Détermination des actions dans les liaisons des mécanismes statiques

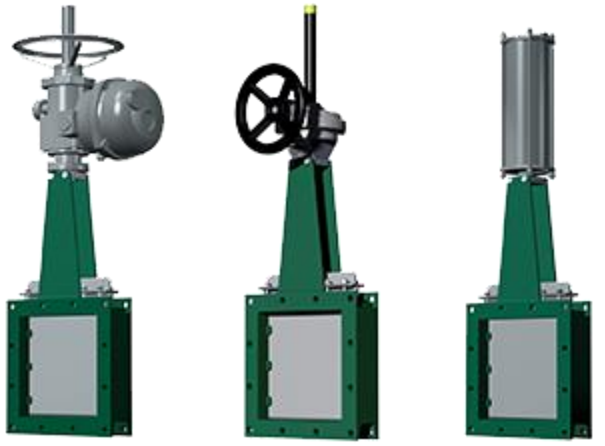
TD1

Actions mécaniques locales et globales

Programme - Compétences		
B213	MODELISER	Actions mécaniques : - modélisation locale, actions à distance et de contact - modélisation globale, torseur associé

Exercice 1: Vanne à guillotine

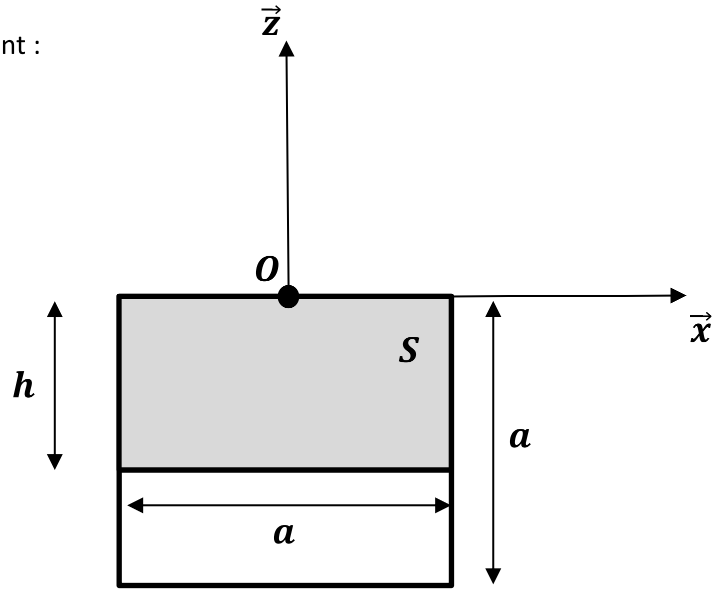
On s'intéresse à une vanne à guillotine à orifice carré commercialisée par la société Tecofi présentées en photo ci-dessous :



Cette vanne permet de maîtriser le débit de granulés que nous assimilerons pour notre étude à un fluide sous pression qui la traverse en jouant sur son ouverture.

La surface en contact avec le fluide est un carré de côté a lorsque la vanne est fermée, puis un rectangle dont la hauteur soumise à la pression du fluide sous pression est notée h.

On propose le modèle suivant :



Le fluide sous pression est supposé être du côté des y négatifs (côté du lecteur). L'autre côté est soumis à la pression atmosphérique de l'air notée P_0.
On suppose que le fluide sous pression retenu par la vanne exerce une pression répartie uniformément notée P sur la surface de la plaque mobile.
Dans le but de dimensionner la liaison entre la plaque mobile et le corps fixe de la vanne, on souhaite déterminer le torseur de l'action mécanique de la pression des fluides (fluide sous pression d'un côté, air de l'autre) sur la plaque mobile au point O.

Calcul intégral

Question 1: Donner l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR_f}$ s'appliquant sur une petite surface dS de la surface S résultant de l'action du fluide sous pression sur la plaque en fonction de la pression P, de l'élément de surface dS et d'un vecteur unitaire

Question 2: Donner l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR_a}$ s'appliquant sur une petite surface dS de la surface S résultant de l'action de l'air sur la plaque en fonction de la pression P_0, de l'élément de surface dS et d'un vecteur unitaire

Question 3: En déduire l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR}$ s'appliquant sur une petite surface dS de la surface S résultant la somme des actions du fluide d'un côté et de l'air de l'autre sur la plaque en fonction de la différence de pression $\Delta P = P - P_0$ entre le fluide et l'air, de l'élément de surface dS et d'un vecteur unitaire

On remarquera que la partie de la plaque de hauteur $(a - h)$ ayant été remontée est soumise à la même pression atmosphérique de chaque côté, ce qui permet de ne pas prendre en compte la pression qui s'exerce dessus puisque les forces se compensent.

