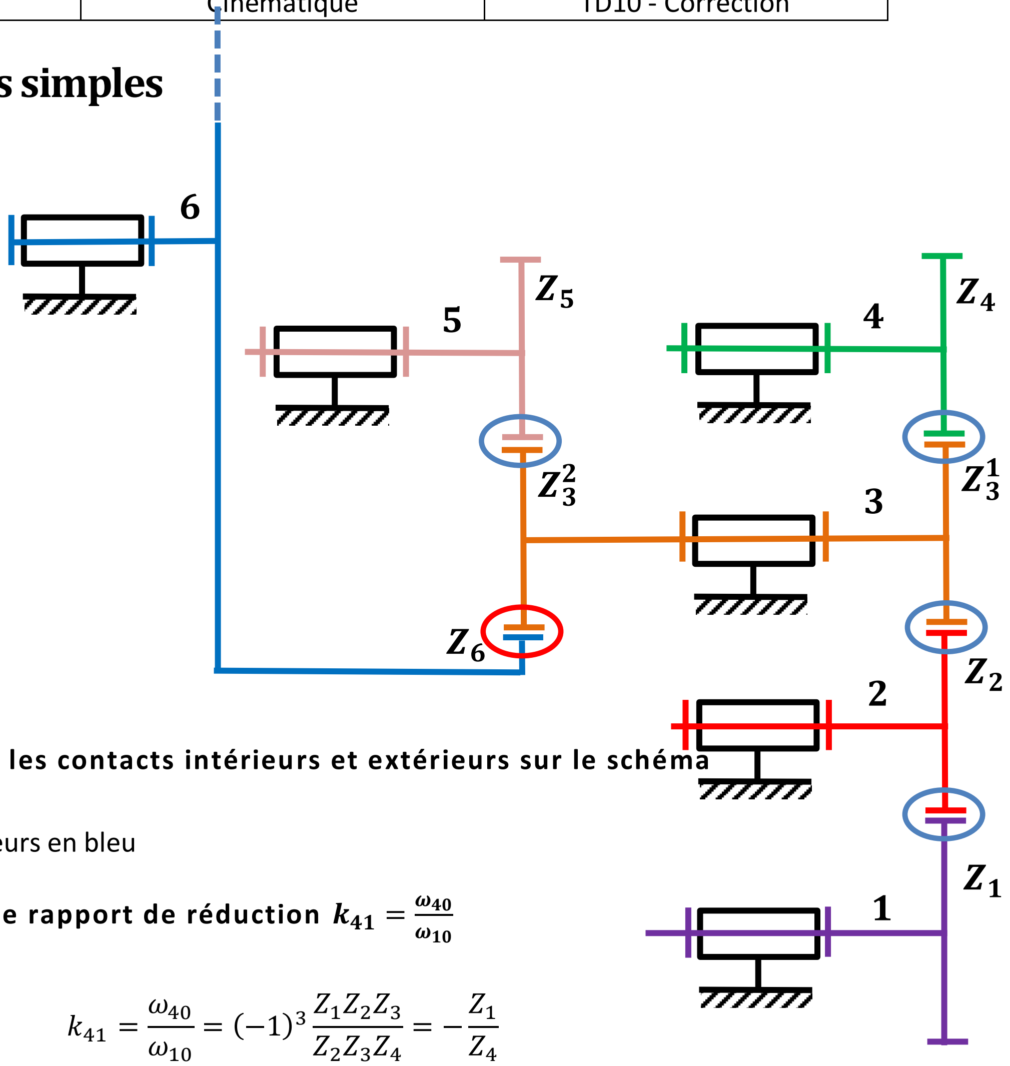
# Exercice 1: Trains simples




**Question 1: Identifier les contacts intérieurs et extérieurs sur le schéma**

Intérieurs en rouge, extérieurs en bleu

**Question 2: Exprimer le rapport de réduction $k_{41} = \frac{\omega_{40}}{\omega_{10}}$**

$$k_{41} = \frac{\omega_{40}}{\omega_{10}} = (-1)^3 \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 Z_4} = -\frac{Z_1}{Z_4}$$

**Question 3: Exprimer le rapport de réduction $k_{65} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{50}}$**

$$k_{65} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{50}} = (-1)^1 \frac{Z_5 Z_3^2}{Z_3^2 Z_6} = -\frac{Z_5}{Z_6}$$

