

Dernière mise à jour	Mécanismes – Vitesses –	Denis DEFAUCHY
05/03/2020	Accélérations – Lois entrée/sortie	TD10 - Sujet

# Mécanismes

## Vitesses et accélération - Lois entrée/sortie

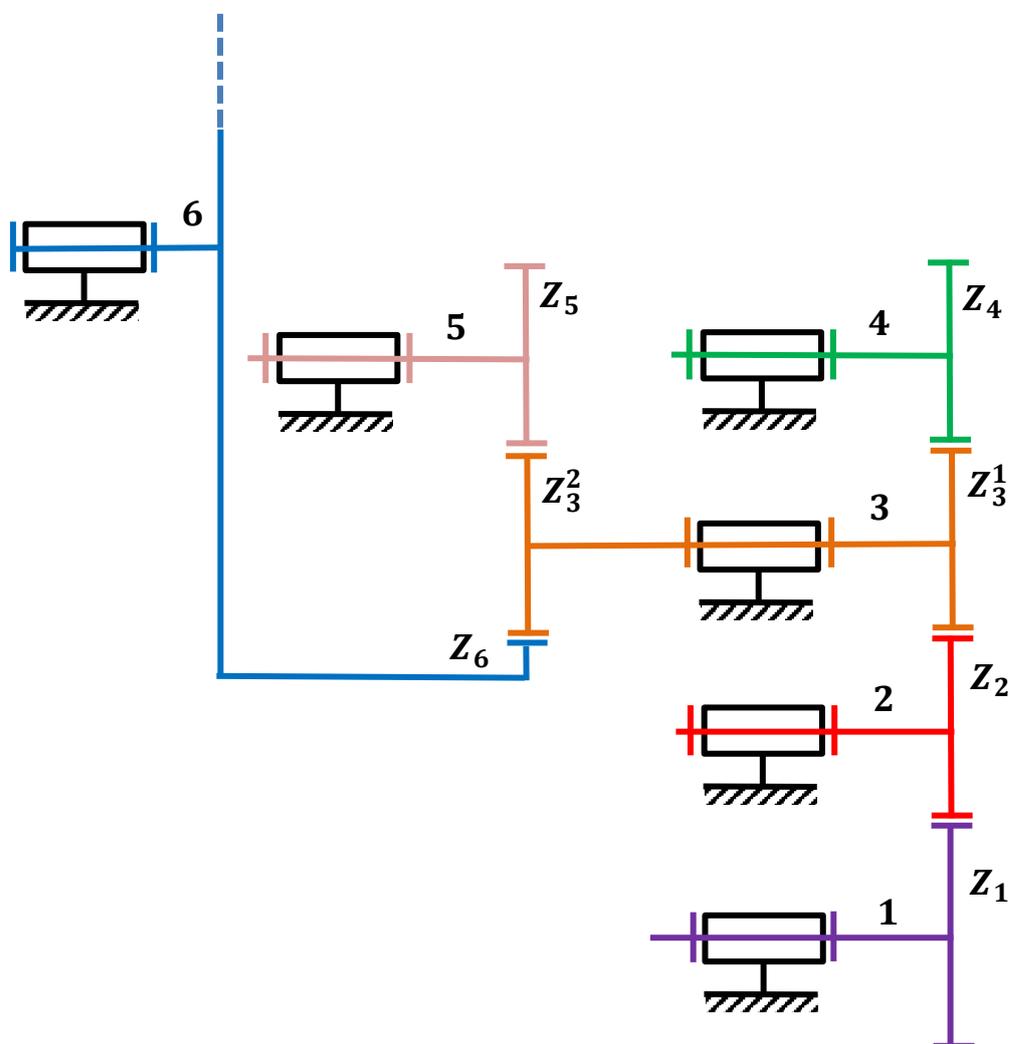
### TD10

*Transformation du mouvement*  
*Trains épicycloïdaux*

Programme - Compétences		
B211	MODELISER	Torseur cinématique
B214	MODELISER	Liaisons: - géométrie des contacts entre deux solides - définition du contact ponctuel entre deux solides: roulement, pivotement, glissement, condition cinématique de maintien du contact - définition d'une liaison - liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés - torseur cinématique des liaisons normalisées
C25	RESOUDRE	Loi entrée-sortie géométrique
C26	RESOUDRE	Loi entrée-sortie Cinématique Composition des vitesses angulaires Composition des vitesses

## Exercice 1: Trains simples

Soit le réducteur de schéma cinématique suivant :



Question 1: Identifier les contacts intérieurs et extérieurs sur le schéma

Question 2: Exprimer le rapport de réduction  $k_{41} = \frac{\omega_{40}}{\omega_{10}}$

Question 3: Exprimer le rapport de réduction  $k_{65} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{50}}$

Question 4: Exprimer le rapport de réduction  $k_{15} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{50}}$

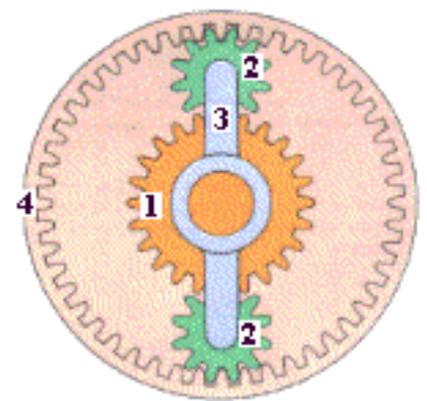
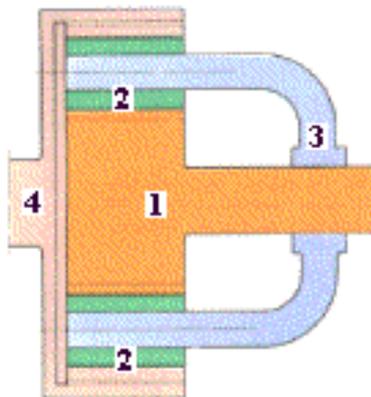
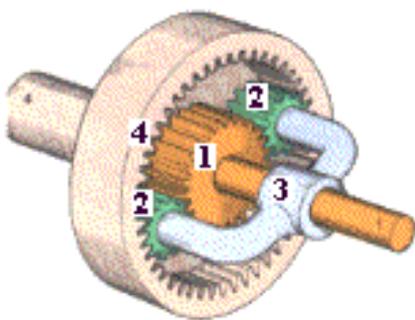
Question 5: Exprimer les rapports de réduction  $k_{63} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{30}}$  et  $k_{31} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$  et en déduire

$$k_{61} = \frac{\omega_{60}}{\omega_{10}}$$

Dernière mise à jour 05/03/2020	Mécanismes – Vitesses – Accélérations – Lois entrée/sortie	Denis DEFAUCHY TD10 - Sujet
------------------------------------	---	--------------------------------

## Exercice 2: Train épicycloïdal

Un réducteur à train épicycloïdal est un système composé de plusieurs engrenages qui permet d'obtenir des rapports de réduction très importants.

