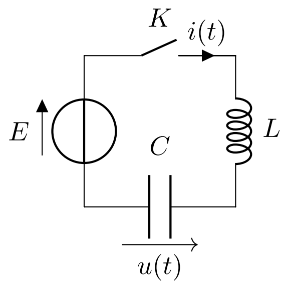
# TD6 : Circuits linéaires du deuxième ordre, oscillateurs, filtrage

## Exercice 1 : Circuit LC



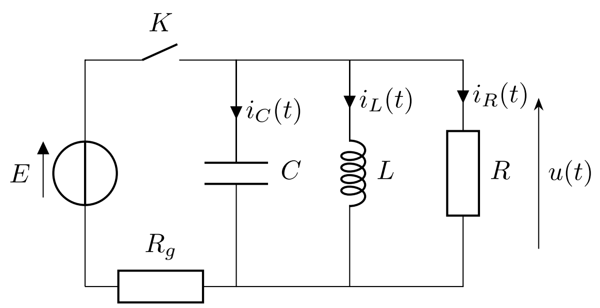

On considère le circuit ci-contre dans lequel l'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur $C$ est déchargé. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur $K$.

1. Quelles sont les valeurs de $u(0^+)$ et de $i(0^+)$ ?
2. Établir l'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur. Exprimer la pulsation propre $\omega_0$ en fonction de $L$ et $C$.
3. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir les expressions de $u(t)$ et $i(t)$
4. Représenter ces évolutions temporelles.
5. Donner les expressions $E_C(t)$ et $E_L(t)$ des énergies stockées dans le condensateur et dans la bobine. L'énergie totale du système se conserve-t-elle ? Commenter.
6. Décrire les transferts d'énergie qui ont lieu entre les différents dipôles.
7. Ce système peut-il représenter un système réel ? Pourquoi ?

## Exercice 2 : Analogie entre oscillateur mécanique et oscillateur électrique

1. On considère une masse $m$ accrochée à un ressort de raideur $k$ et astreinte à se déplacer suivant un axe $x$ horizontal. Déterminer l'équation différentielle de son mouvement.
2. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la charge $q$ portée par le condensateur dans un circuit comportant un condensateur de capacité $C$ et une bobine d'inductance $L$ branchés en parallèle.
3. Expliciter l'analogie qui existe entre les oscillateurs mécanique et électrique.

## Exercice 3 : Circuit RLC parallèle

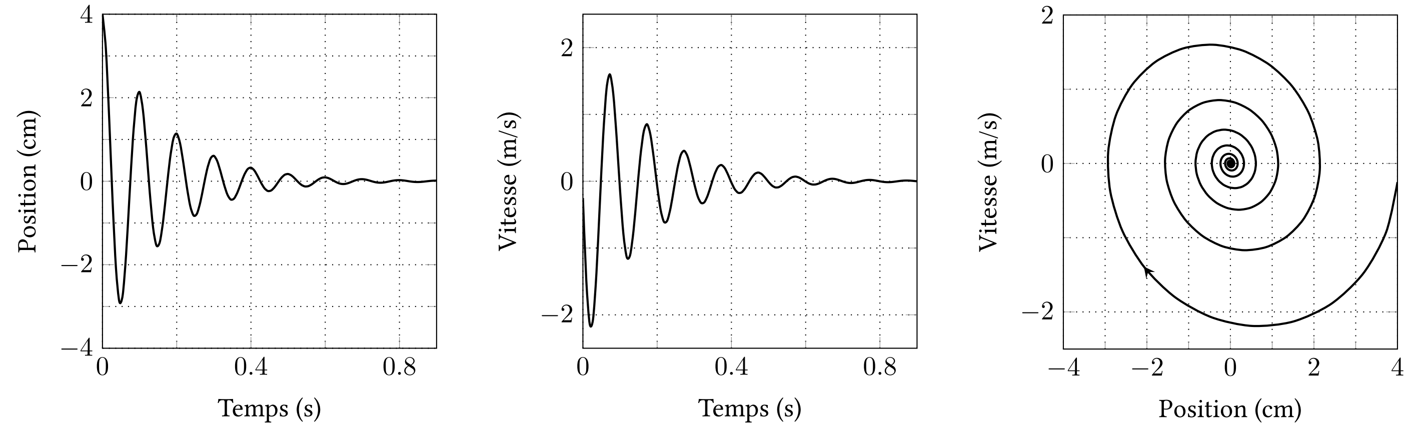



On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre. L'interrupteur K est initialement fermé pendant un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint. À $t = 0$ on ouvre l'interrupteur et on observe l'évolution de la tension $u(t)$.