**Question 4: Exprimer le rapport de réduction $k_{15} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{50}}$**

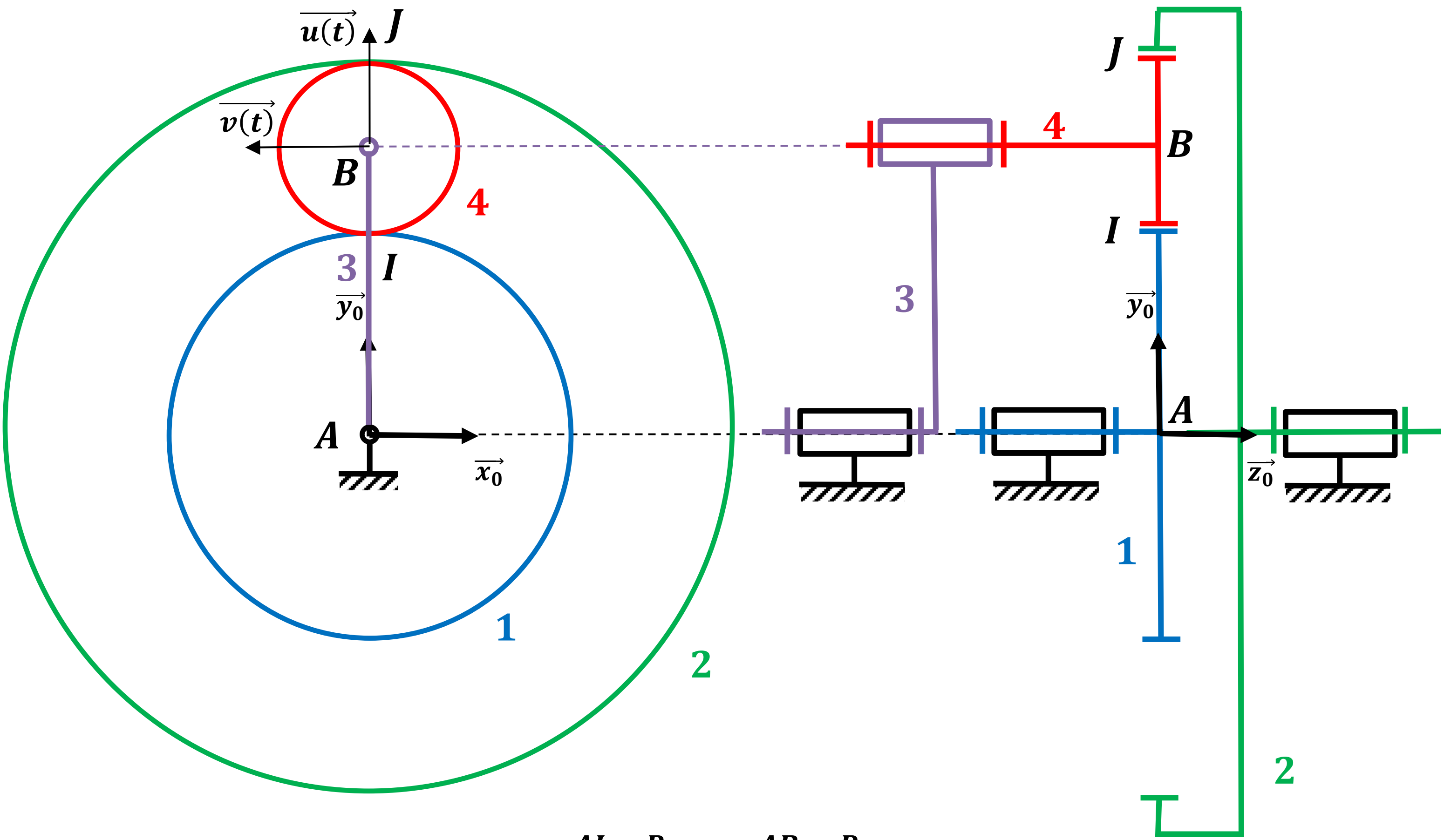
$$k_{15} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{50}} = (-1)^3 \frac{Z_5 Z_3^1 Z_2}{Z_3^2 Z_2 Z_1} = -\frac{Z_5 Z_3^1}{Z_3^2 Z_1}$$

**Question 5: Exprimer les rapports de réduction $k_{63} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{30}}$ et $k_{31} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ et en déduire $k_{61} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{10}}$**

$$k_{63} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{30}} = \frac{Z_3^2}{Z_6} \quad ; \quad k_{31} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = (-1)^2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 Z_3^1} = \frac{Z_1}{Z_3^1}$$

$$k_{61} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{10}} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{30}} \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = k_{63} k_{31} = \frac{Z_3^2}{Z_6} \frac{Z_1}{Z_3^1}$$

# Exercice 2: Train épicycloïdal




$$AI = R_1 \quad ; \quad AB = R_3$$
$$AJ = R_2 \quad ; \quad BI = BJ = R_4$$

## *Formule de Willis*

**Question 1: Déterminer le rapport $\lambda_{Type\ I} = \frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}}$ appelé « raison du train épicycloïdal » à l'aide de la formule de Willis**

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}}$$
$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = (-1)^1 \frac{Z_1}{Z_4}\frac{Z_4}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$
$$\lambda_{Type\ I} = -\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{R_1}{R_2}$$

La raison, c'est finalement le rapport de réduction du train simple lorsque le porte satellite est bloqué.

**Question 2: En composant les vitesses de rotation par rapport à la base 0, déterminer la relation liant $\omega_{1/0}$, $\omega_{2/0}$ et $\omega_{3/0}$ en fonction de $\lambda_{Type\ I}$ sous la forme $A\omega_{1/0} + B\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$**

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = \frac{\omega_{2/0} + \omega_{0/3}}{\omega_{1/0} + \omega_{0/3}} = \lambda_{Type\ I}$$
$$\omega_{2/0} + \omega_{0/3} = \lambda_{Type\ I}\omega_{1/0} + \lambda_{Type\ I}\omega_{0/3}$$
$$\omega_{2/0} + \omega_{0/3} - \lambda_{Type\ I}\omega_{1/0} - \lambda_{Type\ I}\omega_{0/3} = 0$$
$$-\omega_{2/0} - \omega_{0/3} + \lambda_{Type\ I}\omega_{1/0} + \lambda_{Type\ I}\omega_{0/3} = 0$$
$$\lambda_{Type\ I}\omega_{1/0} - \omega_{2/0} + \omega_{3/0} - \lambda_{Type\ I}\omega_{3/0} = 0$$

$$\boxed{\lambda_{Type\ I}\omega_{1/0} + (1 - \lambda_{Type\ I})\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0}$$

Valable tout le temps à condition de respecter les numéros des pièces

**Question 3: Déterminer la raison des trains épicycloïdaux de type $II$, $III$ et $IV$**

$$\lambda_{Type\ I} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$
$$\lambda_{Type\ II} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}} = -\frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$$
$$\lambda_{Type\ III} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}} = \frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$$
$$\lambda_{Type\ IV} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}} = \frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$$

# *Roulement sans glissement*

**Question 4: Exprimer la condition de roulement sans glissement en $I$ entre 1 et 4 et la condition de roulement sans glissement en $J$ entre 2 et 4**

$$\begin{cases} \vec{V}(I, 1/4) = \vec{0} \\ \vec{V}(J, 4/2) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V}(I, 1/0) - \vec{V}(I, 4/0) = \vec{0} \\ \vec{V}(J, 4/0) - \vec{V}(J, 2/0) = \vec{0} \end{cases}$$

**Question 5: Exprimer $\vec{V}(I, 1/0)$ en fonction $\omega_{1/0}$ et $R_1$**

$$\vec{V}(I, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_1\vec{u} \wedge \omega_{1/0}\overrightarrow{z_0}$$
$$\vec{V}(I, 1/0) = R_1\omega_{1/0}\vec{v}$$

