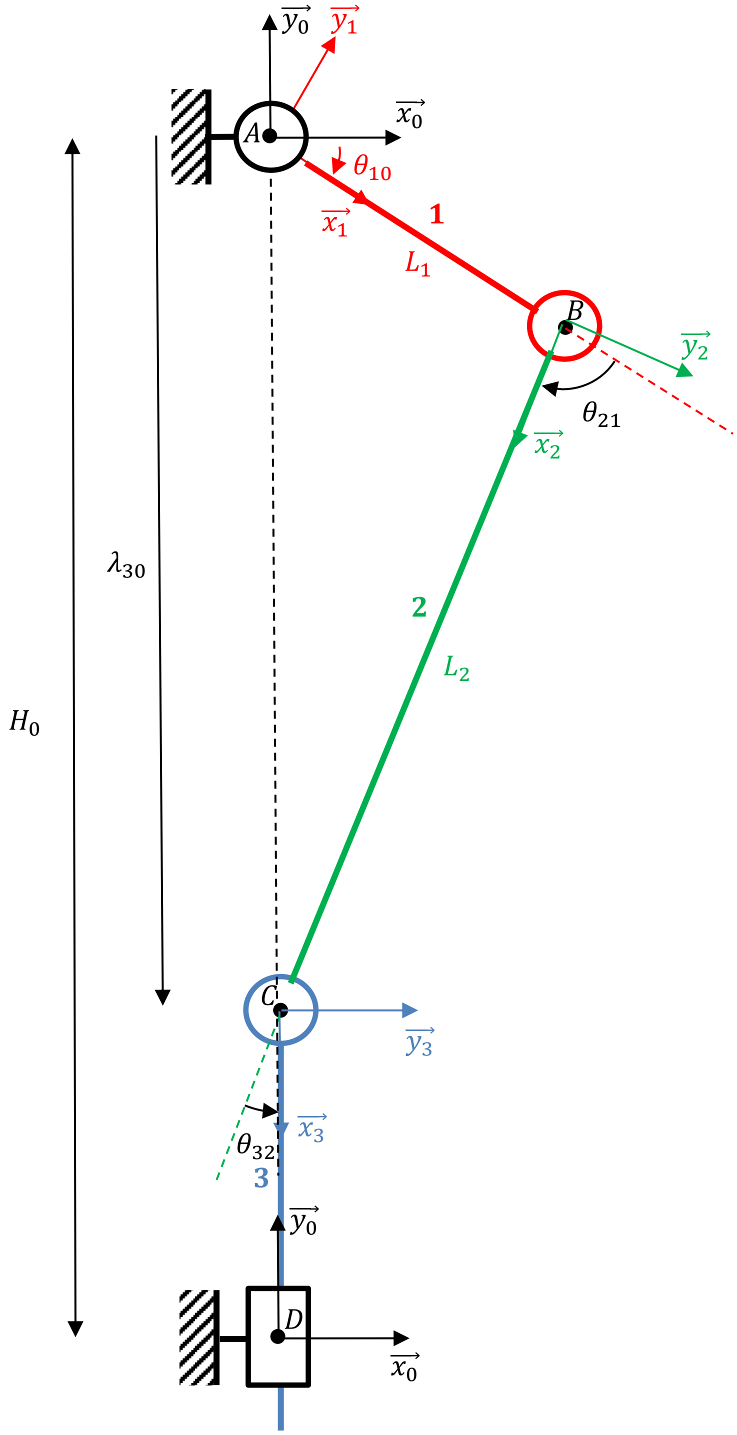
Fermeture géométrique

Exercice 1: Bielle Manivelle

$\overrightarrow{AC} = \lambda_{30}\overrightarrow{y_0}$



Géométrie – Equations

Question 1: Obtenir l'équation vectorielle issue de la relation de Chasles de la fermeture géométrique du mécanisme.