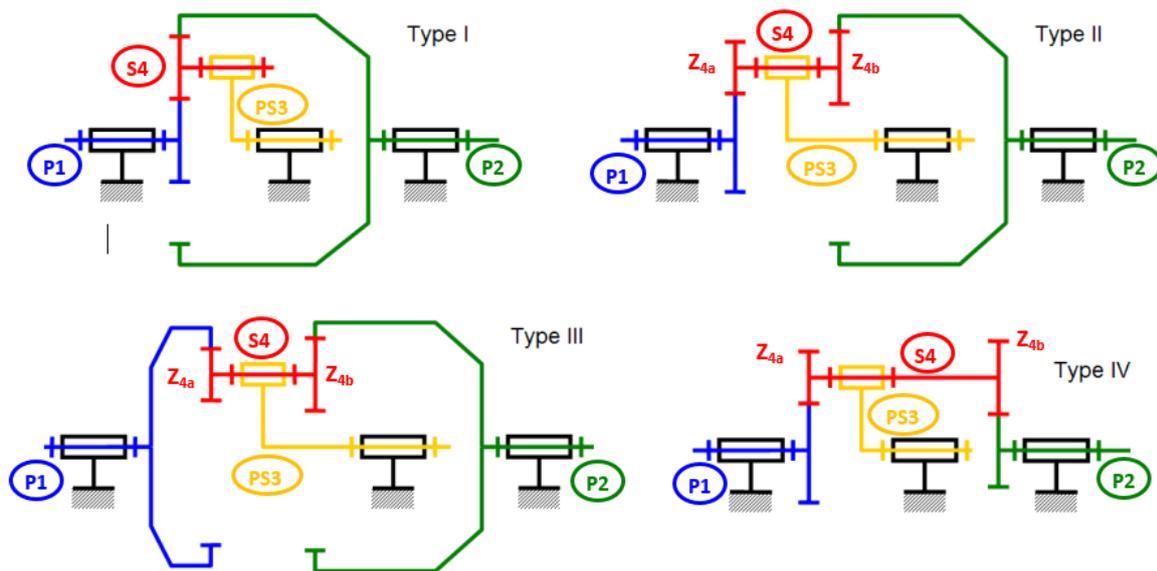


On trouve sur internet une animation intéressante dont voici le lien :

<http://edumeca.free.fr/dotclear/themes/default/flash/engrenage.php>

Dernière mise à jour 05/03/2020	Mécanismes – Vitesses – Accélérations – Lois entrée/sortie	Denis DEFAUCHY TD10 - Sujet
------------------------------------	---	--------------------------------

Il existe 4 types de trains épicycloïdaux appelés de type *I*, *II*, *III* et *IV*, dont les schémas cinématiques sont proposés ci-dessous.



Un train épicycloïdal est composé, pour le type *I*, d'un planétaire *P1*, d'une couronne *P2*, d'un porte satellite *PS3* et de plusieurs satellites *S4*.

Remarques :

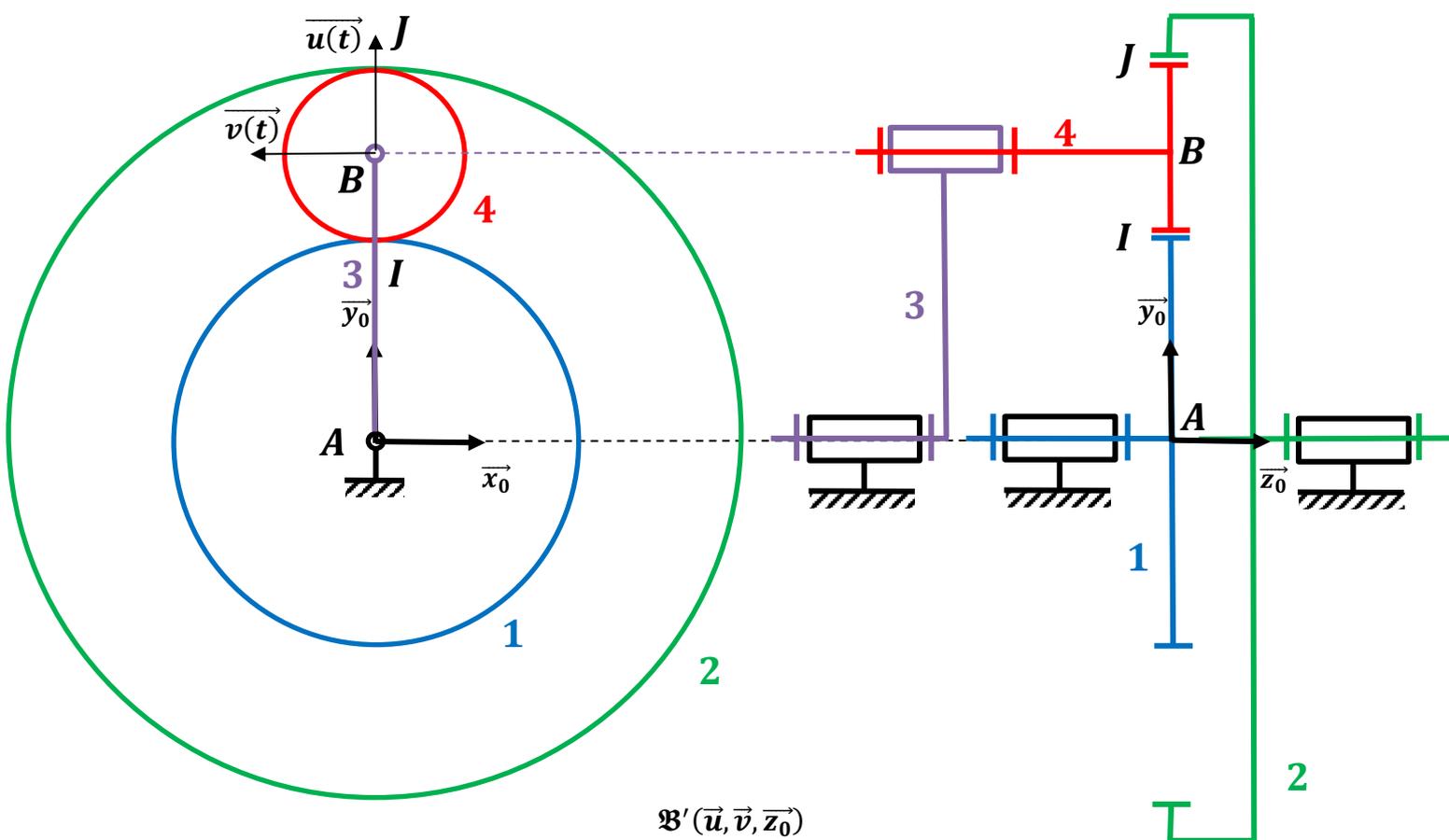
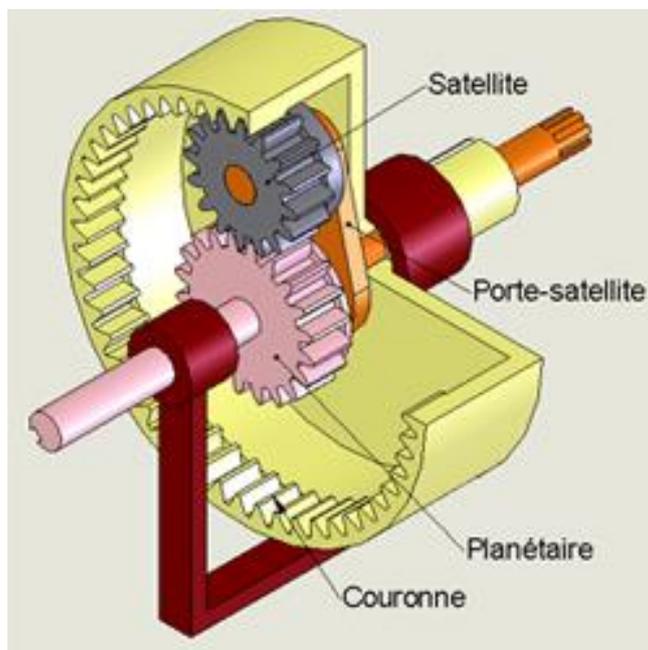
- Cinématiquement, il suffit de ne modéliser qu'un satellite
- Selon le type, on peut avoir 2 couronnes ou 2 planétaires
- Seul le train épicycloïdal de type *I* impose un même module pour toutes les roues dentées. Pour les autres types, seuls les couples de roues dentées en contact doivent avoir le même module. Toutefois, le module disparaît dans les relations cinématiques entrée/sortie et n'intervient donc pas, seuls les nombres de dents où les rayons interviennent

