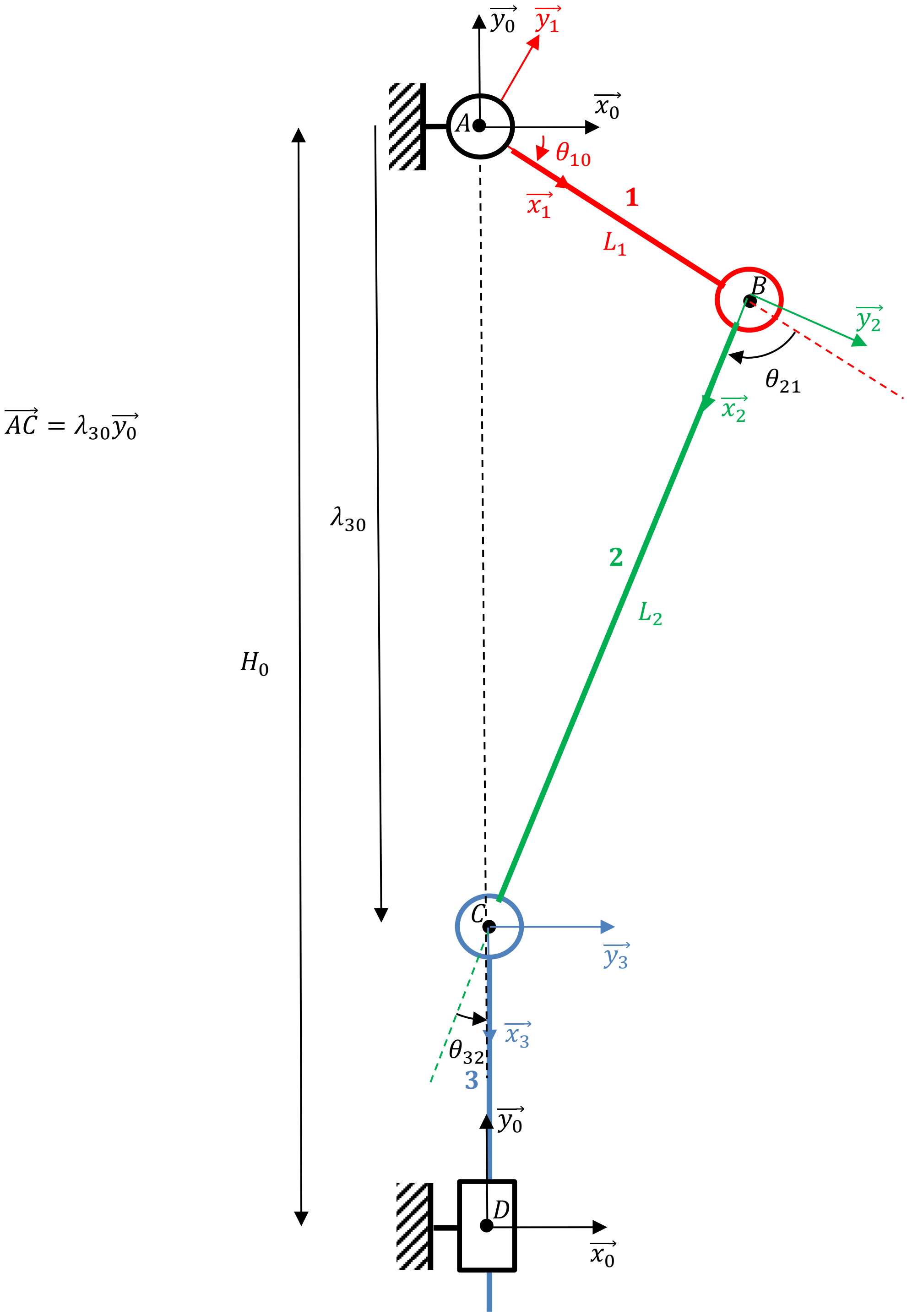
# *Fermeture cinématique*

## Exercice 1: Bielle Manivelle



**Question 1: Identifier le nombre d'inconnues et d'équations du mécanisme et estimer sa mobilité.**

$$I_c = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$
$$\gamma = L - P + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$
$$E_c = 6\gamma = 6 \quad ; \quad E_c^{2D} = 3 \; (mécanisme \; plan)$$
$$m = 1$$

On aura donc 3 équations pour 3 inconnues.