**Question 6: Exprimer $\vec{V}(I,4/0)$ en fonction $\omega_{3/0}$, $\omega_{4/3}$, $R_1$ et $R_4$**

$$\vec{V}(I,4/0) = \vec{V}(I,4/3) + \vec{V}(I,3/0)$$
$$\vec{V}(I,4/3) = \vec{V}(B,4/3) + \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{43}} = R_4\vec{u} \wedge \omega_{4/3}\overrightarrow{z_0} = -R_4\omega_{4/3}\vec{v}$$
$$\vec{V}(I,3/0) = \vec{V}(A,3/0) + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}} = -R_1\vec{u} \wedge \omega_{3/0}\overrightarrow{z_0} = R_1\omega_{3/0}\vec{v}$$
$$\vec{V}(I,4/0) = \left(R_1\omega_{3/0} - R_4\omega_{4/3}\right)\vec{v}$$

**Question 7: Exprimer $\vec{V}(J,2/0)$ en fonction $\omega_{2/0}$ et $R_2$**

$$\vec{V}(J,2/0) = \vec{V}(A,2/0) + \overrightarrow{AJ} \wedge \overrightarrow{\Omega_{20}} = R_2\vec{u} \wedge \omega_{2/0}\overrightarrow{z_0}$$
$$\vec{V}(J,2/0) = R_2\omega_{2/0}\vec{v}$$

**Question 8: Exprimer $\vec{V}(J,4/0)$ en fonction $\omega_{3/0}$, $\omega_{4/3}$, $R_2$ et $R_4$**

$$\vec{V}(J,4/0) = \vec{V}(J,4/3) + \vec{V}(J,3/0)$$
$$\vec{V}(J,4/3) = \vec{V}(B,4/3) + \overrightarrow{JB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{43}} = -R_4\vec{u} \wedge \omega_{4/3}\overrightarrow{z_0} = R_4\omega_{4/3}\vec{v}$$
$$\vec{V}(J,3/0) = \vec{V}(A,3/0) + \overrightarrow{JA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}} = -R_2\vec{u} \wedge \omega_{3/0}\overrightarrow{z_0} = R_2\omega_{3/0}\vec{v}$$
$$\vec{V}(J,4/0) = \left(R_4\omega_{4/3} + R_2\omega_{3/0}\right)\vec{v}$$

**Question 9: En déduire la relation entre les vitesses $\omega_{1/0}$, $\omega_{2/0}$ et $\omega_{3/0}$**

$$\begin{cases} R_1\omega_{1/0}\vec{v} - \left(R_1\omega_{3/0} - R_4\omega_{4/3}\right)\vec{v} = \vec{0} \\ \left(R_4\omega_{4/3} + R_2\omega_{3/0}\right)\vec{v} - R_2\omega_{2/0}\vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1\omega_{1/0} - R_1\omega_{3/0} + R_4\omega_{4/3} = 0 \\ R_4\omega_{4/3} + R_2\omega_{3/0} - R_2\omega_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R_4\omega_{4/3}} = R_1\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} \\ \boldsymbol{R_4\omega_{4/3}} + R_2\omega_{3/0} - R_2\omega_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R_4\omega_{4/3}} = R_1\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} \\ R_1\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} + R_2\omega_{3/0} - R_2\omega_{2/0} = 0 \end{cases}$$

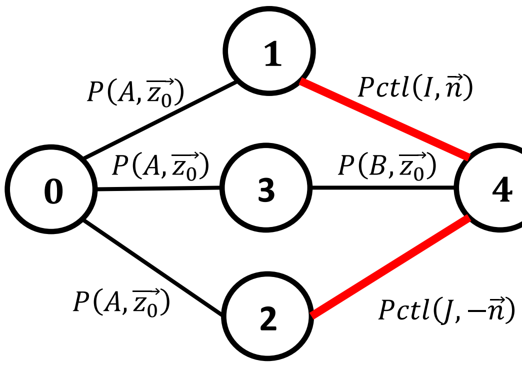
$$\begin{cases} \boldsymbol{R_4\omega_{4/3}} = R_1\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} \\ (R_1 + R_2)\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} - R_2\omega_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R_4\omega_{4/3}} = R_1\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} \\ (R_1 + R_2)\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} - R_2\omega_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_4\omega_{4/3} = R_1\omega_{3/0} - R_1\omega_{1/0} \\ \boldsymbol{-\frac{R_1}{R_2}\omega_{1/0} + \frac{R_1 + R_2}{R_2}\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0} \end{cases}$$

# *Fermeture cinématique*

**Question 10: Etablir le graphe des liaisons du mécanisme**




**Question 11: Exprimer les torseurs des mouvements 1/4 et 2/4 en leurs points caractéristiques en tenant compte de la propriété de roulement sans glissement en $I$ et $J$**

On modélise les contacts par des ponctuelles 2D et la vitesse de glissement est nulle :

$$\{V_{14}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{1/4} & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\{V_{42}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{4/2} & 0 \end{Bmatrix}_J^{\mathfrak{B}_0}$$

**Question 12: Ecrire la fermeture de chaîne cinématique de la chaîne 01430 en un point bien choisi afin d'exprimer directement une relation entre $R_{0/1}$, $R_{4/3}$ et $R_{3/0}$**

Le choix du point $I$ permet d'avoir directement la relation recherchée. On peut aussi prendre A puis transformer la relation à l'aide de l'équation en rotation.

$$\{V_{01}\} + \{V_{14}\} + \{V_{43}\} + \{V_{30}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{0/1} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{1/4} & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{4/3} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/0} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}'} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 R_{0/1} \\ R_{0/1} & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{1/4} & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R_4 R_{4/3} \\ R_{4/3} & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 R_{3/0} \\ R_{3/0} & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}'} = \{0\}$$

$$R_1 R_{0/1} - R_4 R_{4/3} + R_1 R_{3/0} = 0$$

**Question 13: Ecrire la fermeture de chaîne cinématique de la chaîne 02430 en un point bien choisi afin d'exprimer directement une relation entre $R_{0/3}$, $R_{3/4}$ et $R_{2/0}$**

Le choix du point $J$ permet d'avoir directement la relation recherchée. On peut aussi prendre A puis transformer la relation à l'aide de l'équation en rotation.