Ce système comporte 3 inconnues cinématiques, les vitesses de rotation  $\Omega_{10}$  et  $\Omega_{20}$  et la vitesse de rotation du porte satellite  $\Omega_{30}$ . Il existe donc une relation entre ces 3 inconnues, relation que nous allons déterminer par 4 méthodes :

- Formule de Willis
- Exploitation du roulement sans glissement
- Fermeture cinématique
- Méthode graphique

Pour des réducteurs simples, on a souvent une des 3 rotations qui est imposée nulle, la pièce associée étant alors encadrée au bâti. Lorsque nous aurons la relation cinématique entre les 3 rotations, nous calculerons le rapport de réduction de réducteurs classiques où l'une des 3 pièces est bloquée en rotation afin d'avoir un ordre d'idée des réductions que l'on peut atteindre.

Dans cette étude, nous allons nous focaliser sur le type *I*, sachant que la démarche proposée s'applique aux autres types :



$$\mathfrak{B}'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$$

$$AI = R_1 \quad ; \quad AB = R_3$$

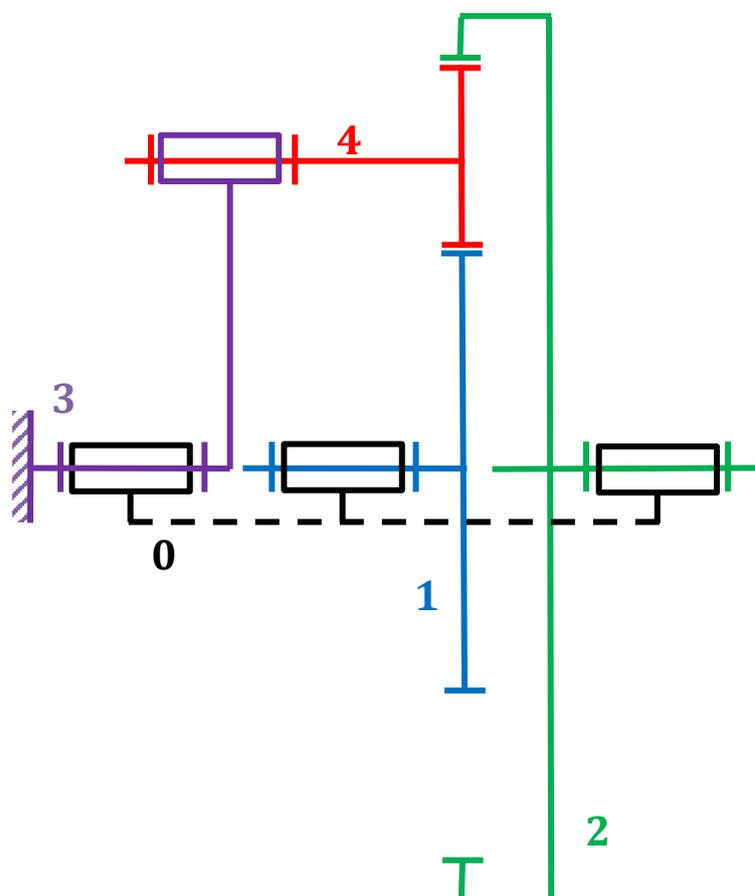
$$AJ = R_2 \quad ; \quad BI = BJ = R_4$$

Dernière mise à jour 05/03/2020	Mécanismes – Vitesses – Accélérations – Lois entrée/sortie	Denis DEFAUCHY TD10 - Sujet
------------------------------------	---	--------------------------------

## *Formule de Willis*

Un train épicycloïdal n'est pas un train simple puisque l'axe de la liaison 4/3 n'est pas fixe dans le temps. On ne peut donc pas appliquer la formule de Willis dans le repère 0. L'astuce permettant de déterminer la relation cinématique dans un train épicycloïdal consiste à appliquer la formule de Willis dans un repère dans lequel l'axe de rotation de chaque roue dentée est fixe dans le temps. Il existe un repère dans lequel le train épicycloïdal s'apparente à un train simple, c'est dans le repère lié au porte satellites 3.