1. Donner les valeurs des intensités et de la tension $u$ dans le circuit à $t = 0^-$, $t = 0^+$, et $t \to \infty$.
2. Décrire qualitativement ce qu'il se passe lorsqu'on ouvre $K$. Comment le facteur de qualité $Q$ du circuit dépend-il de $R$ ? Proposer une expression de $Q$ basée sur une analyse dimensionnelle.
3. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ pour $t > 0$. La mettre sous forme canonique pour faire apparaître la fréquence propre $w_0$ et le facteur de qualité $Q$. Comparer l'expression de $Q$ avec celle trouvée à la question précédente.
4. A.N. : On donne $R = 40\,\Omega$, $C = 200\,\mu\text{F}$ et $L = 10\,\text{mH}$. Calculer la pulsation propre du système et le facteur de qualité. Quelle est la durée du régime transitoire ? Tracer le portrait de phase de la tension et de l'intensité aux bornes de $C$.

## Exercice 4 : Oscillateur mécanique amorti

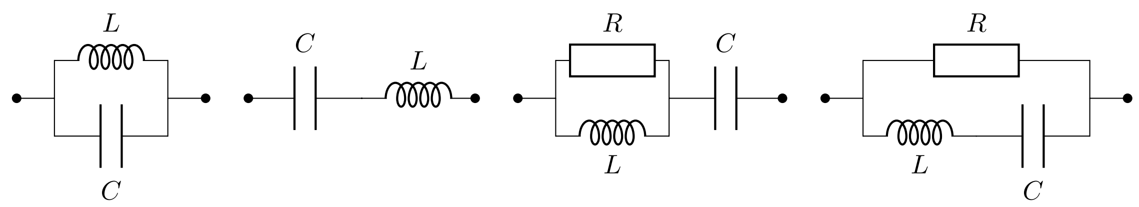
On étudie le mouvement d'une masse $m$ accrochée à un ressort de raideur $k$ et soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$ (v est la vitesse de la masse). Le mouvement a lieu suivant l'axe $x$. On donne le portrait de phase du mouvement de la masse :



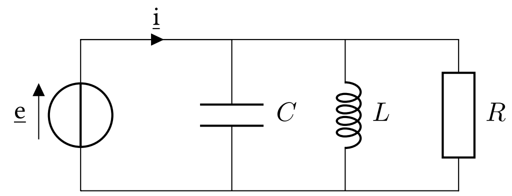

1. Faire un schéma du système décrit en représentant les différentes forces qui s'appliquent sur $m$.
2. Déterminer graphiquement la pulsation propre $\omega_0$ et le facteur de qualité $Q$ de l'oscillateur
3. L'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ de la masse est : $\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Exprimer le facteur de qualité et la fréquence propre de l'oscillateur en fonction de $m$, $k$ et $\gamma$.
4. On donne $m = 1\,\text{g}$. Déterminer $k$ et $\gamma$.

## Exercice 5 : Associations d'impédances complexes

Calculer l'impédance complexe équivalente des dipôles suivants :




## Exercice 6 : Circuit RLC parallèle en régime forcé

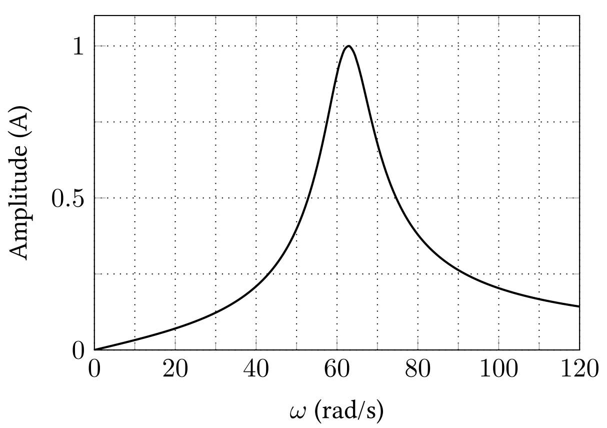


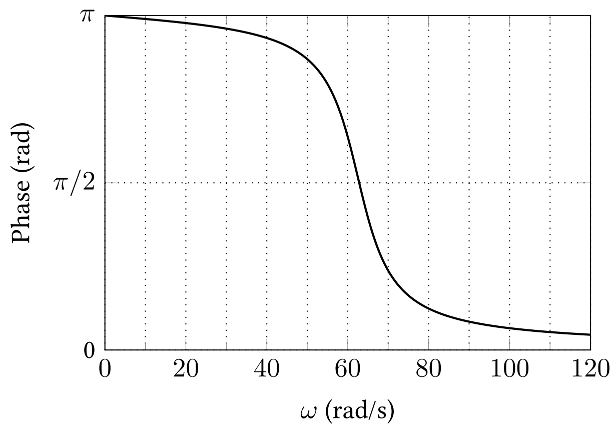

On étudie le circuit ci-contre où le générateur fournit une tension sinusoïdale de fréquence $\omega$.

1. À l'aide de la méthode des complexes, déterminer l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de $\underline{e}$. Faire apparaître la pulsation propre $\omega_0$ et le facteur de qualité $Q$ du circuit.
2. Que vaut l'amplitude de l'intensité ?
3. Que vaut le déphasage $\phi$ entre la tension $\underline{e}$ et l'intensité $\underline{i}$
4. La tension réelle est $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. Écrire l'expression de l'intensité réelle.