$$\{V_{03}\} + \{V_{34}\} + \{V_{42}\} + \{V_{20}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{0/3} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/4} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{4/2} & 0 \end{Bmatrix}_J^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/0} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}'} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2R_{0/3} \\ R_{0/3} & 0 \end{Bmatrix}_J^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_4R_{3/4} \\ R_{3/4} & 0 \end{Bmatrix}_J^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{4/2} & 0 \end{Bmatrix}_J^{\mathfrak{B}'} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2R_{2/0} \\ R_{2/0} & 0 \end{Bmatrix}_J^{\mathfrak{B}'} = \{0\}$$

$$R_2R_{0/3} + R_4R_{3/4} + R_2R_{2/0} = 0$$

**Question 14: En déduire la relation entre les vitesses $R_{1/0}$, $R_{2/0}$ et $R_{3/0}$**

$$\begin{cases} R_1R_{0/1} - \boldsymbol{R_4R_{4/3}} + R_1R_{3/0} = 0 \\ R_2R_{0/3} - \boldsymbol{R_4R_{4/3}} + R_2R_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_4R_{4/3} = R_1R_{0/1} + R_1R_{3/0} \\ R_2R_{0/3} - R_1R_{0/1} - R_1R_{3/0} + R_2R_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{-\frac{R_1}{R_2}R_{1/0} + \frac{R_1 + R_2}{R_2}R_{3/0} - R_{2/0} = 0}$$

# *Cinématique graphique*

**Question 15: En exploitant la propriété de roulement sans glissement en $J$ et compte tenu de la connaissance de $\vec{V}(B,4/2)$, colorier en rouge le champs des vitesses des points du segment $JI$ dans le mouvement de 4 par rapport à 2**

$$\vec{V}(J,4/2) = \vec{0}$$
$$\vec{V}(B,4/2) = donnée$$

On a donc un mouvement $4/2$ de rotation autour de $J$ dans le mouvement, on trace le triangle des vitesses associé

**Question 16: En exploitant la relation entre $\vec{V}(B,4/2)$ et $\vec{V}(B,3/2)$ et en utilisant la valeur de la vitesse $\vec{V}(A,3/2)$, colorier en bleu le champs des vitesses des points du segment $AB$ dans le mouvement de 3 par rapport à 2**

$$\vec{V}(B,4/2) = \vec{V}(B,3/2)$$
$$\vec{V}(A,3/2) = \vec{0}$$

On a donc un mouvement $3/2$ de rotation autour de $A$ dans le mouvement, on trace le triangle des vitesses associé

**Question 17: Après avoir donné la relation liant $\vec{V}(I,4/2)$ et $\vec{V}(B,4/2)$, identifier la flèche correspondant à $\vec{V}(I,4/2)$**

Le mouvement 4/2 est une rotation de centre $J$. La distance au centre de rotation est doublée, la relation en vitesse de même :

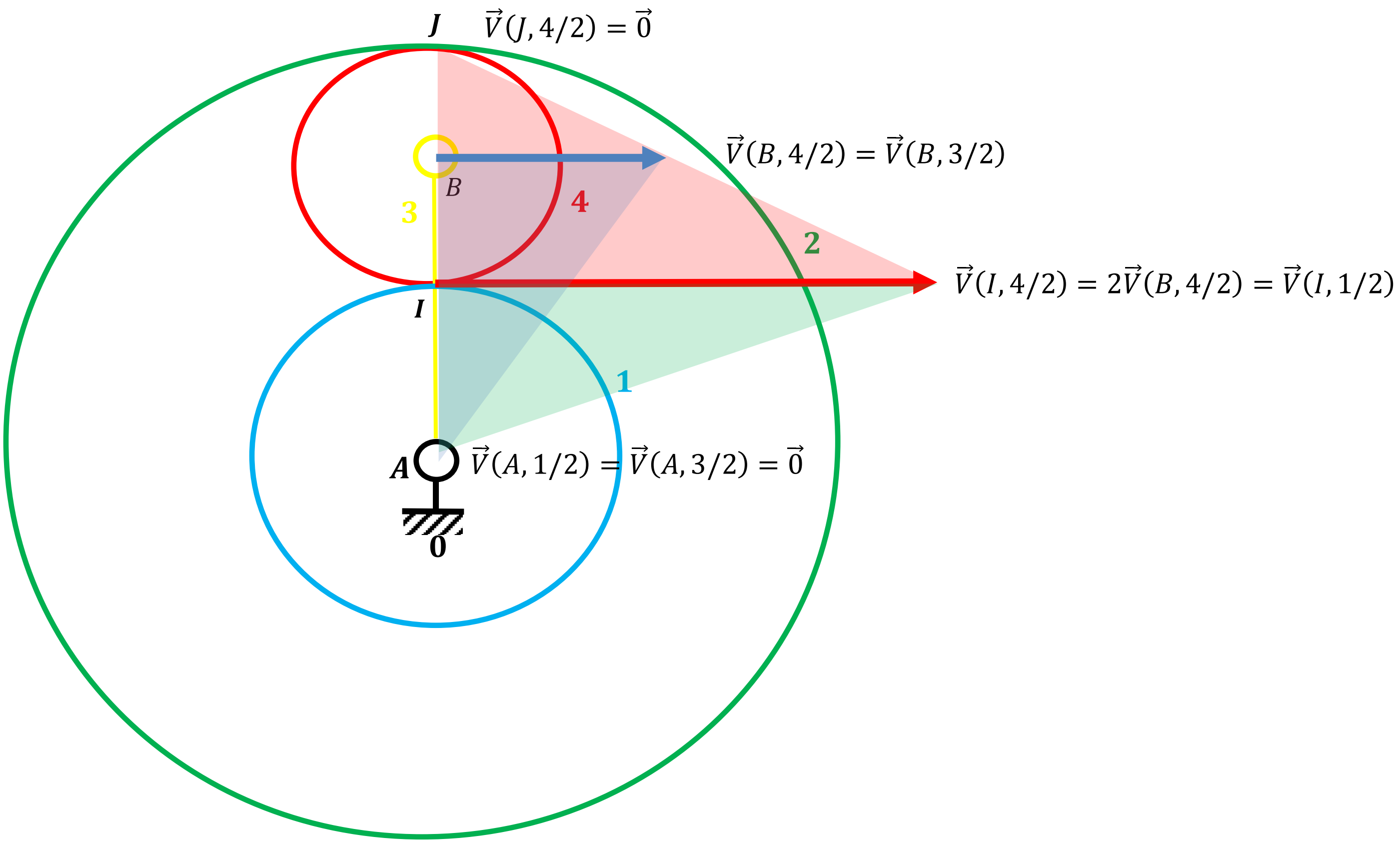
$$\vec{V}(I,4/2) = 2\vec{V}(B,4/2)$$

La flèche correspondant à $\vec{V}(I,4/2)$ est la grande flèche en $I$

**Question 18: En exploitant la relation entre $\vec{V}(I,4/2)$ et $\vec{V}(I,1/2)$ et en utilisant la valeur de la vitesse $\vec{V}(A,1/2)$, colorier en vert le champs des vitesses des points du segment $AI$ dans le mouvement de 1 par rapport à 2**

$$\vec{V}(I,4/2) = \vec{V}(I,1/2)$$
$$\vec{V}(A,1/2) = \vec{0}$$

On a donc un mouvement $1/2$ de rotation autour de $A$ dans le mouvement, on trace le triangle des vitesses associé