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$
$$L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} - \lambda_{30}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

Remarque : le cours dit de passer par toutes les liaisons, même si le paramétrage proposé permet de ne pas considérer $\overrightarrow{CD}$. Dans ce cas :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{DA} = H_0\overrightarrow{y_0}$$

Ne pas faire l'erreur avec $\overrightarrow{CD}$ du fait que $\lambda_{30} < 0$ sur le schéma et compte tenu du paramétrage. Mieux vaut utiliser Chasles :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\lambda_{30}\overrightarrow{y_0} - H_0\overrightarrow{y_0} = -(\lambda_{30} + H_0)\overrightarrow{y_0}$$

D'où :

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = -\lambda_{30}\overrightarrow{y_0}$$

Question 2: Projeter cette équation dans la base $\mathfrak{B}_0$ afin d'obtenir deux équations scalaires.

$$L_1 \cos\theta_{10}\,\overrightarrow{x_0} + L_1 \sin\theta_{10}\,\overrightarrow{y_0} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,\overrightarrow{x_0} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,\overrightarrow{y_0} - \lambda_{30}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} L_1\cos\theta_{10} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = 0 \\ L_1\sin\theta_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \end{cases}$$

Question 3: Donner l'équation issue de la fermeture angulaire du mécanisme

$$(\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{x_0}}) =$$
$$\theta_{21} + \theta_{10} + \theta_{32} + \frac{\pi}{2} = 0$$

Géométrie – Méthode 1 : Substitution de $sin(\theta_{21}+\theta_{10})$

Question 4: Exprimer $\cos(\theta_{21}+\theta_{10})$ en fonction de L_1, L_2 et $\cos\theta_{10}$

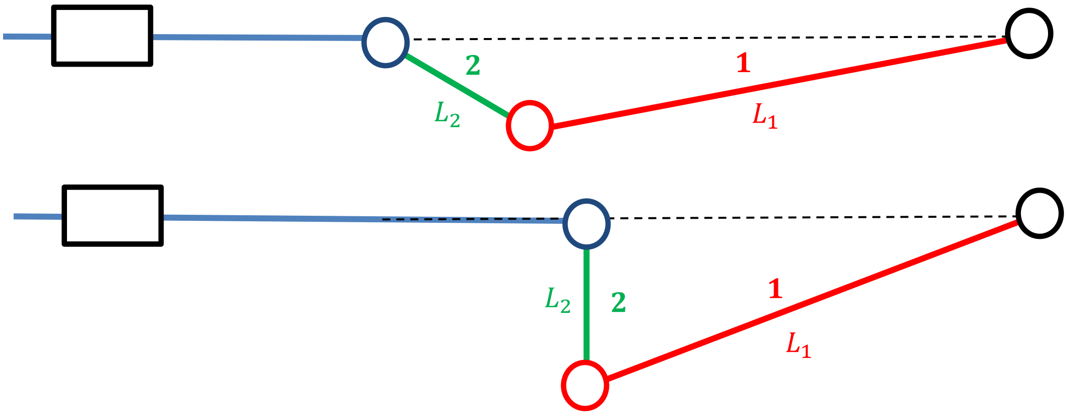
$$L_1\cos\theta_{10} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = 0$$
$$\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}$$

Question 5: Préciser la condition imposée par cette équation sur le mécanisme et l'illustrer à l'aide d'un schéma.

$$\cos\theta_{10} \in [-1;1]$$
$$L_2 \geq L_1$$

Si

$$L_2 < L_1$$



Question 6: Exprimer $\sin(\theta_{21}+\theta_{10})$ en fonction de L_1, L_2 et $\sin\theta_{10}$

$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10})} = \pm\sqrt{1-\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10}}$$
$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \pm\frac{1}{L_2}\sqrt{{L_2}^2-{L_1}^2\cos^2\theta_{10}}$$

Remarque : on détaillera un peu plus tard le fait que le $\pm$ dépend de θ_{10} et θ_{20}

Question 7: En déduire la relation entrée sortie recherchée

On réécrit alors l'équation 2 :

$$L_1\sin\theta_{10} \pm \sqrt{{L_2}^2-{L_1}^2\cos^2\theta_{10}} - \lambda_{30} = 0$$