Question 4: En déduire l'expression littérale de la résultante $\vec{R}$ de la pression sur la surface de la plaque mobile soumise au fluide sous pression en fonction de a, h, ΔP et $\vec{y}$

Question 5: Donner l'expression du petit moment $\overrightarrow{dM_O(\overrightarrow{dR})}$ en O créé par l'élément de force $\overrightarrow{dR}$ appliqué en un point courant M de coordonnées x et z en fonction de ΔP, x, z, $\vec{x}$ et $\vec{z}$

Question 6: En déduire l'expression littérale du moment $\overrightarrow{M_O(\vec{R})}$ de la pression sur la surface de la plaque mobile soumise au fluide sous pression en fonction de a, h, ΔP et $\vec{x}$

Question 7: En déduire le torseur de l'action de la pression de l'air et du fluide sous pression sur la plaque mobile en O en fonction de a, h et ΔP

Exploitation de centres géométriques

A présent, on oublie ce que l'on a fait dans les questions précédentes.

Question 8: Donner les coordonnées X_G, Y_G et Z_G du centre géométrique G de la surface soumise à la pression du fluide sous pression dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Question 9: En exploitant les résultats du cours, donner le torseur de l'action de la pression du fluide sous pression sur la plaque en son centre G

Question 10: Faire de même pour l'action de l'air de l'autre côté de la plaque

Question 11: En déduire le torseur de l'action totale des fluides sur la plaque mobile en son centre G

Question 12: Donner finalement l'expression de ce torseur en O

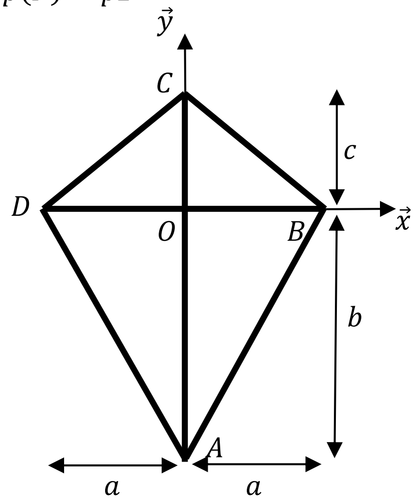
On remarquera qu'il est bien plus intéressant d'utiliser les résultats du cours dès qu'une répartition est constante.

Exercice 2: Cerf-volant

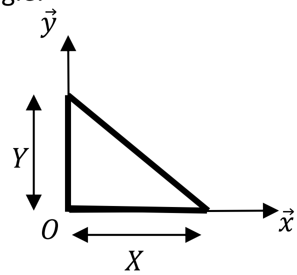
On s'intéresse au cerf-volant suivant :

Notre objectif est de déterminer le torseur de l'action du vent sur celui-ci en supposant que la pression qui s'applique dessus est constante $\overrightarrow{p(P)} = p\vec{z}$

On propose le modèle suivant :



On peut remarquer que ce cerf-volant est composé de 4 triangles rectangles. Intéressons-nous donc dans un premier temps à un triangle rectangle.



Question 1: Déterminer les coordonnées du centre géométrique du triangle ci-dessus en fonction de X et Y

Question 2: En déduire les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique G du cerf-volant complet en fonction de a, b et c

Question 3: Que peut-on dire de l'abscisse X_G de ce centre ?