**Question 19: En exploitant le fait que la vitesse en $B$ soit une vitesse identique dans deux mouvements différents, montrer que $-R_3\omega_{3/2}=R_4\omega_{4/2}$**

On voit que la vitesse est la même en bout de triangle : $\vec{V}(B,4/2)=\vec{V}(B,3/2)$
Or :

$$\vec{V}(B,4/2)=R_4\omega_{4/2}$$
$$\vec{V}(B,3/2)=-R_3\omega_{3/2}$$

D'où

$$-R_3\omega_{3/2}=R_4\omega_{4/2}$$

**Question 20: En exploitant le fait que la vitesse en $I$ soit une vitesse identique dans deux mouvements différents et en utilisant la relation liant $\vec{V}(I,4/2)$ et $\vec{V}(B,4/2)$, montrer que $-R_1\omega_{1/2}=2R_4\omega_{4/2}$**

En exploitant cette dernière relation :

$$\vec{V}(I,4/2)=2\vec{V}(B,4/2)$$
$$\vec{V}(I,4/2)=2R_4\omega_{4/2}$$
$$\vec{V}(B,4/2)=R_4\omega_{4/2}$$

**Question 21: Montrer que $\boldsymbol{2R_3 - R_1 = R_2}$ et que $\boldsymbol{2R_3 = R_1 + R_2}$**

$$2R_3 - R_1 = 2R_3 - (R_3 - R_4) = R_3 + R_4 = R_2$$
$$2R_3 = 2R_1 + 2R_4 = R_1 + (R_1 + 2R_4) = R_1 + R_2$$

**Question 22: En déduire la relation entre les vitesses $\boldsymbol{\omega_{1/0}}$, $\boldsymbol{\omega_{2/0}}$ et $\boldsymbol{\omega_{3/0}}$**

$$\begin{cases} -R_1\omega_{1/2} = 2R_4\omega_{4/2} \\ -R_3\omega_{3/2} = R_4\omega_{4/2} \end{cases}$$
$$-R_3\omega_{3/2} = -\frac{1}{2}R_1\omega_{1/2}$$
$$-2R_3\omega_{3/0} + 2R_3\omega_{2/0} + R_1\omega_{1/0} - R_1\omega_{2/0} = 0$$
$$R_1\omega_{1/0} - \boldsymbol{2R_3}\omega_{3/0} + (\boldsymbol{2R_3 - R_1})\omega_{2/0} = 0$$
$$R_1\omega_{1/0} - (\boldsymbol{R_1 + R_2})\omega_{3/0} + \boldsymbol{R_2}\omega_{2/0} = 0$$
$$\boldsymbol{-\frac{R_1}{R_2}\omega_{1/0} + \frac{R_1 + R_2}{R_2}\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0}$$

# *Applications*

## *2 vitesses identiques*

Nous savons maintenant que la relation de tout train épicycloïdal (Type $I$, $II$, $III$ et $IV$) s'écrit sous la forme :

$$\lambda\omega_{1/0} + (1-\lambda)\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$
$$\lambda_{Type\ I} = -\frac{R_1}{R_2}$$
$$\lambda_{Type\ II} = -\frac{R_1 R_{4b}}{R_{4a} R_2}$$
$$\lambda_{Type\ III} = \lambda_{Type\ IV} = \frac{R_1 R_{4b}}{R_{4a} R_2}$$

Dans un premier temps, supposons que l'on lie deux des 3 pièces en rotation entre elles, quel que soit le type étudié.

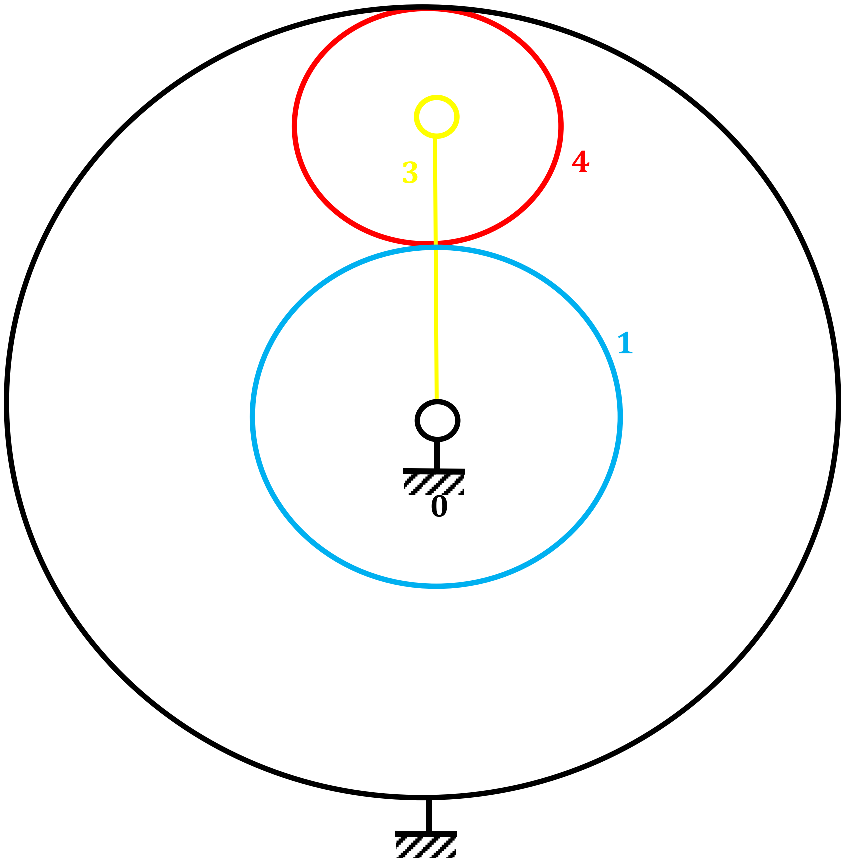
**Question 23: Que vaut alors la 3° vitesse de rotation si deux des autres sont égales**