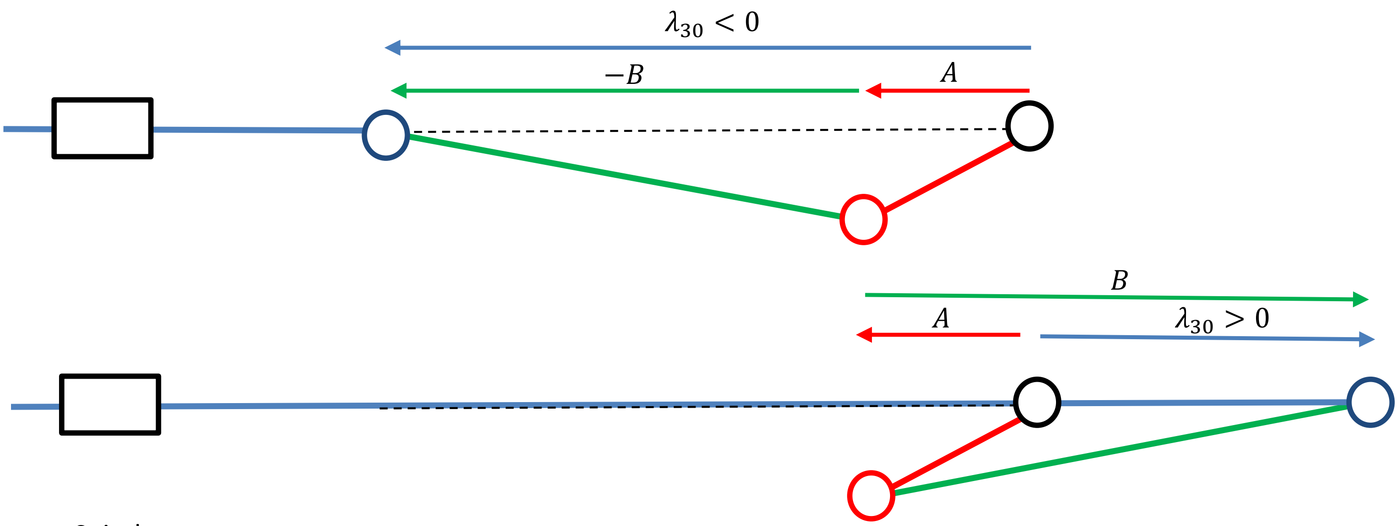
D'où :

$$\lambda_{30} = L_1\sin\theta_{10} \pm \sqrt{{L_2}^2-{L_1}^2\cos^2\theta_{10}}$$

Question 8: Expliquer à l'aide d'un schéma la différence entre les deux solutions obtenues et en déduire celle qui correspond au problème traité.

Il existe deux solutions à ce problème, dépendant de la façon dans laquelle a été monté le système.

$$\lambda_{30} = -A \pm \mathrm{B} \quad ; \quad (A, B) > 0$$



Soit dans notre cas :

$$\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}$$

Sinon : Dans le cas étudié, il est nécessaire de regarder « avec les mains » la bonne solution en regardant lorsque $\sin\theta_{10} < 0$, cas où $\lambda_{30} < 0$ le signe de $\pm\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}$:

$$\pm\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}} = \lambda_{30} - L_1 \sin\theta_{10} < 0$$

D'où :

$$\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}$$

Question 9: Que se passe-t-il concernant le mouvement du piston si $L_1 = L_2 = L$

$$\lambda_{30} = L\sin\theta_{10} \pm \sqrt{\mathrm{L}^2 - \mathrm{L}^2\cos^2\theta_{10}} = L\sin\theta_{10} \pm \mathrm{L}\sqrt{1 - \cos^2\theta_{10}} = L\sin\theta_{10} \pm \mathrm{L}\sqrt{\sin^2\theta_{10}}$$
$$\lambda_{3/0} = L(\sin\theta_{10} \pm |\sin\theta_{10}|)$$

Il existe une multitude de solutions (faire tourner le modèle SW en prenant les différentes pièces les unes après les autres pour les montrer) : (Ne pas faire cette usine à gaz avec les élèves…)

$$\lambda_{3/0} = \begin{cases} 0\ \forall\theta_{10} \\ 2L\sin\theta_{10}\ \ \forall\theta_{10} \\ \begin{cases} 2L\sin\theta_{10}\ \text{ si } \theta_{10}\in[0,\pi] \\ 0 \text{ si } \theta_{10}\in[0,-\pi] \end{cases} \\ \begin{cases} 2L\sin\theta_{10}\ \text{ si } \theta_{10}\in[0,\pi] \\ 0 \text{ si } \theta_{10}\in[0,-\pi] \end{cases} \end{cases}$$