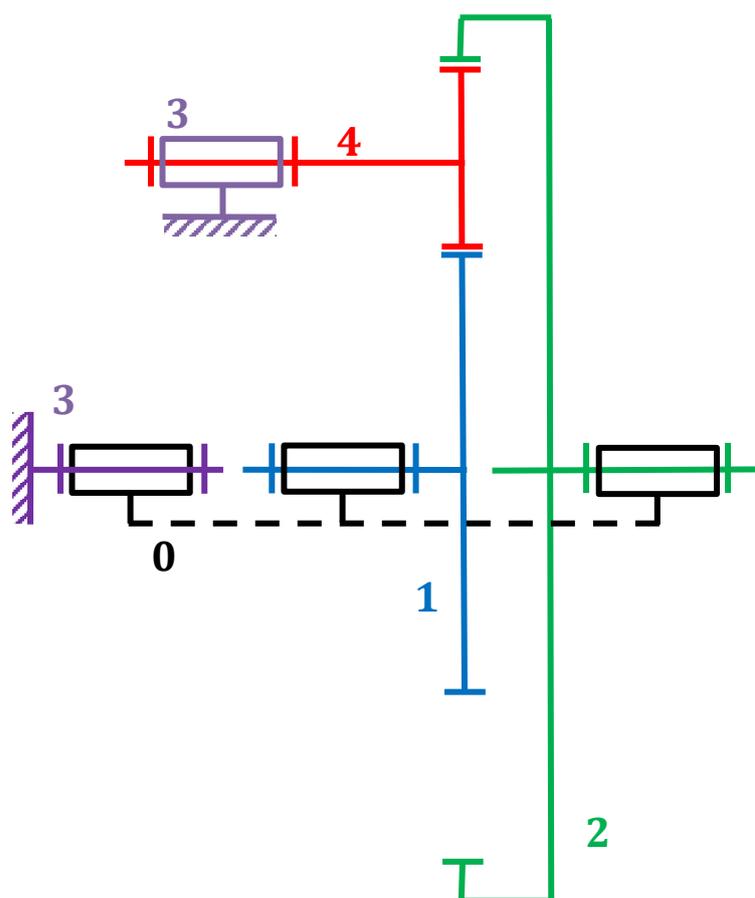
On propose ci-dessous une représentation du train épicycloïdal en changeant le repère de base et en se plaçant dans le repère du porte satellites 3.



La pièce 0 n'étant plus considérée comme un bâti, il faut relier ses différents éléments, on ajoute donc des pointillés entre les 3 liaisons pivots de 0 avec les pièces 1, 2 et 3.

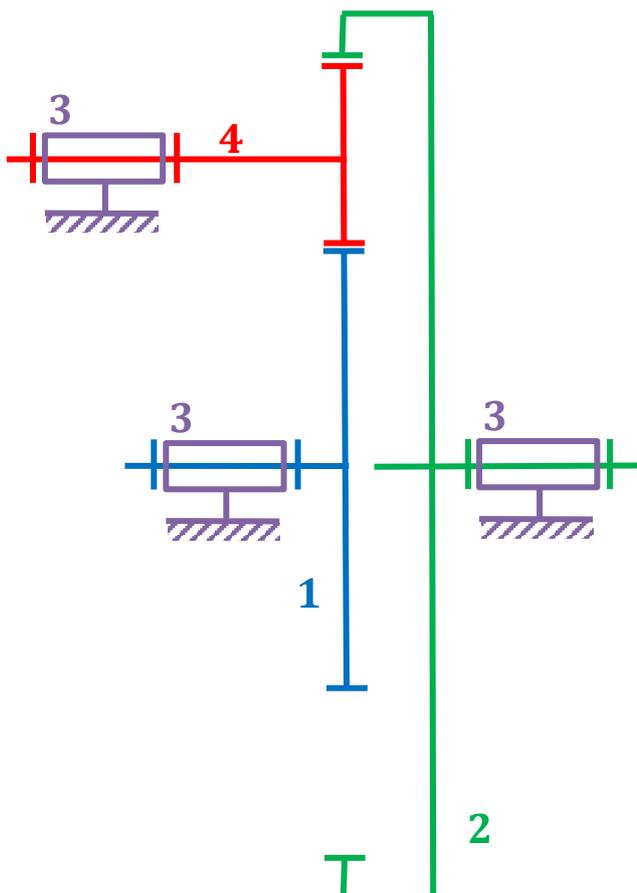
Dernière mise à jour	Mécanismes – Vitesses –	Denis DEFAUCHY
05/03/2020	Accélérations – Lois entrée/sortie	TD10 - Sujet

On peut donc modifier quelque peu la représentation précédente comme suit :



Dernière mise à jour	Mécanismes – Vitesses –	Denis DEFAUCHY
05/03/2020	Accélération – Lois entrée/sortie	TD10 - Sujet

Cinématiquement, le mécanisme représenté à la page précédente est équivalent au suivant (axes des 3 pivots identiques) :



**Question 1:** Déterminer le rapport  $\lambda_{Type I} = \frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}}$  appelé « raison du train épicycloïdal » à l'aide de la formule de Willis

**Question 2:** En composant les vitesses de rotation par rapport à la base 0, déterminer la relation liant  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  et  $\omega_{3/0}$  en fonction de  $\lambda_{Type I}$  sous la forme  $A\omega_{1/0} + B\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$

Remarques :

- Selon le type de train épicycloïdal utilisé, seule la raison change, cette relation restera toujours vraie. En effet, on pose  $\lambda_{Type X} = \frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}}$  quel que soit le cas traité.
- La relation obtenue et les raisons associées ne sont vraies que si les numéros des pièces sont respectés !
- Parfois, la raison est définie par  $\lambda = \frac{\omega_{1/3}}{\omega_{2/3}}$ . La raison est inverse, il est donc possible de voir apparaître la relation obtenue en Q3 avec  $1/\lambda$  au lieu de  $\lambda$ , ou sous une autre forme si retravaillée pour ne plus avoir de rapport...