| $\omega_{1/0} = \omega_{2/0} = \omega$ | $\omega_{1/0} = \omega_{3/0} = \omega$ | $\omega_{2/0} = \omega_{3/0} = \omega$ |
|---|---|---|
| $\lambda\omega + (1-\lambda)\omega_{3/0} - \omega = 0$<br>$(1-\lambda)\omega_{3/0} = (1-\lambda)\omega$<br>$\omega_{3/0} = \omega$ | $\lambda\omega + (1-\lambda)\omega - \omega_{2/0} = 0$<br>$\lambda\omega + \omega - \lambda\omega = \omega_{2/0}$<br>$\omega_{2/0} = \omega$ | $\lambda\omega_{1/0} + (1-\lambda)\omega - \omega = 0$<br>$\lambda\omega_{1/0} + \omega - \lambda\omega - \omega = 0$<br>$\omega_{1/0} = \omega$ |

Dans tous les cas, la 3° vitesse est égale aux deux autres.

# *Couronne bloquée*

Supposons maintenant un train épicycloïdal dans lequel la couronne est bloquée :




**Question 24: Déterminer le rapport de réduction $k = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction de $\lambda$ à l'aide de la formule établie précédemment**

$$\omega_{2/0} = 0$$
$$\lambda\omega_{1/0} + (1-\lambda)\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$
$$\lambda\omega_{1/0} + (1-\lambda)\omega_{3/0} = 0$$
$$\lambda\omega_{1/0} = (\lambda - 1)\omega_{3/0}$$

$$k = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

**Question 25: Retrouver ce rapport à l'aide de la formule de Willis**

Ça peut être perturbant de mettre 0 pour la pièce fixe, mais ça marche !!!

$$\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/3}} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}} = -\frac{Z_1}{Z_0} = \lambda$$

$$\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/3}} = \lambda$$

$$\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/0} - \omega_{3/0}} = \lambda$$

$$\omega_{0/3} = \lambda\omega_{1/0} - \lambda\omega_{3/0}$$

$$-\omega_{3/0} + \lambda\omega_{3/0} = \lambda\omega_{1/0}$$

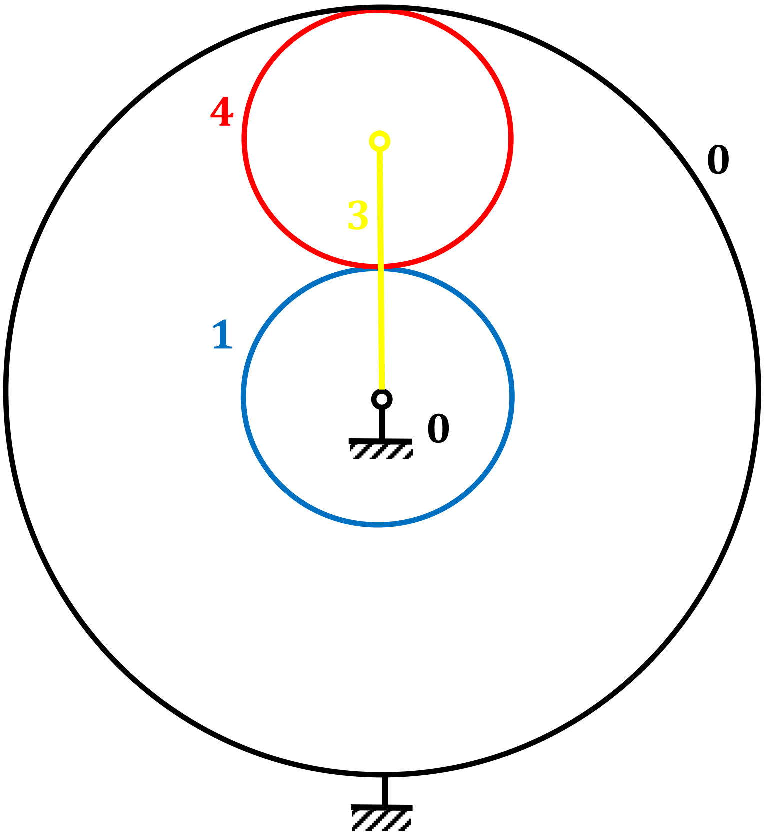
$$(\lambda - 1)\omega_{3/0} = \lambda\omega_{1/0}$$

$$k = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

L'autre méthode est de supposer que la pièce bouge, d'obtenir la relation entre les 3 vitesses et d'annuler la bonne, c'est ce que l'on a fait avant.

Prenons un réducteur à train épicycloïdal dans lequel le planétaire et les portes satellites ont le même rayon :

$$R_4 = R_1$$
$$R_3 = 2R_1$$
$$R_0 = 3R_1$$




**Question 26: Que vaut le rapport de réduction k ?**

$$\lambda = -\frac{R_1}{R_0} = -\frac{R_1}{3R_1} = -\frac{1}{3}$$
$$k = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Soit $r = \frac{R_4}{R_1}$ le rapport entre les dimensions du planétaire et de la couronne.