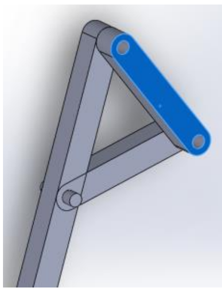
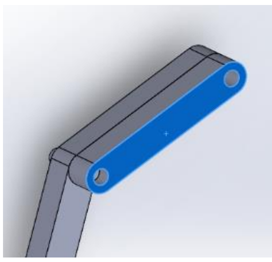
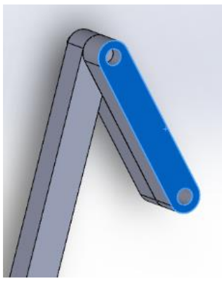
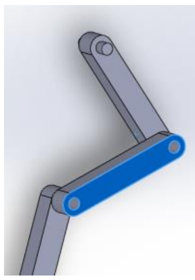
Démonstration : La difficulté de cette démonstration réside dans le fait que le $\pm$ que l'on a introduit dépend de $\theta_{21}+\theta_{10}$

Deux solutions sont obtenues simplement, elles correspondent aux solutions où le + reste + et le – reste – quel que soit θ_{10} :

$$\lambda_{3/0} = \begin{cases} L(\sin\theta_{10}+|\sin\theta_{10}|) = \begin{cases} 2L\sin\theta_{10}\ \text{ si } \theta_{10}\in[0,\pi] \\ 0 \text{ si } \theta_{10}\in[0,-\pi] \end{cases} \\ \boldsymbol{L(\sin\theta_{10}-|\sin\theta_{10}|)} = \begin{cases} \boldsymbol{0 \text{ si } \theta_{10}\in[0,\pi]} \\ \boldsymbol{2L\sin\theta_{10}\ \text{ si } \theta_{10}\in[0,-\pi]} \end{cases} \end{cases}$$

Concernant les 2 autres, reprenons l'origine du $\pm$:

$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \pm\sqrt{1-\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10}} = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta_{10}} = \pm|\sin\theta_{10}|$$

$\theta_{10}\in[0,\pi]$ $\|\sin\theta_{10}\| = +\sin\theta_{10}$ Pièce 1 - demi-cercle supérieur		$\theta_{10}\in[0,-\pi]$ $\|\sin\theta_{10}\| = -\sin\theta_{10}$ Pièce 1 - demi-cercle inférieur	
$\theta_{21}+\theta_{10}\in[0,\pi]$ $\sin(\theta_{21}+\theta_{10})>0$	$\theta_{21}+\theta_{10}\in[0,-\pi]$ $\sin(\theta_{21}+\theta_{10})<0$	$\theta_{21}+\theta_{10}\in[0,\pi]$ $\sin(\theta_{21}+\theta_{10})>0$	$\theta_{21}+\theta_{10}\in[0,-\pi]$ $\sin(\theta_{21}+\theta_{10})<0$
			
$\sin(\theta_{21}+\theta_{10})$ $=+\|\sin\theta_{10}\|$	$\sin(\theta_{21}+\theta_{10})$ $=-\|\sin\theta_{10}\|$	$\sin(\theta_{21}+\theta_{10})$ $=+\|\sin\theta_{10}\|$	$\sin(\theta_{21}+\theta_{10})$ $=-\|\sin\theta_{10}\|$
$L(\sin\theta_{10}+\|\sin\theta_{10}\|)$ $L(\sin\theta_{10}++\sin\theta_{10})$	$L(\sin\theta_{10}-\|\sin\theta_{10}\|)$ $L(\sin\theta_{10}-+\sin\theta_{10})$	$L(\sin\theta_{10}+\|\sin\theta_{10}\|)$ $L(\sin\theta_{10}+-\sin\theta_{10})$	$L(\sin\theta_{10}-\|\sin\theta_{10}\|)$ $L(\sin\theta_{10}--\sin\theta_{10})$
$2L\sin\theta_{10}$	0	0	$2L\sin\theta_{10}$

On voit que le $\pm$ de la solution $\lambda_{30} = L(\sin\theta_{10}\pm|\sin\theta_{10}|)$ dépend de θ_{10} et que l'on a 4 solutions possibles. Le saut d'une solution à l'autre se fait aléatoirement au passage à l'horizontale. En gros, « dès que » la pièce 2 tend à partir seule ou avec la pièce 1, on a + ou – dans la fonction. Et selon que l'on est en partie supérieure ou inférieure, la valeur absolue donne + ou -.