**Question 3:** Déterminer la raison des trains épicycloïdaux de type II, III et IV

Dernière mise à jour	Mécanismes – Vitesses –	Denis DEFAUCHY
05/03/2020	Accélération – Lois entrée/sortie	TD10 - Sujet

## ***Roulement sans glissement***

**Question 4:** Exprimer la condition de roulement sans glissement en  $I$  entre 1 et 4 et la condition de roulement sans glissement en  $J$  entre 2 et 4

**Question 5:** Exprimer  $\vec{V}(I, 1/0)$  en fonction  $\omega_{1/0}$  et  $R_1$

**Question 6:** Exprimer  $\vec{V}(I, 4/0)$  en fonction  $\omega_{3/0}$ ,  $\omega_{4/3}$ ,  $R_1$  et  $R_4$

**Question 7:** Exprimer  $\vec{V}(J, 2/0)$  en fonction  $\omega_{2/0}$  et  $R_2$

**Question 8:** Exprimer  $\vec{V}(J, 4/0)$  en fonction  $\omega_{3/0}$ ,  $\omega_{4/3}$ ,  $R_2$  et  $R_4$

**Question 9:** En déduire la relation entre les vitesses  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  et  $\omega_{3/0}$

## ***Fermeture cinématique***

Pour l'étude cinématique, on se place dans le cadre d'un mécanisme plan.

**Question 10:** Etablir le graphe des liaisons du mécanisme

**Question 11:** Exprimer les torseurs des mouvements 1/4 et 2/4 en leurs points caractéristiques en tenant compte de la propriété de roulement sans glissement en  $I$  et  $J$

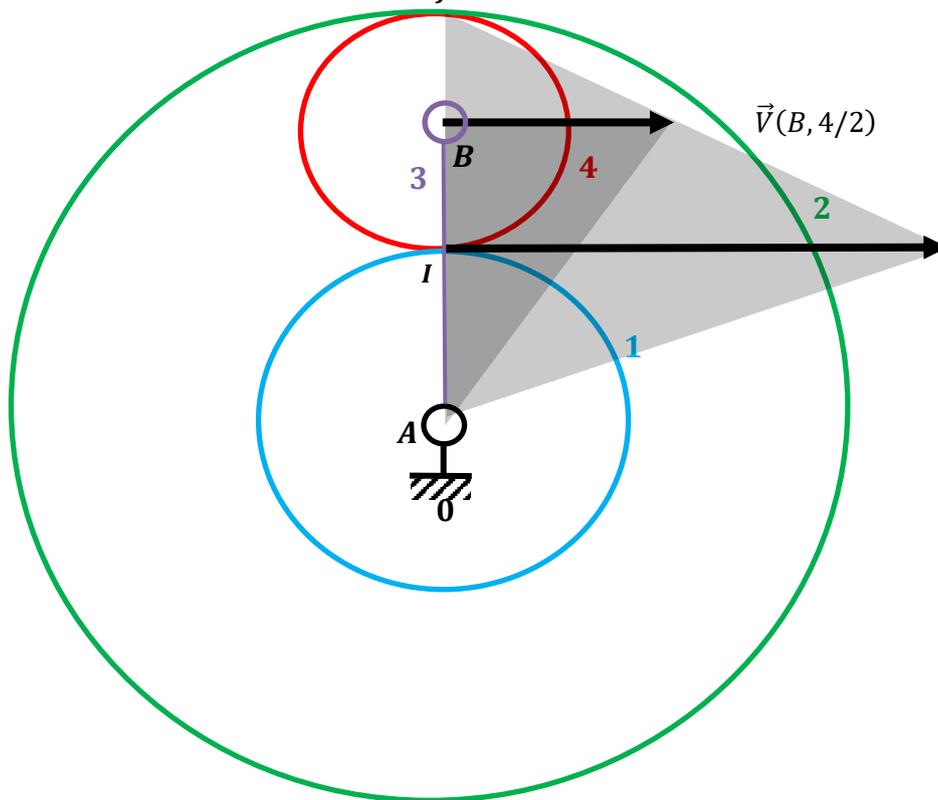
**Question 12:** Ecrire la fermeture de chaîne cinématique de la chaîne 01430 en un point bien choisi afin d'exprimer directement une relation entre  $R_{0/1}$ ,  $R_{4/3}$  et  $R_{3/0}$

**Question 13:** Ecrire la fermeture de chaîne cinématique de la chaîne 02430 en un point bien choisi afin d'exprimer directement une relation entre  $R_{0/3}$ ,  $R_{3/4}$  et  $R_{2/0}$

**Question 14:** En déduire la relation entre les vitesses  $R_{1/0}$ ,  $R_{2/0}$  et  $R_{3/0}$

Dernière mise à jour 05/03/2020	Mécanismes – Vitesses – Accélérations – Lois entrée/sortie	Denis DEFAUCHY TD10 - Sujet
------------------------------------	---	--------------------------------

## Cinématique graphique



Sur la figure ci-dessus, on a représenté à l'aide de triangles le champ des vitesses des points de la droite passant par  $A$ ,  $I$ ,  $B$  et  $J$  pour différents mouvements relativement à la couronne 2, c'est-à-dire que l'on procède comme si la couronne 2 était fixe.

**Question 15:** En exploitant la propriété de roulement sans glissement en  $J$  et compte tenu de la connaissance de  $\vec{V}(B, 4/2)$ , colorier en rouge le champs des vitesses des points du segment  $JI$  dans le mouvement de 4 par rapport à 2

**Question 16:** En exploitant la relation entre  $\vec{V}(B, 4/2)$  et  $\vec{V}(B, 3/2)$  et en utilisant la valeur de la vitesse  $\vec{V}(A, 3/2)$ , colorier en bleu le champs des vitesses des points du segment  $AB$  dans le mouvement de 3 par rapport à 2

**Question 17:** Après avoir donné la relation liant  $\vec{V}(I, 4/2)$  et  $\vec{V}(B, 4/2)$ , identifier la flèche correspondant à  $\vec{V}(I, 4/2)$

**Question 18:** En exploitant la relation entre  $\vec{V}(I, 4/2)$  et  $\vec{V}(I, 1/2)$  et en utilisant la valeur de la vitesse  $\vec{V}(A, 1/2)$ , colorier en vert le champs des vitesses des points du segment  $AI$  dans le mouvement de 1 par rapport à 2

**Question 19:** En exploitant le fait que la vitesse en  $B$  soit une vitesse identique dans deux mouvements différents, montrer que  $-R_3\omega_{3/2} = R_4\omega_{4/2}$

**Question 20:** En exploitant le fait que la vitesse en  $I$  soit une vitesse identique dans deux mouvements différents et en utilisant la relation liant  $\vec{V}(I, 4/2)$  et  $\vec{V}(B, 4/2)$ , montrer que  $-R_1\omega_{1/2} = 2R_4\omega_{4/2}$