Question 4: Donner le torseur de l'action du vent sur le cerf-volant en G en fonction de a, b, c et p

Question 5: En déduire l'expression de ce torseur en O

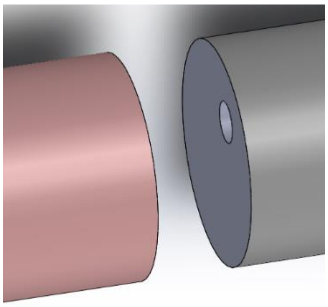
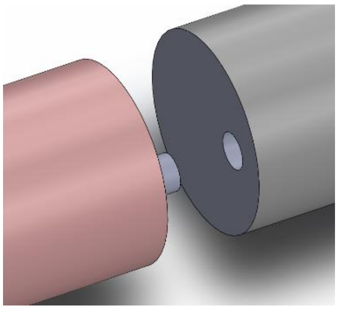
Exercice 3: Disque troué

On s'intéresse à un mécanisme de transmission entre deux arbres tournant permettant de lier les deux arbres :

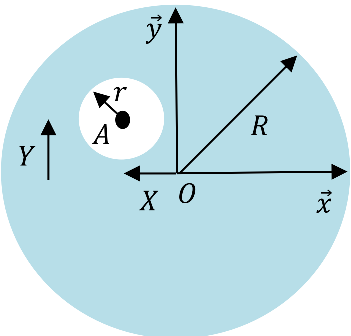
- soit par friction (possibilité de glissement si la sortie est bloquée)
- Soit par obstacle

Pour cela, on utilise sur l'un des arbres un disque troué comme proposé sur le modèle ci-dessous, et en face :

- Soit un arbre possédant une surface frottante de mêmes dimensions que le disque troué sans trou
- Soit un arbre possédant un doigt cylindrique qui entre dans le trou du disque troué permettant l'entraînement par obstacle

On propose le modèle suivant et on souhaite déterminer la résultante de l'action de la pression sur le disque troué en supposant pour le moment qu'il n'y a pas de frottements au contact (action uniquement suivant $\vec{z}$) :



$$\overrightarrow{OA} = X\vec{x} + Y\vec{y}$$

On suppose que la pression se répartie uniformément sur la surface de contact : $\overrightarrow{p(x,y)} = -p\vec{z}$

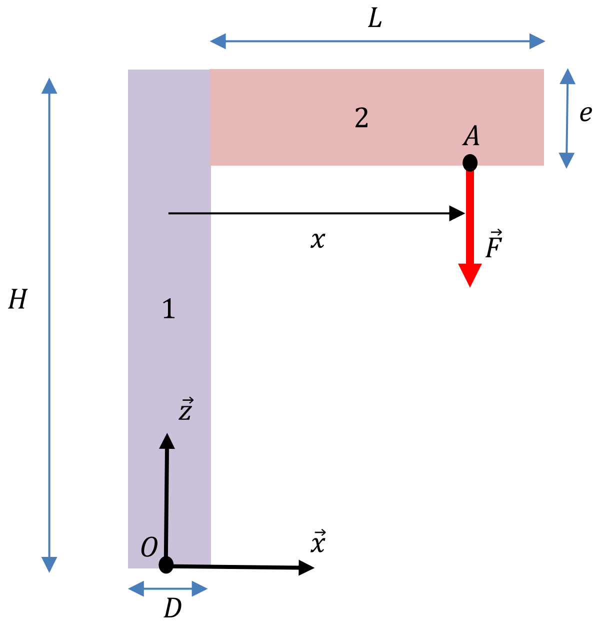
Question 1: Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique G de la surface étudiée en fonction de X, Y, r et R

Question 2: En déduire le torseur de l'action de la pression sur cette surface en O en fonction de X, Y, r et p

Question 3: En supposant que l'action sur la surface trouée est équivalente à une action de pression sur la surface de rayon R non trouée et d'une action opposée sur le disque de rayon r, obtenir plus rapidement le même résultat

Exercice 4: Potence

Soit une potence permettant de soulever des charges jusqu'à 500 kg :



La masse volumique du matériau constituant la pièce est supposée constante égale à ρ $(kg.m^{-3})$

La force volumique de gravité s'exprime ainsi : $\overrightarrow{f_v} = -\rho g \vec{z}$

La partie 1 de la potence est un cylindre creux de rayons intérieur r et extérieur R avec $D = 2R$ et de hauteur H

La partie 2 de la potence est de section carrée de coté e et de longueur L

Une charge de masse m soumise à la gravité s'applique en A tel que $\overrightarrow{OA}.\vec{x} = x$

Le modèle ci-dessus est donné dans le plan médian de la potence $(O, \vec{x}, \vec{z})$ supposée symétrique par rapport à celui-ci.