Géométrie – Méthode 2 : $cos^2 x + sin^2 x = 1$

Question 10: Exprimer $\cos(\theta_{21}+\theta_{10})$ et $\sin(\theta_{21}+\theta_{10})$

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\dfrac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dfrac{\lambda_{30}}{L_2} - \dfrac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10} \end{cases}$$

Question 11: Exploiter la propriété $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ afin d'obtenir le même résultat qu'avec la méthode 1.

$$\begin{cases} \cos^2(\theta_{21}+\theta_{10}) = \left[\dfrac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10} \\ \sin^2(\theta_{21}+\theta_{10}) = \left[\dfrac{\lambda_{30}}{L_2} - \dfrac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10}\right]^2 \end{cases}$$

$$\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10}) + \sin^2(\theta_{21}+\theta_{10}) = 1$$
$$\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10} + \left[\frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10}\right]^2 = 1$$

<table>
<tr><th>Bonne méthode</th><th>Mauvaise méthode</th></tr>
<tr><td>
$$L_1{}^2\cos^2\theta_{10} + [\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}]^2 = L_2{}^2$$
$$L_2{}^2 - L_1{}^2\cos^2\theta_{10} = [\lambda_{3/0} - L_1\sin\theta_{10}]^2$$
$$L_2{}^2 - L_1{}^2\cos^2\theta_{10} > 0 \ car\ L_2 > L_1$$
$$\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10} = \pm\sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2\cos^2\theta_{10}}$$
$$\lambda_{30} = L_1\sin\theta_{10} \pm \sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2\cos^2\theta_{10}}$$
</td><td>
$$\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10} + \left[\frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10}\right]^2 = 1$$
$$\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10} + \frac{\lambda_{30}{}^2}{L_2{}^2} + \frac{L_1{}^2}{L_2{}^2}\sin^2\theta_{10} - 2\lambda_{30}\frac{L_1}{L_2{}^2}\sin\theta_{10} = 1$$
$$\boldsymbol{\lambda_{30}}{}^2 - 2L_1\sin\theta_{10}\,\boldsymbol{\lambda_{30}} + L_1{}^2\cos^2\theta_{10} + L_1{}^2\sin^2\theta_{10} - L_2{}^2 = 0$$
$$\boldsymbol{\lambda_{30}}{}^2 - 2L_1\sin\theta_{10}\,\boldsymbol{\lambda_{30}} + L_1{}^2 - L_2{}^2 = 0$$
$$\Delta = 4L_1{}^2\sin^2\theta_{10} - 4(L_1{}^2 - L_2{}^2)$$
$$\Delta = 4(L_1{}^2\sin^2\theta_{10} - L_1{}^2 + L_2{}^2)$$
$$\Delta = 4[L_1{}^2(\sin^2\theta_{10} - 1) + L_2{}^2]$$
$$\Delta = 4[L_2{}^2 - L_1{}^2\cos^2\theta_{10}]$$
Comme
$$L_2 \geq L_1$$
$$L_2\cos^2\theta_{10} \geq L_1\cos^2\theta_{10}$$
Et
$$L_2\cos^2\theta_{10} \leq L_2 \ car\ \cos^2\theta_{10}\,\epsilon[0;1]$$
D'où :
$$L_2{}^2 \geq L_1{}^2\cos^2\theta_{10}$$
$$\Delta \geq 0$$
</td></tr>
</table>

	$\lambda_{30} = \frac{2L_1 \sin\theta_{10} \pm \sqrt{4\left[{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}\right]}}{2}$ $\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} \pm \sqrt{\left[{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}\right]}$

Cinématique - Vitesse

Question 12: La relation géométrique obtenue précédemment est-elle implicite ou explicite.

C'est une relation explicite : $\lambda_{30} = f(\theta_{10})$

$$\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}$$

Question 13: En déduire la relation en vitesse $\dot{\lambda}_{30} = f(\dot{\theta}_{10})$

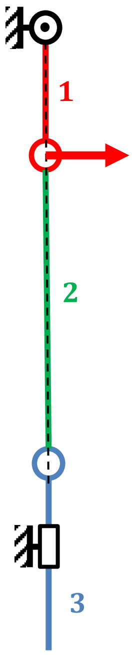
$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \cos\theta_{10} - \frac{-2\dot{\theta}_{10}{L_1}^2(-\sin\theta_{10})\cos\theta_{10}}{2\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}$$