**Question 21:** Montrer que  $2R_3 - R_1 = R_2$  et que  $2R_3 = R_1 + R_2$

**Question 22:** En déduire la relation entre les vitesses  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  et  $\omega_{3/0}$

Dernière mise à jour	Mécanismes – Vitesses –	Denis DEFAUCHY
05/03/2020	Accélération – Lois entrée/sortie	TD10 - Sujet

## *Applications*

### *2 vitesses identiques*

Nous savons maintenant que la relation de tout train épicycloïdal (Type *I*, *II*, *III* et *IV*) s'écrit sous la forme :

$$\lambda\omega_{1/0} + (1 - \lambda)\omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$

$$\lambda_{Type I} = -\frac{R_1}{R_2}$$

$$\lambda_{Type II} = -\frac{R_1 R_{4b}}{R_{4a} R_2}$$

$$\lambda_{Type III} = \lambda_{Type IV} = \frac{R_1 R_{4b}}{R_{4a} R_2}$$

Nous allons étudier le rapport de réduction dans différentes configurations. D'abord, nous allons voir ce qui se passe lorsque deux vitesses sont imposées égales.

Nous déterminerons ensuite le rapport de réduction lorsque la couronne est bloquée, puis lorsque le porte satellite l'est.

Dans un premier temps, supposons que l'on lie deux des 3 pièces en rotation entre elles, quel que soit le type étudié.

**Question 23: Que vaut alors la 3<sup>e</sup> vitesse de rotation si deux des autres sont égales**

Dernière mise à jour	Mécanismes – Vitesses –	Denis DEFAUCHY
05/03/2020	Accélération – Lois entrée/sortie	TD10 - Sujet

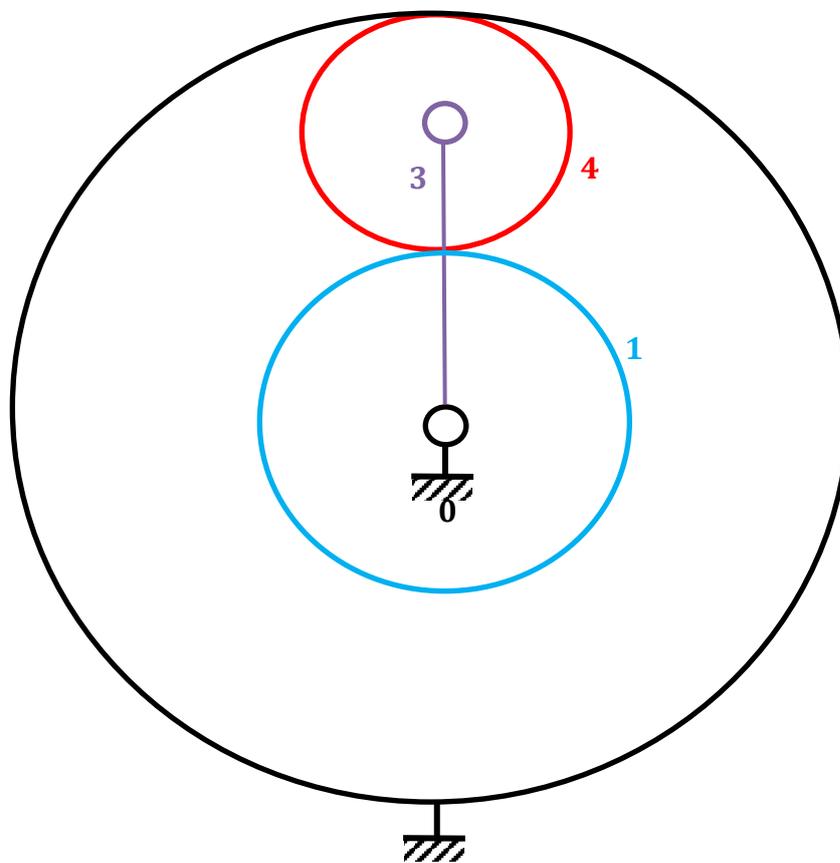
## ***Blocage d'un élément du train épicycloïdal***

Dans un train épicycloïdal, on peut bloquer (ou imposer une vitesse non nulle) un des 3 éléments parmi le planétaire, la couronne et le porte satellite. Bloquer le porte satellite revient à avoir un train simple, il n'y a donc plus de train épi...

On devra donc savoir traiter les cas classiques où l'on bloque soit la couronne, soit le planétaire. J'ai choisi pour la suite de bloquer la couronne.

### ***Couronne bloquée***

Supposons maintenant un train épicycloïdal dans lequel la couronne est bloquée :



**Question 24:** Déterminer le rapport de réduction  $k = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction de  $\lambda$  à l'aide de la formule établie précédemment

Il est possible que vous ayez à déterminer ce rapport sans avoir l'étude préalable permettant d'obtenir la relation entre les 3 vitesses.

**Question 25:** Retrouver ce rapport à l'aide de la formule de Willis

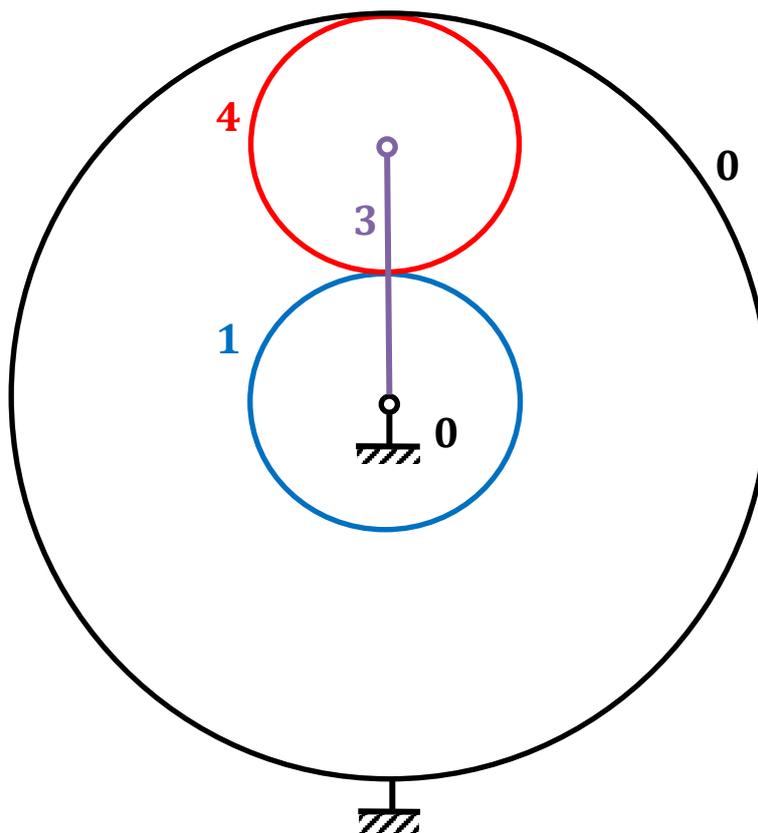
Dernière mise à jour	Mécanismes – Vitesses –	Denis DEFAUCHY
05/03/2020	Accélérations – Lois entrée/sortie	TD10 - Sujet