Question 1: Déterminer le torseur de l'action de la pesanteur sur la partie 1 au centre G_1 de la partie 1 dont la position sera précisée, le tout en fonction de ρ, H, r, R et g

Question 2: Déterminer le torseur de l'action de la pesanteur sur la partie 2 au centre G_2 de la partie 2 dont la position sera précisée, le tout en fonction de ρ, e, L et g

Question 3: En déduire le torseur de l'action de gravité sur la potence en O en fonction des données précédentes

Question 4: Déterminer le torseur de l'action de la gravité sur la masse suspendue en O en fonction de m, g et x

Question 5: En déduire le torseur de l'action de la gravité sur l'ensemble Potence+Masse suspendue en O en fonction des données précédentes

Le matériau de la potence est de l'acier. On donne :

$$\rho = 7500\ kg.m^{-3} \quad ; \quad g = 9{,}81\ m.s^{-2} \quad ; \quad m \epsilon [0; 500\ kg]$$

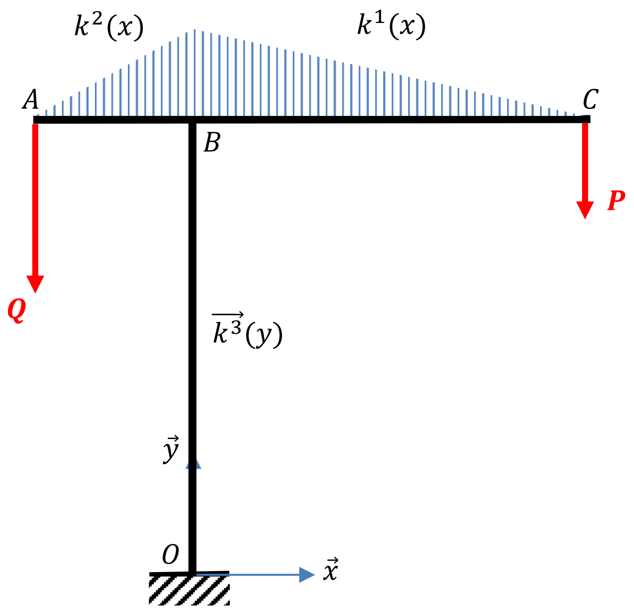
$$H = 3\ m \quad ; \quad e = 50\ cm \quad ; \quad L = 4\ m \quad ; \quad r = 40\ cm \quad ; \quad R = 50\ cm$$

$$x \epsilon [0; 4\ m]$$

Question 6: Déterminer la valeur numérique de la résultante R et du moment maximum M en O de l'action de la gravité sur l'ensemble étudié

Exercice 5: Etude d'une grue

Nous souhaitons déterminer le torseur des actions mécaniques issues de la gravité sur une grue dont le modèle proposé est un modèle plan avec une répartition linéique d'effort :



$$OB = H \quad - \quad AB = L_g \quad - \quad BC = L_d$$

La grue porte une charge $P(N)$ en C, est équipée d'un contrepoids $Q(N)$ en A et est soumise à une charge répartie $k(x)$ $(N.m^{-1})$ liée au poids de sa structure, contenant déjà la troisième dimension selon $\vec{z}$, telle que :

$$\overrightarrow{k^1}(x) = -k\frac{L_d - x}{L_d}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{k^2}(x) = -k\frac{L_g + x}{L_g}\vec{y}$$

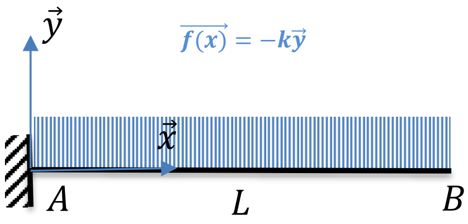
$$\overrightarrow{k^3}(y) = -k\vec{y}$$

$\overrightarrow{k^3}(y)$ est une répartition linéique verticale constante le long du segment $[OB]$.

k est en $N.m^{-1}$, c'est-à-dire que la 3° dimension suivant $\vec{z}$ est prise en compte dans k

Dans les 3 cas proposés ci-dessous, déterminons par intégration le moment en A de la répartition proposée par intégration, puis trouvons le point du segment $[AB]$ où le moment de cette répartition est nul afin de proposer un modèle plus simple d'une force ponctuelle pour la modéliser.