**Question 2: Ecrire la fermeture de chaîne cinématique du mécanisme.**

$$\{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} = \{0\}$$

**Question 3: Ecrire les torseurs cinématiques plans associés à chaque liaison**

| |
|---|
| $\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$ |
| $\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$ |
| $\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$ |
| $\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$ |

**Question 4: Exprimer tous ces torseurs au point $B$**

| | |
|---|---|
| $\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ -L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B$ | $\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}}$ <br> $= L_2\overrightarrow{x_2} \wedge R_{32}\overrightarrow{z_2} = -L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2}$ |
| $\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} R_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$ | |
| $\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B$ | $\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}}$ <br> $= -L_1\overrightarrow{x_1} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_1} = L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1}$ |
| $\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B$ | |

**Question 5: En déduire les deux équations vectorielles de la fermeture de chaîne.**

$$\{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{32}\vec{z_0} \\ -L_2 R_{32}\vec{y_2} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_{21}\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_{10}\vec{z_0} \\ L_1 R_{10}\vec{y_1} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\vec{y_0} \end{Bmatrix}_B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} (R_{32} + R_{21} + R_{10})\vec{z_0} \\ V_{03}\vec{y_0} + L_1 R_{10}\vec{y_1} - L_2 R_{32}\vec{y_2} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

**Question 6: Projeter ces deux équations dans la base 0 afin d'obtenir 3 équations scalaires.**

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \ (1) \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (2) \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (3) \end{cases}$$

**Question 7: Résoudre le système obtenu afin d'exprimer toutes les inconnues cinématiques en fonction de $\Omega_{10}$**

| | |
|---|---|
| $R_{32}$<br>Equation (2) | $R_{32} = \frac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}}$ |
| $R_{21}$<br>Equation (1) | $R_{21} = -R_{32} - \boldsymbol{R_{10}}$<br>$R_{21} = -\frac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}} - \boldsymbol{R_{10}}$<br>$R_{21} = -\boldsymbol{R_{10}} \frac{L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})}$ |
| $V_{30}$<br>Equation (3) | $V_{03} = -L_1 \cos\theta_{10} \boldsymbol{R_{10}} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32}$<br>$V_{03} = -L_1 \cos\theta_{10} \boldsymbol{R_{10}} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) \frac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}}$<br>$V_{03} = L_1 \boldsymbol{R_{10}} \left[\cos(\theta_{21} + \theta_{10}) \frac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})} - \cos\theta_{10}\right]$<br>$V_{30} = L_1 \boldsymbol{R_{10}} \left[\cos\theta_{10} - \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) \frac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$<br>$V_{30} = L_1 \boldsymbol{R_{10}} \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$ |

**Question 8: En déduire la relation $V_{30} = f(\Omega_{10})$ et la comparer à celle obtenue à l'issue de la fermeture géométrique mise en place précédemment.**

$$V_{30} = L_1 \Omega_{10} \left[ \cos \theta_{10} - \frac{\sin \theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})} \right]$$

Nous obtenons le même résultat qu'avec la fermeture géométrique. Pour le tracé des courbes et l'accélération, se reporter au TD précédent de fermeture géométrique.

Attention :

Concernant la relation entre $\dot{\theta}_{10}$ et $\Omega_{10}$, comme on paramètre toujours les angles et les rotations autur d'un même vecteur, $\vec{z}$ en plan, on a la relation :

$$\overrightarrow{\Omega_{10}} = \Omega_{10} \overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_0} \Rightarrow \dot{\theta}_{10} = \Omega_{10}$$

Concernant la relation entre $\dot{\lambda}_{30}$ et $V_{30}$, cela n'est pas trivial ! Tout dépend des choix effectués lors des deux démarches. Dans notre cas, on a posé :

$$\left. \begin{array}{c} \overrightarrow{AC} = \lambda_{30} \overrightarrow{y_0} \Rightarrow \vec{V}(C,3/0) = \left. \dfrac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \right)_0 = \dot{\lambda}_{30} \overrightarrow{y_0} \\ \{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} \Rightarrow \vec{V}(C,0/3) = V_{03} \overrightarrow{y_0} \quad ; \quad \vec{V}(C,3/0) = V_{30} \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\lambda}_{30} = V_{30}$$

Si on avait fait d'autres choix de paramétrage ou pour le torseur $\{\mathcal{V}_{03}\}$, on pourrait avoir un signe différent. Exemple, si on avait posé : $\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{03} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_3}$

**Question 9: Déterminer la matrice $K_c$ du système linéaire cinématique du problème plan traité**

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \ (1) \\ -L_1 \sin \theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (2) \\ V_{03} + L_1 \cos \theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (3) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin \theta_{10} & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 0 \\ L_1 \cos \theta_{10} & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{32} \\ R_{21} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin \theta_{10} & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 0 \\ L_1 \cos \theta_{10} & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$