Prenons un réducteur à train épicycloïdal dans lequel le planétaire et les portes satellites ont le même rayon :

$$R_4 = R_1$$

$$R_3 = 2R_1$$

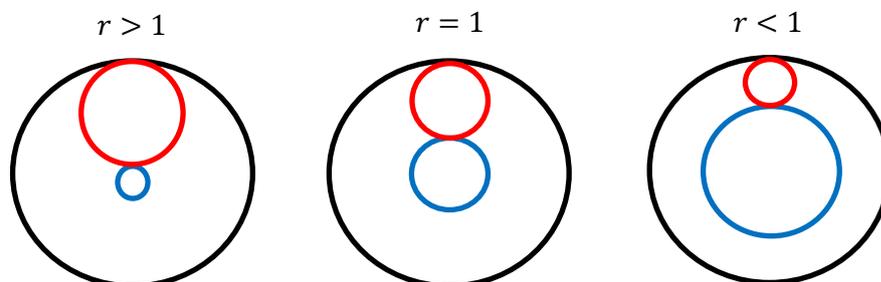
$$R_0 = 3R_1$$



Question 26: Que vaut le rapport de réduction  $k$  ?

Dernière mise à jour 05/03/2020	Mécanismes – Vitesses – Accélérations – Lois entrée/sortie	Denis DEFAUCHY TD10 - Sujet
------------------------------------	---	--------------------------------

Prenons maintenant le même réducteur pour lequel l'encombrement extérieur  $R_0$  reste constant et déterminons le rapport de réduction en fonction des dimensions du planétaire et des satellites. On introduit le rapport  $r = \frac{R_4}{R_1}$ . On notera que l'on a  $R_0 = R_1 + 2R_4$



**Question 27:** Exprimer  $\lambda$  en fonction de  $r$

**Question 28:** En déduire  $k$  en fonction de  $r$

**Question 29:** Tracer cette courbe en calculant quelques valeurs à la calculatrice pour  $r \in [0; 10]$  et conclure sur la capacité de ce réducteur à réduire fortement les vitesses de rotation

Faites attention : Obtenir une réduction maximale veut dire que, pour une même vitesse d'entrée, la sortie est fortement réduite. Cela correspond donc à un rapport de réduction minimal.

**Question 30:** Quelle réduction minimale peut-on obtenir ?

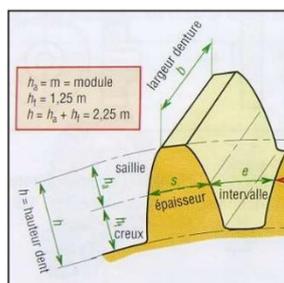
**Question 31:** Quelle réduction maximale peut-on obtenir ?

**Question 32:** Faut-il diminuer le rayon du planétaire ou des satellites pour obtenir une forte réduction ? Identifier le cas associé sur les 3 images proposées

**Question 33:** Pour quel rapport  $r$  divise-t-on la vitesse par 10 ?

**Question 34:** Comparer l'encombrement d'un train épi vis-à-vis d'un réducteur train simple composé de 2 roues dentées de même réduction

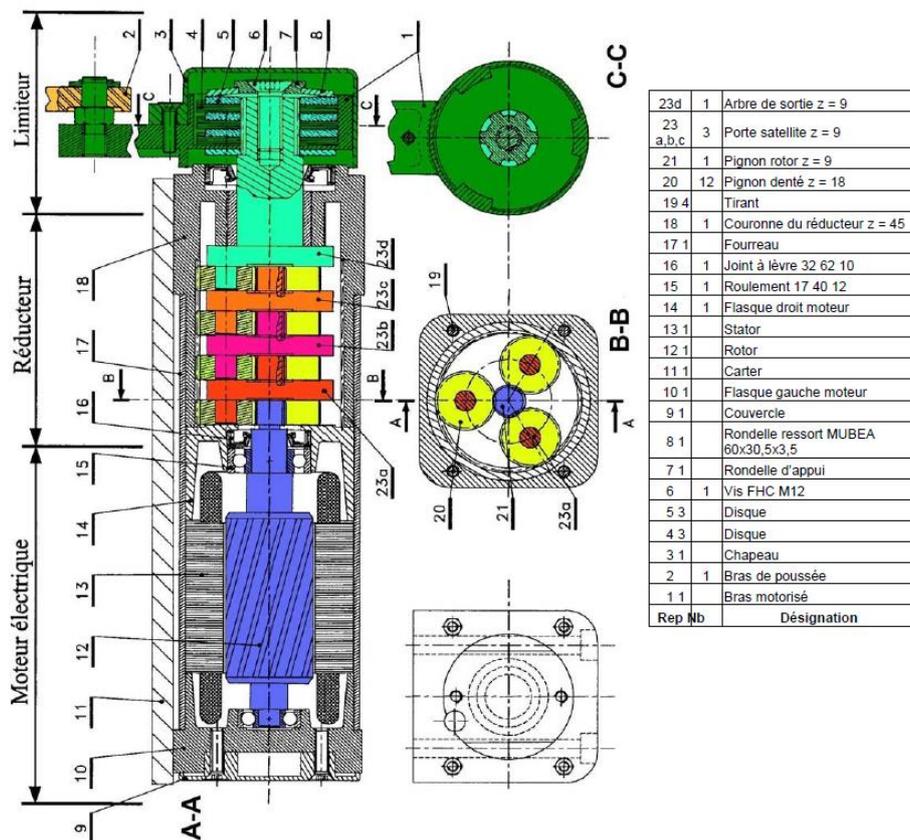
Voici comment sont dimensionnées les dents d'une roue dentée, c'est normé :



**Question 35:** Quelles sont ses limites qui empêchent de réduire infiniment la vitesse et quelle modification de dimension peut permettre de les repousser quelque peu ?