**Question 27: Exprimer $\lambda$ en fonction de $r$**

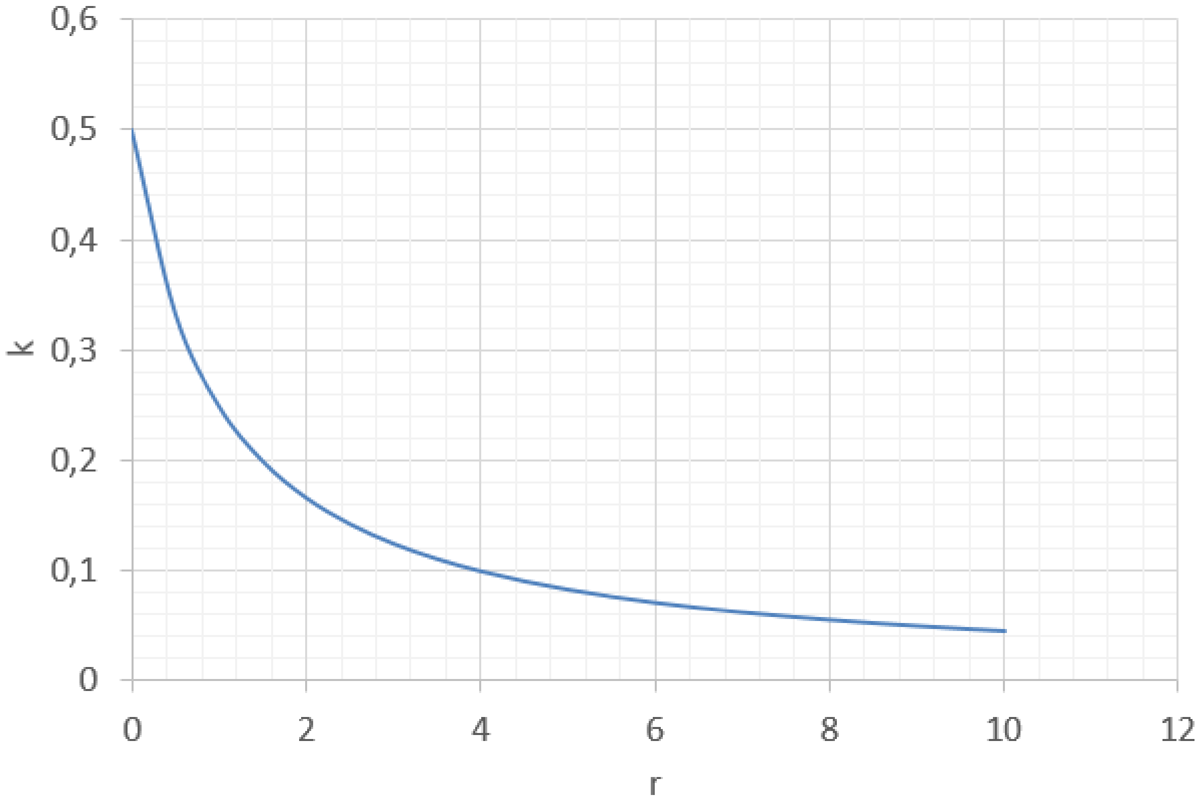
$$R_0 = R_1 + 2R_4$$
$$\lambda = -\frac{R_1}{R_0} = -\frac{R_1}{R_1 + 2R_4}$$
$$\frac{1}{\lambda} = -1 - 2\frac{R_4}{R_1}$$
$$r = \frac{R_4}{R_1}$$
$$\frac{1}{\lambda} = -1 - 2r$$
$$\lambda = -\frac{1}{1 + 2r}$$

**Question 28: En déduire $k$ en fonction de $r$**

$$k = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{-\frac{1}{1+2r}}{-\frac{1}{1+2r} - 1} = \frac{-1}{-1 - 1 - 2r} = \frac{1}{2(r+1)}$$
$$k = \frac{1}{2(r+1)}$$

**Question 29: Tracer cette courbe en calculant quelques valeurs à la calculatrice pour $r \in [0; 10]$ et conclure sur la capacité de ce réducteur à réduire fortement les vitesses de rotation**

$$k = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{1}{2(r+1)}$$
$$r = \frac{R_4}{R_1} > 0$$




**Question 30: Quelle réduction minimale peut-on obtenir ?**

Rapport $k$ maximal :

$$r = 0$$
$$k = 0{,}5$$

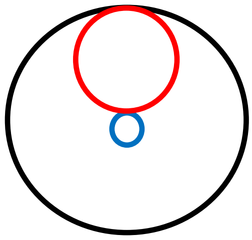
Remarque : ce n'est bien sûr pas réalisable réellement

**Question 31: Quelle réduction maximale peut-on obtenir ?**

En théorie, une réduction infinie… En théorie

**Question 32: Faut-il diminuer le rayon du planétaire ou des satellites pour obtenir une forte réduction ? Identifier le cas associé sur les 3 images proposées**

$r > 1$



$$r = \frac{R_4}{R_1}$$

$k$ devant être le plus petit possible, $r$ doit être le plus grand possible, il faut augmenter la taille des satellites, et diminuer le planétaire.

**Question 33: Pour quel rapport $r$ divise-t-on la vitesse par 10 ?**

$$2(r+1) = d$$
$$r = \frac{d}{2} - 1 = \frac{10}{2} - 1 = 4$$
$$R_4 = 4R_1$$

**Question 34: Comparer l'encombrement d'un train épi vis-à-vis d'un réducteur train simple composé de 2 roues dentées de même réduction**

Rapport 4 pour le train épi contre 10 pour le train simple…

**Question 35: Quelles sont ses limites qui empêchent de réduire infiniment la vitesse et quelle modification de dimension peut permettre de les repousser quelque peu ?**

Plus le satellite est grand, à taille de couronne identique, plus le planétaire est petit.
Comme $D = mZ$, diminuer $D$ demande de diminuer le produit $mZ$.
Il existe un $Z_{min}$ pour que ça fonctionne… 2 dents, ce n'est pas possible que ça marche
Il y a un $m_{min}$ pour que les dents résistent
Il y a donc un produit

$$m_{min}Z_{min} = D_{min}$$

En agrandissant la couronne, on repoussera quelque peu cette limite.