**Exercice 7** : Déterminer les paramètres d'un oscillateur

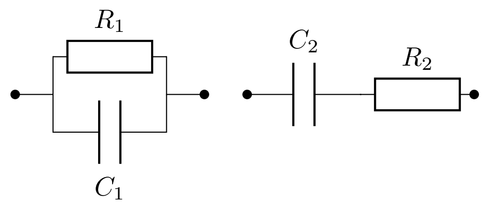
Les graphiques ci-dessous montrent l'amplitude et la phase d'un oscillateur en fonction de la pulsation de l'excitation.



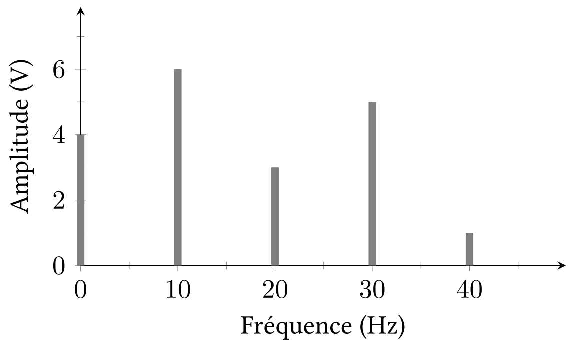

1. Déterminer graphiquement la pulsation propre $\omega_0$ et le facteur de qualité $Q$ de cet oscillateur.
2. Quelles sont les valeurs des composants que l'on doit choisir pour fabriquer cet oscillateur avec un circuit RLC série ($\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$)
3. Quel constante de raideur de ressort doit-on choisir pour faire osciller une masse $m = 1$ g à la fréquence $\omega_0$ ? On pourra retrouver la pulsation propre d'un système {masse + ressort} par analyse dimensionnelle.

**Exercice 8** : Équivalence de composants




Les deux dipôles suivants sont utilisés dans un circuit en régime sinusoïdal à la fréquence $\omega$. Exprimer $R_2$ et $C_2$ en fonction de $R_1$, $C_1$ et $\omega$ pour que les deux dipôles soient équivalents.

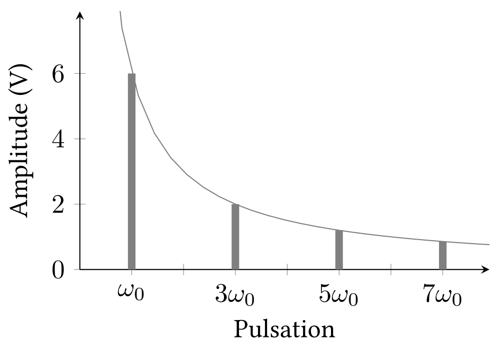
**Exercice 9** : Spectre d'un signal périodique

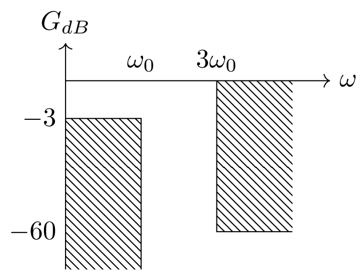



On représente ci-contre le spectre d'un signal périodique.

1. Combient vaut la valeur moyenne de ce signal ?
2. Quelle est la fréquence fondamentale du signal ?
3. Donner l'amplitude et la fréquence de chacune des harmoniques.
4. Utiliser la calculatrice pour tracer l'allure de ce signal (en supposant que toutes les harmoniques sont en phase)

**Exercice 10** : Filtrage d'un signal




La figure ci-dessus représente l'allure du spectre d'un signal carré ainsi que le gabarit du filtre dans lequel on fait passer ce signal.

1. Quelle est la fréquence fondamentale du signal carré ?
2. Donner la pulsation et l'amplitude des 3 premières harmoniques.
3. Quel est le type du filtre à travers lequel on fait passer le signal ?
4. Comment peut-on fabriquer simplement un filtre de ce type avec une résistance et un condensateur ? Est-ce que le filtre décrit par ce gabarit vous semble réalisable de cette manière ?
5. Tracer l'allure du spectre du signal carré à la sortie du filtre.
6. Tracer l'allure du signal à l'entrée et à la sortie du filtre.

**Exercice 11** : Diagramme de Bode

On souhaite étudier un filtre dont la fonction de transfert est :

$$\underline{\mathrm{H}}(\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

1. De quel type de filtre s'agit-il ?
2. Donner l'expression du gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ de ce filtre.
3. Donner une approximation de $G_{dB}(\omega)$ lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.
4. Tracer le diagramme de Bode de ce filtre en faisant apparaître les droites asymptotiques en $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ pour $Q = 1$.
5. Faire apparaître sur le graphique la bande passante à $-3$ dB, notée $\Delta\omega$.
6. On rappelle que lorsque $G_{dB} = -3$ dB, $G = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer que $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.