**Question 36:** Conclure sur l'intérêt des trains épicycloïdaux par rapport à des trains simples

Une solution pour augmenter la réduction consiste à mettre des trains épicycloïdaux en série. Le motoréducteur ci-dessous est composé de 4 trains épicycloïdaux en série :



Motoréducteur du portail BFT

**Question 37:** Déterminer le rapport de réduction  $k'$  du réducteur proposé

**Question 38:** Quel rapport serait obtenu avec 10 étages de réductions à la suite ?

Et ça ne prendrait pas tant de place supplémentaire...

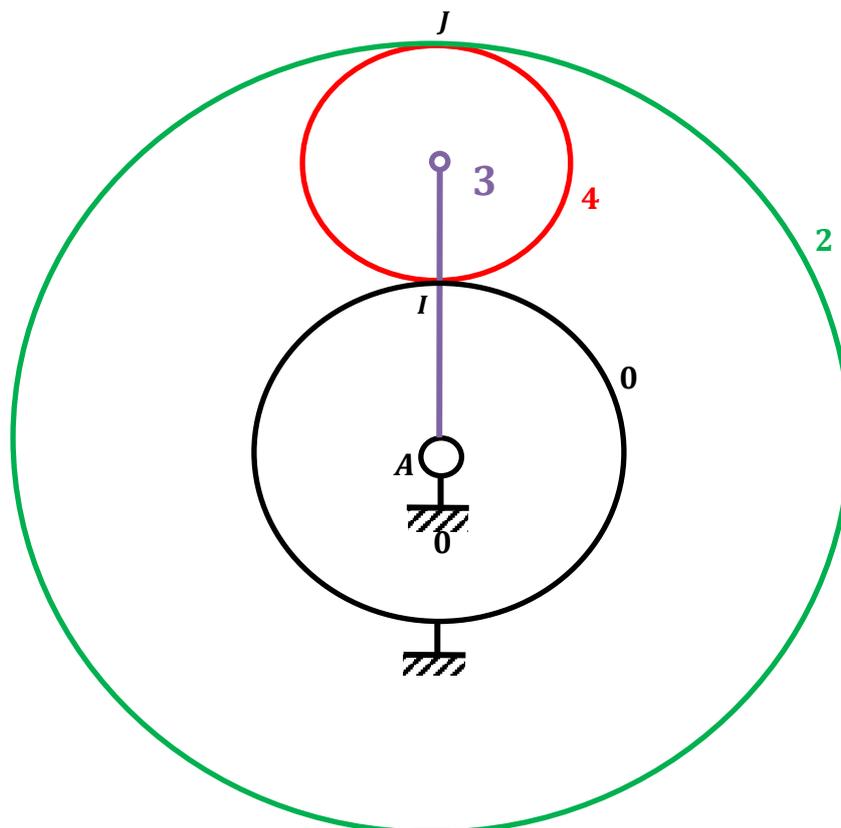
Dernière mise à jour 05/03/2020	Mécanismes – Vitesses – Accélérations – Lois entrée/sortie	Denis DEFAUCHY TD10 - Sujet
------------------------------------	---	--------------------------------

## *Planétaire bloqué*

Exemple d'un batteur planétaire :



Supposons maintenant que le planétaire 1 est bloqué en rotation, soit encastré au bâti.

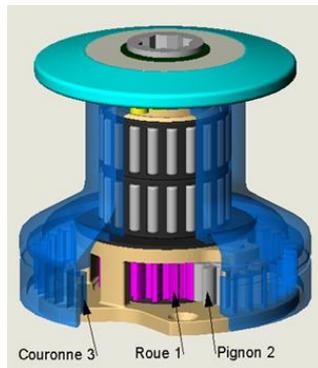


Question 39: Déterminer le rapport de réduction  $k = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}}$

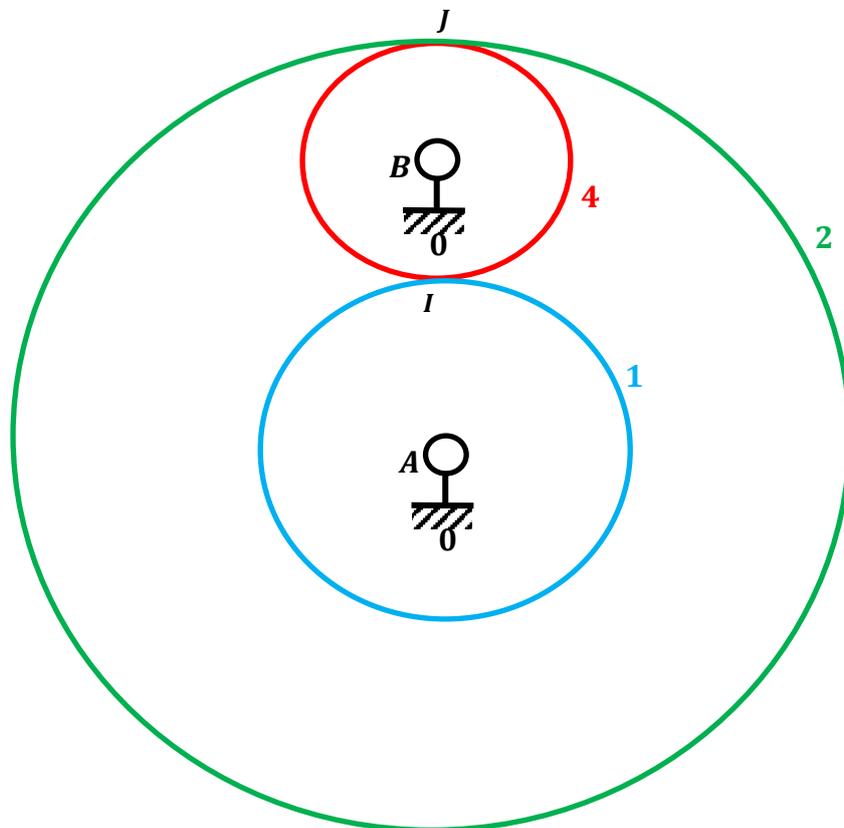
Dernière mise à jour 05/03/2020	Mécanismes – Vitesses – Accélérations – Lois entrée/sortie	Denis DEFAUCHY TD10 - Sujet
------------------------------------	---	--------------------------------

## Porte satellite bloqué

Exemple d'un Winch :



Supposons maintenant que le porte satellite 3 est bloqué en rotation, soit encastré au bâti.



Question 40: Le train épicycloïdal est-il toujours un train épicycloïdal ?

Question 41: Déterminer le rapport de réduction  $k = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$