**Question 36: Conclure sur l'intérêt des trains épicycloïdaux par rapport à des trains simples**

Bon rapport :

$$\frac{Réduction}{Encombrement}$$

**Question 37: Déterminer le rapport de réduction $k'$ du réducteur proposé**

$$\lambda = -\frac{Z_1}{Z_0} = -\frac{9}{45} = -\frac{1}{5} = -0{,}2 \quad ; \quad k = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5} - 1} = \frac{1}{6}$$

$$k' = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296} = 0{,}000772$$

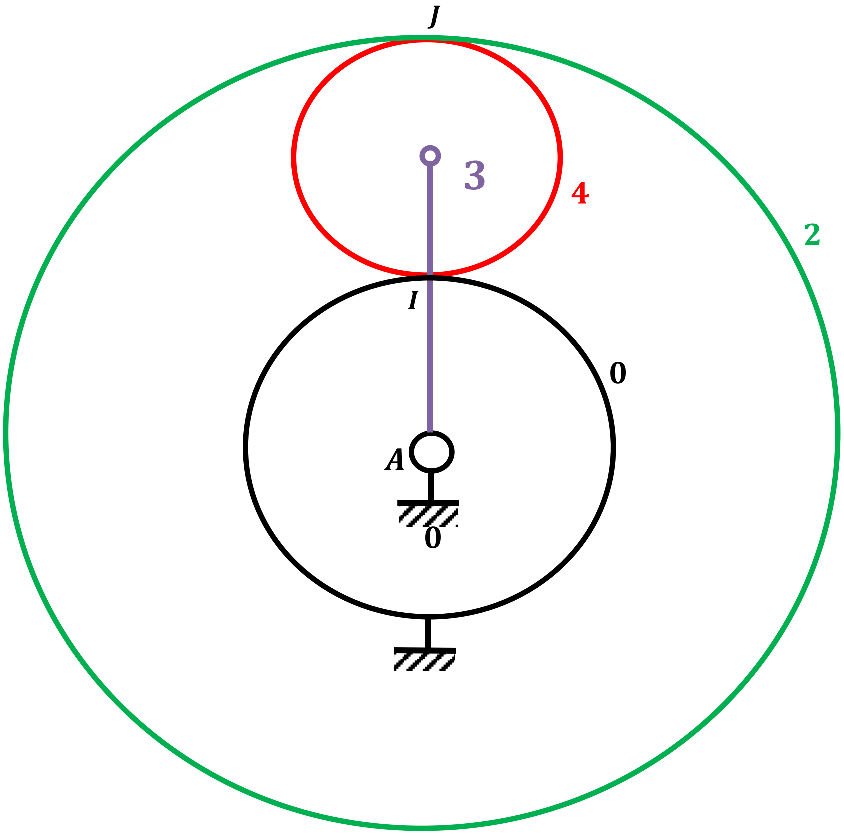
**Question 38: Quel rapport serait obtenu avec 10 étages de réductions à la suite ?**

$$k' = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \left(\frac{1}{60\,000\,000}\right)^{10}$$

Oh, mon dieu !

# *Planétaire bloqué*

Supposons maintenant que le planétaire 1 est bloqué en rotation, soit encastré au bâti.




**Question 39: Déterminer le rapport de réduction $k = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}}$**

Méthode avec équation :

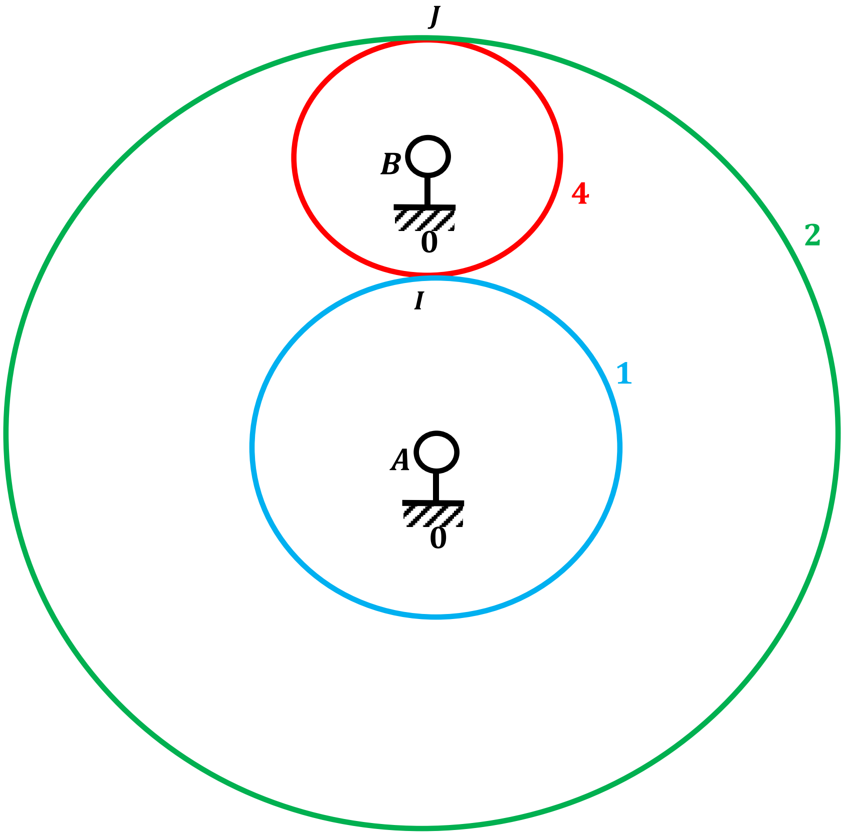
$$\omega_{1/0} = 0$$
$$(1-\lambda)\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$
$$(1-\lambda)\omega_{3/0} = \omega_{2/0}$$
$$k = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = 1-\lambda$$

Méthode rapide :

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{0/3}} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}} = -\frac{Z_1}{Z_0} = \lambda$$
$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{0/3}} = \lambda$$
$$\omega_{2/3} = -\lambda\omega_{3/0}$$
$$\omega_{2/0} - \omega_{3/0} = -\lambda\omega_{3/0}$$
$$\omega_{2/0} = (1-\lambda)\omega_{3/0}$$
$$k = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = 1-\lambda$$

# *Porte satellite bloqué*

Supposons maintenant que le porte satellite 3 est bloqué en rotation, soit encastré au bâti.




**Question 40: Le train épicycloïdal est-il toujours un train épicycloïdal ?**

Non. On se retrouve avec un train d'engrenages simple.
On aurait pu le voir avec la formule de Willis avec $3 = 0$ :

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = \lambda = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$$

**Question 41: Déterminer le rapport de réduction $k = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$**

$$\lambda\omega_{1/0} + (1-\lambda)\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$
$$\omega_{3/0} = 0$$
$$\lambda\omega_{1/0} - \omega_{2/0} = 0$$
$$\omega_{2/0} = \lambda\omega_{1/0}$$
$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \lambda = -\frac{R_1}{R_2}$$