Soit la force linéique $\overrightarrow{f(x)}$ en $N.m^{-1}$ à répartition uniforme suivante :

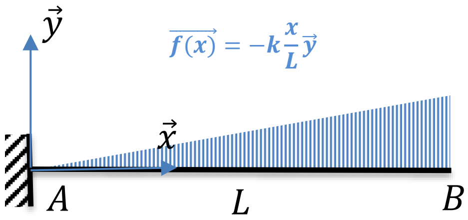


Question 1: Déterminer le torseur de cette action en A

Question 2: Déterminer le point où le moment de cette action est nul

Question 3: En déduire un nouveau modèle plus simple pour représenter l'action de la force répartie étudiée

Soit la force linéique $\overrightarrow{f(x)}$ en $N.m^{-1}$ à répartition linéaire suivante :

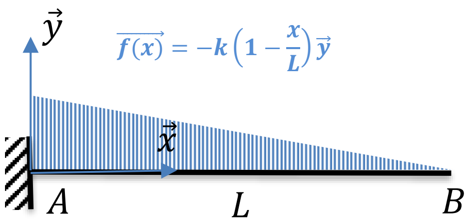


Question 4: Déterminer le torseur de cette action en A

Question 5: Déterminer le point où le moment de cette action est nul

Question 6: En déduire un nouveau modèle plus simple pour représenter l'action de la force répartie étudiée

Soit la force linéique $\overrightarrow{f(x)}$ en $N.m^{-1}$ à répartition linéaire suivante :



Question 7: Compte tenu des résultats précédents, déterminer un nouveau modèle plus simple pour représenter l'action de la force répartie étudiée

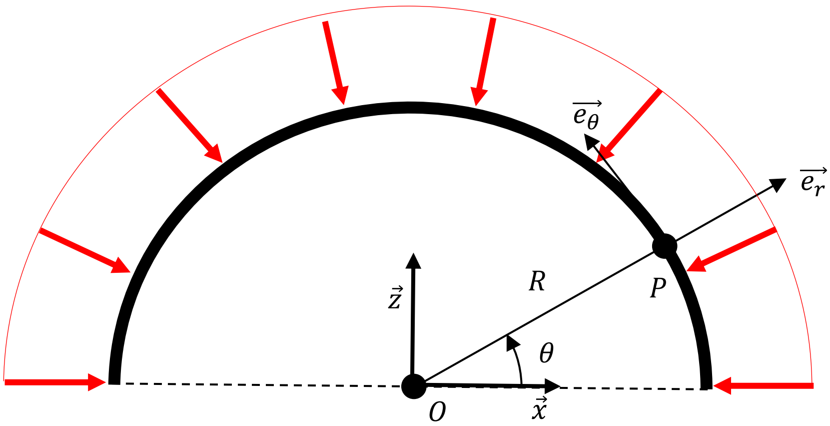
Question 8: Proposer un nouveau modèle de la grue comportant uniquement 5 résultantes représentant l'ensemble des charges qui s'appliquent dessus

Question 9: En déduire le torseur des actions de la gravité sur l'ensemble de la structure en O

Exercice 6: Restaurant sous-marin

Le Rangali Island Restaurant est un restaurant dans les Maldives proposant une salle sous-marine.

Dans le but de dimensionner la structure supportant la baie vitrée, nous souhaitons déterminer le torseur de l'action de l'eau sur celles-ci. On suppose que les baies vitrées ont une structure cylindrique de rayon constant R et on propose le modèle suivant, pour une tranche d'épaisseur dy :



Nous négligerons la variation de pression entre le haut et le bas des baies vitrées et supposerons qu'elle est constante $p = p_0 + \rho g h$ où ρ est la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, h la profondeur et p_0 la pression atmosphérique.

$$\rho = 1000\ kg.m^{-3} \quad ; \quad g = 9{,}81\ m.s^{-2} \quad ; \quad h = 10m \quad ; \quad p_0 = 101325\ Pa$$
$$R = 2{,}5\ m \quad ; \quad L = 15\ m$$