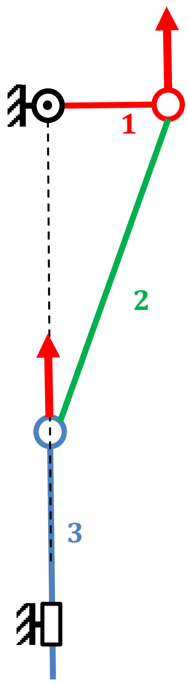
$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{L_1 \sin\theta_{10}\cos\theta_{10}}{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}\right]$$

Question 14: Vérifiez dans les deux cas particuliers suivants la logique de vos résultats

$\theta_{10} = -\frac{\pi}{2}$

$\dot{\lambda}_{30} = 0$





$\theta_{10} = -\frac{\pi}{2}$

$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1$

Question 15: En reprenant le système d'équations obtenue initialement, déterminer l'expression $\tan(\theta_{21} + \theta_{10})$ en fonction de L_1, L_2 et $\cos\theta_{10}$

$$\begin{cases} L_1 \cos\theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) = \frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10} = \frac{\lambda_{30} - L_1 \sin\theta_{10}}{L_2} \end{cases}$$

$$\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) = \frac{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})}{\cos(\theta_{21} + \theta_{10})} = \frac{\frac{\lambda_{30} - L_1 \sin\theta_{10}}{L_2}}{-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}} = \frac{L_1 \sin\theta_{10} - \lambda_{30}}{L_1 \cos\theta_{10}}$$

$$\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) = \frac{L_1 \sin\theta_{10} - \lambda_{30}}{L_1 \cos\theta_{10}}$$

On remplace $\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}$

$$\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) = \frac{L_1 \sin\theta_{10} - \left(L_1 \sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}\right)}{L_1 \cos\theta_{10}}$$

$$\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) = \frac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}}{L_1 \cos\theta_{10}}$$

Question 16: Faire apparaître $\tan(\theta_{21} + \theta_{10})$ dans l'expression de $\dot{\lambda}_{30}$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{L_1 \sin\theta_{10} \cos\theta_{10}}{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}}\right]$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \sin\theta_{10} \frac{\cos\theta_{10}}{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}}\right]$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \sin\theta_{10} \frac{1}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$$

Cinématique - Accélération

Question 17: Exprimer l'accélération $\ddot{\lambda}_{30}$ en fonction de L_1, θ_{10}, θ_{21}, $\dot{\theta}_{10}$, $\dot{\theta}_{21}$ en supposant que $\dot{\theta}_{10}$ est une constante.

Rappel ;)

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$$

On choisit de dériver l'expression qui a du $\tan \theta_{20}$ afin de coller avec les résultats de la fermeture cinématique. On pourrait prendre le résultat qui est juste fonction de θ_{10} obtenu avant.

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}_{30} = \ddot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right] \\ + \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos'\theta_{10} - \frac{\sin'\theta_{10}\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) - \sin\theta_{10}\tan'(\theta_{21}+\theta_{10})}{\tan^2(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}_{30} = \ddot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right] \\ + \dot{\theta}_{10} L_1 \left[-\dot{\theta}_{10}\sin\theta_{10} \right. \\ \left. - \frac{\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{10}\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) - \left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\sin\theta_{10}\dfrac{1}{\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10})}}{\tan^2(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}_{30} = \ddot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right] \\ + \dot{\theta}_{10} L_1 \left[-\dot{\theta}_{10}\sin\theta_{10} - \dot{\theta}_{10}\frac{\cos\theta_{10}\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}{\tan^2(\theta_{21}+\theta_{10})} + \left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\frac{\dfrac{\sin\theta_{10}}{\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10})}}{\dfrac{\sin^2(\theta_{21}+\theta_{10})}{\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10})}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}_{30} = \ddot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right] \\ + \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\frac{\sin\theta_{10}}{\sin^2(\theta_{21}+\theta_{10})} - \dot{\theta}_{10}\left(\sin\theta_{10} + \frac{\cos\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right)\right]\end{aligned}$$

Si $\dot{\theta}_{10} = cste, \ddot{\theta}_{10} = 0$

$$\ddot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\frac{\sin\theta_{10}}{\sin^2(\theta_{21}+\theta_{10})} - \dot{\theta}_{10}\left(\sin\theta_{10} + \frac{\cos\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right)\right]$$

Question 18: En reprenant l'une des équations établies lors de la fermeture géométrique, établir la relation entre $\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)$ et $\dot{\theta}_{10}$.

