d'adhérence et de frottement sont identiques.

Le résultat est indépendant de φ, alors :

$$C_f = -nFfR_{moy}$$

Bilan

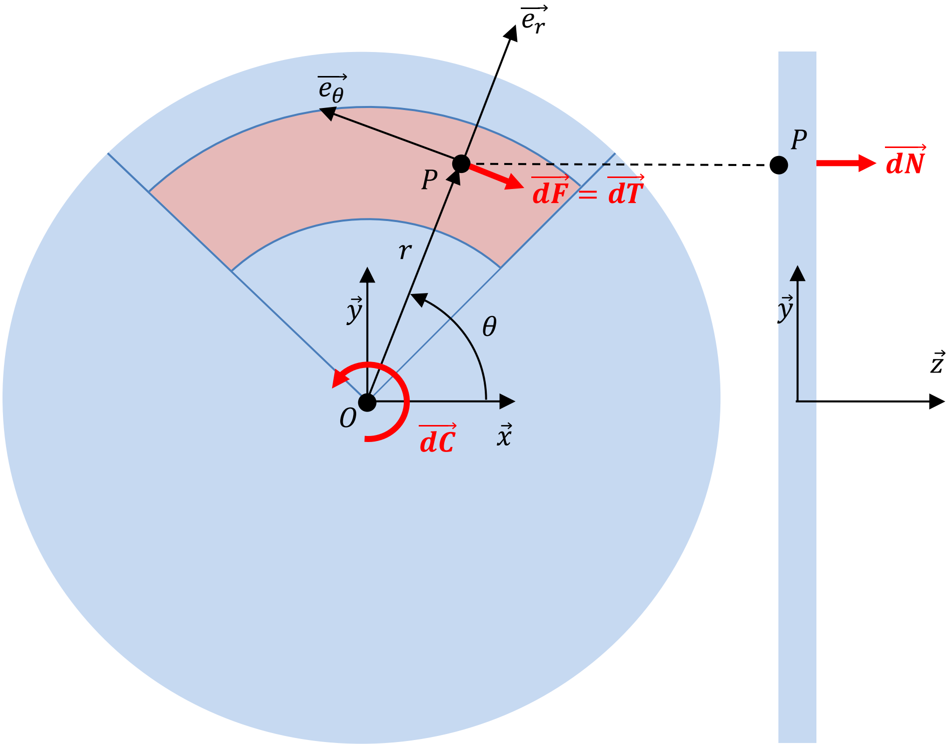
Question 23: Quels paramètres peut-on modifier afin d'augmenter le couple de freinage d'un frein à disque ou le couple transmissible d'un embrayage ?

On peut :

- Augmenter le nombre de surfaces frottantes
- Changer les matériaux dans le but d'augmenter le coefficient de frottement/adhérence
- Augmenter l'effort presseur
- Augmenter les rayons des surfaces frottantes

Méthode rapide

Question 24: Déterminer le couple C trouvé précédemment en posant un modèle à main levée du frein, en faisant apparaître la seule composante de $\overrightarrow{dF}$ en P créant un couple sur l'axe $(O,\vec{z})$, on donnant l'expression du moment associé, en l'intégrant, puis en mettant en relation la pression au contact p' et l'effort presseur F



La composante $dT = fdN = fpdS$ crée un moment autour de $(O,\vec{z})$ valant :

$$dC = -rdT = -rfdN = -rp'fdS = -r^2p'fdrd\theta$$

Il suffit alors d'intégrer cette composante :

$$C = \int_S dC = -fp' \int_{r=R_i}^{r=R_e} r^2\,dr \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} d\theta = -p'f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi$$

On relie alors effort presseur et pression :

$$F = p'S = p'\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi$$

$$p' = \frac{2F}{\varphi({R_e}^2 - {R_i}^2)}$$

Puis on remplace dans l'expression du moment :

$$C = -\frac{2F}{\varphi({R_e}^2 - {R_i}^2)} f \frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi$$

$$C = -Ff\frac{2}{3}\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{{R_e}^2 - {R_i}^2}$$

$$cqfd$$