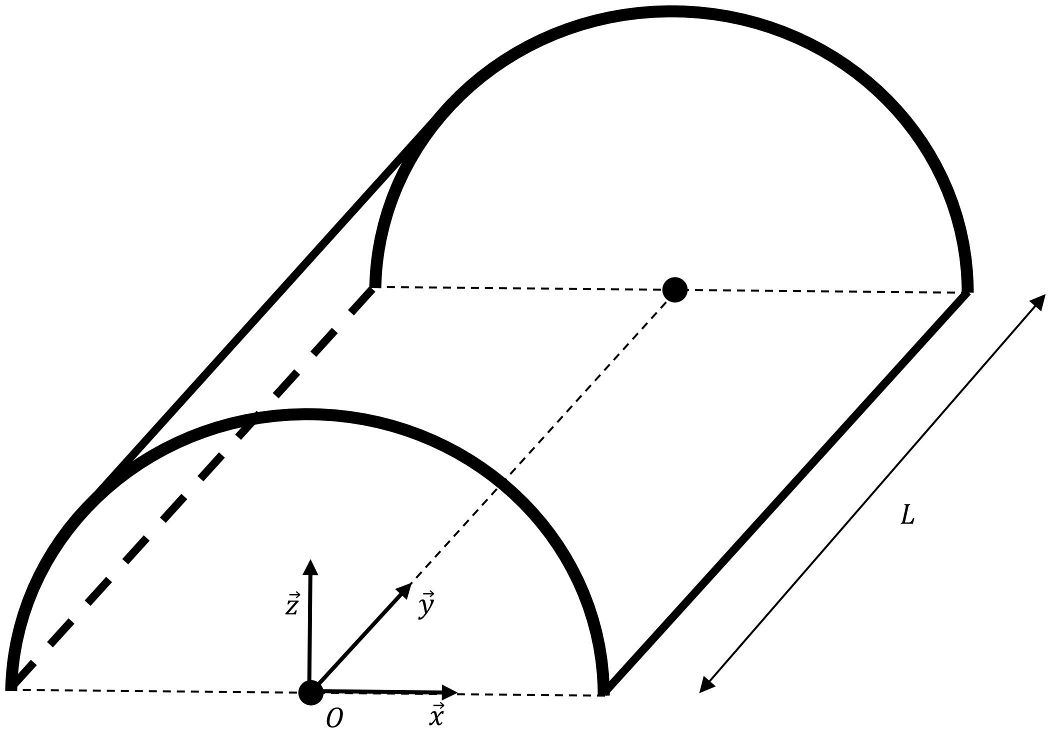
Appelons L la longueur de la structure.

Question 1: Déterminer le torseur $\{dT\}$ de l'action de l'eau sur la structure en O dans la tranche de longueur dy

Question 2: En déduire un modèle simple de l'action de l'eau sur la tranche étudiée

Question 3: Montrer en particulier que la valeur de cet effort (par unité de longueur) est liée à la « ligne » de longueur $L_p = 2R$ correspondant à la projection de la baie

Intéressons-nous maintenant à la baie vitrée sur toute sa longueur. On propose le modèle suivant :



Question 4: Compte tenu de l'étude précédente, proposer un modèle simple sous forme d'action linéique pour représenter l'action de l'eau sur la structure étudiée

Question 5: En déduire un modèle de l'action de l'eau sous forme d'une action ponctuelle $\vec{R}$ en un point A dont la position sera précisée

Question 6: En déduire le torseur $\{T\}$ de l'action de l'eau sur la structure en O

Question 7: Montrer que la valeur de cette résultante est liée à la surface projetée $S_p = 2RL$

Question 8: Déterminer les valeurs numériques de la résultante et du moment de cette action en O

Remarque : Imaginons que la salle complète soit plongée dans l'eau et soumise à une pression constante (pas d'effets de la gravité). Dans ce cas, il n'existe pas de poussée d'Archimède et le solide soumis à cette pression est en équilibre, c'est-à-dire que résultante et moment de l'action de pression sur le solide sont nuls.

Appelons S la surface du demi-cylindre et S' la surface plane du sol soumise à la pression fictive de l'eau.

Question 9: Donner la relation liant $\int_S -p\vec{n}dS$ et $\int_{S'} -p\vec{n}dS$

Question 10: En déduire l'expression de la résultante de l'action de pression sur le demi-cylindre S en fonction de p, R et L

On remarquera que ce résultat est vrai pour toute surface qui peut être fermée par un plan, quelle que soit sa géométrie, et on pourra étendre ce résultat à une ligne fermée par un segment.