$$\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}$$

$$-\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dot{\theta}_{10}\frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10}$$

D'où

$$\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right) = -\dot{\theta}_{10}\frac{L_1}{L_2}\frac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})}$$

Cette formule est la même que dans la fermeture cinématique lorsque l'on ajoute $R_{21}+R_{10}$

Question 19: En déduire l'expression de l'accélération obtenue précédemment en fonction de $\dot{\theta}_{10}$ et de la géométrie.

$$\ddot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10}L_1\left[\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\frac{\sin\theta_{10}}{\sin^2(\theta_{21}+\theta_{10})} - \dot{\theta}_{10}\left(\sin\theta_{10}+\frac{\cos\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right)\right]$$
$$\ddot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10}L_1\left[-\dot{\theta}_{10}\frac{L_1}{L_2}\frac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})}\frac{\sin\theta_{10}}{\sin^2(\theta_{21}+\theta_{10})} - \dot{\theta}_{10}\left(\sin\theta_{10}+\frac{\cos\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right)\right]$$
$$\ddot{\lambda}_{30} = -\dot{\theta}_{10}^{\ 2}L_1\left[\frac{L_1}{L_2}\frac{\sin^2\theta_{10}}{\sin^3(\theta_{21}+\theta_{10})} + \sin\theta_{10} + \frac{\cos\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

$$\ddot{\lambda}_{30} = -\dot{\theta}_{10}^{\ 2}L_1\left[\frac{L_1}{L_2}\frac{\sin^2\theta_{10}}{\sin^3(\theta_{21}+\theta_{10})} + \sin\theta_{10} + \frac{\cos\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

On peut enfin si on le souhaite tout exprimer en fonction de θ_{10} (dans ce cas, il valait mieux avant ne pas faire la transformation précédente où on voulait faire apparaître le $\tan(\theta_{21}+\theta_{10})$ dans la vitesse, mais dériver la vitesse qui était juste en fonction de θ_{10})

$$\begin{cases} \tan(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dfrac{\sqrt{{L_2}^2-{L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dfrac{\lambda_{30}-L_1\sin\theta_{10}}{L_2} = -\dfrac{\sqrt{{L_2}^2-{L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_2} \end{cases}$$

$$\ddot{\lambda}_{30} = -\dot{\theta}_{10}^{\ 2}L_1\left[-L_1{L_2}^2\frac{\sin^2\theta_{10}}{\left({L_2}^2-{L_1}^2\cos^2\theta_{10}\right)^{\frac{3}{2}}} + \sin\theta_{10} + \frac{\cos\theta_{10}\sqrt{{L_2}^2-{L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}\right]$$

Remarque : pour obtenir la valeur de $(\theta_{21}+\theta_{10})$, il faut utiliser la fonction $\tan^{-1}$.

Mais, en supposant par exemple $L_1 = L_2$: $\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_{10}}}{\cos\theta_{10}}$

Lorsque $\theta_{10} = 0$, $(\theta_{21} + \theta_{10}) = -\pi$	Lorsque $\theta_{10} = -\pi$, $(\theta_{21} + \theta_{10}) = 0$
$\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta_{10}}}{\cos\theta_{10}} = 0$ $(\theta_{21} + \theta_{10}) = -\pi$	$\tan(\theta_{21} + \theta_{10}) = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta_{10}}}{\cos\theta_{10}} = 0$ $(\theta_{21} + \theta_{10}) = 0$

Il faut donc :

$$\theta_{21} + \theta_{10} = \begin{cases} \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}\right] - \pi \; si \;\; \cos\theta_{10} > 0 \\ \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}\right] si \;\; \cos\theta_{10} < 0 \end{cases}$$

$(\theta_{21} + \theta_{10})$ se balade entre $-\pi$ et 0 sauf dans le cas particulier où $L_1 = L_2$ où il pourrait faire des tours et des tours dans que le piston ne se déplace.

Question 20: Justifier le fait que dans la plupart des moteurs bielle/manivelle, le paramètre λ avoisine 3

Plus λ est grand, plus l'encombrement est important.
On remarque une accélération parasite qui va générer des efforts parasites dans le moteur lorsque le piston est en position haute. Il faut donc l'éliminer sans pour autant avoir un encombrement trop important.
On voit que la valeur $\lambda = 3$ est un bon compromis.